대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.1, 165~181, March 2000

Cabri Ⅱ를 활용한 도형의 교수-학습 방안
- 반힐이론을 중심으로 -

최 수 정 (부경대), 표 용 수 (부경대)

Ⅰ. 서론

중학교 2학년 학생들을 대상으로 수학에 대한 흥미도, 관심도 및 영역별 난이도와 현재 공부하고 있는 수학교과의 내용에 관한 생각을 알아보기 위하여 교육환경 및 지역을 고려한 3개 중학교에서 상 · 하반으로 구분하여 6개 학급을 대상으로 설문조사를 실시하였다.

학생들은 "일상생활에서 계산능력이 요구되기 때문에", "수학과 관련된 직업에서 필요하시 때문에", "논리적 사고를 키울 수 있으므로", "모든 학문의 기초이기 때문에" 등의 이유로 수학은 꼭 필요한 과목으로 인식하고 있으나, 수학에 흥미를 갖지 못하는 이유에 대해서는 "어렵고 복잡하여", "재미가 없어서", "문제해결능력이 부족하여", "지구력이 부족하여", "교사의 지도방법에 문제가 있기 때문에" 등으로 답하였다. 또한, 많은 학생들은 현재의 학습량이 과다하다고 답하였는데, 이러한 문제를 해결하기 위하여 수준별 학습지도 및 수학학습지진아 지도를 위한 특별교재의 개발과 아울러 지도방법의 개선이 요구되고 있다.

그리고 영역별 난이도를 묻는 질문에서 가장 쉽다고 생각하는 영역은 '수와 식'(응답자의 36.0%), '방정식과 부등식'(26.2%)의 순서로 응답하였다. 어렵다고 생각하는 영역은 다음의 <표 1>에서 보는바와 같이 '도형'(응답자의 49.0%), '일차함수'(27.5%), '확률'(10.4%)의 순서로 답하였는데, 학교에 따라 응답비율은 상당한 차이가 있음을 알 수 있었다.

도형영역이 가장 어렵다고 생각하는 원인으로는 교수-학습방법상의 문제도 있을 수 있겠으나, 도형 그 자체가 추상적인 성질을 가지고 있어서 학습자가 도형의 본질적 구조 접근에 그 수준이 미치지 못하기 때문이라고 생각한다. 학교 밖에서 첨단의 지식과 정보를 마음껏 접하고 있는 학습자에게 주입식 교육, 획일적 교육을 통해서 교육내용을 전달하는 것은 흥미와 의욕을 잃어버리게 만든다. 논리적 사고력과 공간개념의 부족에서 도형영역을 어렵다

<표 1> 학생들이 느끼는 영역별 난이도

수 준 / 학 교 / 분 야	상 반				하 반				합계
	A 중학	B 중학	C 중학	소계	A 중학	B 중학	C 중학	소계	
수와 식	4 (10.8%)	3 (7.9%)	1 (2.6%)	8 (7.1%)	1 (2.5%)	3 (8.3%)	2 (5.1%)	6 (5.5%)	14명 (6.3%)
방정식과 부등·	3 (8.1%)	2 (5.3%)	1 (2.6%)	6 (5.3%)	2 (5.0%)	4 (11.1%)	3 (7.7%)	9 (8.3%)	15명 (6.8%)
일차함수	5 (13.5%)	7 (18.4%)	15 (38.5)	27 (23.9%)	10 (25.0%)	7 (19.4%)	17 (43.6%)	34 (31.2%)	61명 (27.5%
확률	7 (18.9%)	4 (10.5%)	6 (15.4%)	17 (15.0%)	1 (2.5%)	2 (5.6%)	3 (7.7%)	6 (5.5%)	23명 (10.4%
도형	17 (45.9%)	22 (57.9%)	16 (41.0%)	55 (48.7%)	20 (50.0%)	20 (55.6%)	14 (35.9%)	54 (49.5%)	109명 (49.0%
계(응답자 수)	36명	38명	39명	113명	34명	36명	39명	109명	222명

고 생각하므로 수학실험실에서의 다양한 수학 프로그램의 활용은 기하교육의 필수적 요소로 생각한다.

제 7차 수학과 교육과정의 특징은 개인차와 진로를 고려한 단계형, 심화보충형, 과목선택형 교육과정의 구성이라고 할 수 있으며, 아울러 정보화사회에 대비한 컴퓨터교육도 강화하여 학습자의 활동적인 수업을 강조하고, 계산기, 컴퓨터 등의 교구 환경에 중점을 두고 있다. 이러한 점에서도 도형의 본질적 구조학습에 시청각 프로그램의 활용은 더욱 요구되고 있다(교육부, 1997).

역동적 기하학습 소프트웨어인 Cabri II는 작도가 용이하고 작도를 한 후에 도형의 전체나 일부를 선택해서 끌기 기능을 사용하면 도형의 바뀌는 모양을 관찰할 수 있어서 학습자는 탐구하는 도형의 개념과 관련된 성질을 쉽게 이해할 수 있으며, 여러 도형의 성질을 변화시켜 봄으로써 도형에 대한 일반화 개념이 형성되는 것이 특징이다. 또한, 애니메이션 기능을 이용하면 학습자의 흥미와 호기심을 유발시켜 자발적인 학습능력과 도형에 대한 개념을 신장시키게 된다.

본 논문에서는 지필 환경과 함께 컴퓨터 환경에서 기하학습 소프트웨어인 Cabri II를 활용한 도형의 교수-학습 방안을 제시하여 학습자 스스로가 탐색, 탐구하여 얻은 지식을 자기 자신의 것으로 정립하여 후행 학습에 긍정적인 전이가 이루어질 수 있도록 하는데 있다. II장에서는 역동적 기하교육과 수학실험실 활동의 필요성, III장에서는 반힐의 5단계 지도방법에 따라 삼각형의 외심, 내심, 무게중심, 수심과 그들의 관계에 대해 Cabri II를 활용한 교수-학습 방안을 제시하였다.

Ⅱ. 수학실험실 활동을 통한 역동적 기하교육

1. 이론적 기초

반힐(van Hiele, 1986)은 기하학에 대한 사고수준에 따라 ① 0수준(시각적 인식 수준), ② 1수준(도형 분석적 수준), ③ 2수준(비형식적 추론 수준), ④ 3수준(형식적 추론 수준), ⑤ 4수준(기하학의 엄밀화)으로 구분하였다(신현성, 1995). 반힐이론의 핵심은 학생의 수준이나 발달단계에 따라 적당한 기하교육의 학습지도가 이루어져야 한다. 특히, 반힐은 기하교육의 주된 문제를 교사의 기대치와 학습자의 준비상태의 차이 때문이라고 생각하고 있다. 즉, 교사는 자기의 사고수준에서 학생들에게 설명하는데 비해서 학생들은 보다 낮은 수준에서 사고하므로 교사의 설명을 이해하기 힘들다고 한다. 따라서 교사는 학생수준을 파악하여 그들의 수준에서 풍부한 사고를 유발하도록 준비해야 하며, 학생들로 하여금 다음 단계의 수준으로 학습이 잘 전이되도록 교육과정을 구성하여야 한다는 것이 반힐의 주장이다. 일반으로 중등학교 기하교육의 목표는 학생들이 3수준 즉, 증명의 의미 이해에 도달하게 하는 것이라 할 수 있다(한태식, 1995). 학생이 기하의 증명에서 실패하는 이유는 하위수준의 학생에게 제3수준의 내용인 형식적 증명을 가르치기 때문이라고 할 수 있다. 이 때 학생들은 좌절, 불안 등의 심리적 요인을 안고 문제에 대해 진전을 보이지 못하게 된다는 것이다(우정호, 1998). 모든 학생이 같은 속도로 각 수준에 도달하는 것은 아니며, 수준의 상승은 교수-학습 방법의 적절성 여부에 따라 촉진 또는 지연될 수 있다(Clements & Battista, 1992). 증명 학습이 '증명'이라는 용어를 도입한다고 해서 의미 있게 이루어지는 것은 아니며 도형을 관찰하고 도형의 성질들을 학생들 스스로 분석하는 등의 다양한 경험을 토대로 했을 때 비로소 의미 있는 증명학습이 이루어진다는 것이다(나귀수, 1998). 증명학습을 통해 논리적 추론능력을 길러주고 반성적 사고를 개발하는 것이 증명 지도의 목적이 될 수 있을 것이다(서동엽, 1995). 이러한 점에서 어떻게 증명을 가르칠 것이냐의 문제는 매우 중요하다(류희찬・조완영, 1999).

방법적 측면뿐만 아니라 내용 면에서도 어떤 교수-학습자료를 선택하느냐에 따라 학습자의 수준이 달라진다고 본다. 다시 말하면, 학습자는 교수-학습방법과 학습자료에 따라 보다 높은 수준으로 상승될 수 있다는 것이다. 또한, 반힐은 사고수준의 상승을 위하여 다음 5단계 지도방법이 적절하다고 제안하고 있다(석용징・신현성・이준열, 1998).

① 1단계 지도(질문/정보)는 교사와 학생들이 학습목표를 확인하는 단계로, 교사는 과제

에 대해 과거에 배운 선행지식이 무엇인가를 확인하고, 학생들은 주어진 과제에 대하여 관찰하고 질문하며 어떻게 공부하는지 그 방향을 정한다.

② 2단계 지도(유도된 오리엔테이션)에서는 교사가 제시하는 짧은 발문으로 된 활동자료를 보여 주어 학생 스스로 과제를 탐구하게 한다.

③ 3단계 지도(설명)는 학생들의 토론을 통해 스스로 명료화되는 단계이다. 학생들로 하여금 경험, 관찰한 사항을 토론하게 하고, 교사는 학생의 토론활동을, 지켜본다.

④ 4단계 지도(자유로운 오리엔테이션)에서는 2단계에서 보다 더욱 복잡하고 까다로운 사고를 필요로 하는 과제를 제시하고 자신이 배운 지식을 종합적으로 적용하게 한다.

⑤ 5단계 지도(통합)에서는 학생 스스로 경험한 모든 단계를 종합하고 음미하게 한다.

학습자 수준에 맞는 수업을 진행하기 위하여 역동성이 필요하다. 역동적 기하교육의 이론적 기초인 구성주의는 “선행지식을 사용하여 새로운 과제에 접근하며 새로운 정보를 동화하고 자신의 의미를 구성할 때, 학습이 이루어진다”는 학습이론이다. 구성주의는 피아제(Piaget & Szeminska, 1960), 딘즈(Dienes, 1960) 등의 이론이 핵심이 되고 있는데, 피아제의 반영적 추상화는 물체에 대한 행동의 결과로부터의 추상화이다. 대부분의 모든 수학적 개념이나 지식의 이해에는 단순한 물리적 추상화로서는 가능하지 않으며, 반영적 추상화의 과정을 거쳐야 한다. 반영적 추상화는 두 가지 국면으로 이루어진다. 첫째는 상황을 높은 수준으로 투사하는 것이며, 둘째는 높은 수준으로 투사된 것을 재조직하는 것이다. 피아제는 반영적 추상화의 과정을 통해 획득된 지식을 논리-수학적 지식이라 하고, 물리적 추상화를 통한 지식을 물리적 지식이라 하였다. 논리-수학적 지식은 완성된 형태로 외부에서 주체에게 주어지는 것이 아니라 외부로부터의 대상을 새로운 차원에서 재조직함으로써 주체 스스로 앎을 구성함으로써 얻어진다.

딘즈의 학습원리는 다음 네 가지로 나뉘어진다. 첫째는 역동성의 원리이다. 새로운 개념에 대한 진정한 학습이 일어나기 위해서는 놀이 단계-구조적 활동의 단계-실세계로의 적용 등의 3단계를 통하지 않으면 안 된다. 둘째로 수학적 다양성의 원리이다. 이 원리는 지도하려는 내용의 핵심 부분은 그대로 두고 핵심이 아닌 부분을 다양하게 변형시켜야 한다는 것으로 학생들의 일반화 능력과 관련된다. 셋째로 구성의 원리이다. 수학적 아이디어가 구체적 대상 그 자체보다는 학습자가 대상에 부과하는 조작적인 활동에 대한 반성을 통해 수학적인 구조적 체계를 구성한 이후에 물리적 자료를 그 모델로 이용할 수 있다. 수학적 관계와 조작은 구체적 자료가 아닌 그것을 다루는 활동으로부터 추상화되는 것으로 간주된다. 넷째는 지각적 다양성의 원리이다. 지각적으로 다르지만 구조적으로는 동일한 다양한 구체적 형태를 통해 개념을 형성하여야 한다. 수학적 추상화는 고립된 유일한 패턴으로부터는

일어날 수 없으며, 여러 개의 관련된 모델에 공유된 구조적 유사성을 인식할 때 발생한다는 것이다(류희찬, 1998). 따라서 효과적인 기하교육을 수행하기 위하여, 학생 스스로 문제해결의 방법을 찾을 수 있도록 수학실험실 활동과 탐구용 수학 소프트웨어 활용이 가능한 교육환경이 필요하며, 교사는 다양한 교수-학습 방법과 학습자료의 개발을 위해 노력하여야 할 것이다.

2. 수학실험실 활동의 필요성

수학이 다른 학문과 구별되는 뚜렷한 성질 중의 하나는 연역적 체계를 가지고 있다는 점이다. 연역은 주어진 가정이나 이미 알고 있는 사실로부터 새로운 사실을 이끌어내는 추론 방법이다. 유클리드의 <원론>은 수학의 연역적 체계를 보여주는 대표적 저서이다. 정리의 증명은 우연한 결과가 아니라 수많은 시행착오 과정에서 어떤 순간적인 직관을 통해 이루어진다. 직관력은 천재성의 한 요소이기도 하지만, 중요한 것은 체계적인 탐구활동을 통해 얻어지는 정신력이라는 점이다. 수학은 양면성을 가지고 있어서, 하나의 수학적 사실을 발견하고 창조하기까지 과정은 귀납이고, 일단 발견된 사실을 증명하는 과정은 연역이다.

현재의 기하교육은 유클리드 기하의 형식적 취급만이 초점이 되어 있다. 기하교육의 주된 목적은 학생들의 기하학적 직관을 키우고, 논리적 추론능력을 향상시키는데 있다. 이를 위해서는 연역적 증명 활동만으로는 부족하므로 탐구, 추측하며 가설을 설정하는 비형식적 활동도 중요하다. 귀납은 여러 대상으로부터 어떤 공통적인 요소를 추출하는 능력이므로 학생에게 다양한 상황에서 탐구할 수 있도록 환경을 만들어 주어야 하므로 지필 환경을 개선하여야 한다. 컴퓨터 활용이 중심이 되는 수학실험실 활동은 지필 환경이 갖는 방법적인 한계를 극복해 준다. 즉, 수학실험실 활동을 통해 기하교육의 탐구활동을 강화시킬 수 있다. 실험실 활동은 학생들의 수업참여를 극대화시키고, 적절한 학습수준을 제시할 수 있으며, 새로운 수업방법을 도입하여 수학에 대한 관심과 태도를 증진시켜 준다(신동선・류희찬, 1998). 수학실험실의 운영은 학생 각자에게 활동적 학습을 권장하는 의미에서 학교교육에서 강조되는 활동에 속한다. 실험실 학습활동으로는 기능연습, 이해적용, 문제해결 등을 생각할 수 있다. 기하교육에서는 구체적 모형이나 컴퓨터 또는 소형계산기 활동이 강조되지만, 정규수업이 진행되는 교실에 이러한 보조자료 설치는 어려운 일이다. 정규시간에도 교사의 지도에 수학실험실에서 능동적으로 수학활동을 할 수 있는 소재를 택하여 흥미롭고, 직관적이며 구체적 방법으로 수학을 학습하는 기회를 마련해 주어야 한다.

3. 소프트웨어 활용의 장점과 한계

현재, 사용되는 수학학습 탐구형 소프트웨어로는 Spread Sheet, Mathematica, MathView, Matlab, MapleV, Excel, Geometric Supposer, Cabri II, Geometer's Sketchpad 등이 있다. 컴퓨터는 교사의 설명이나 기존의 방법으로 충분히 이해시키기 어려운 수학 개념이나 과제를 학습하는데 효과적으로 사용될 수 있다. 이를 위하여 교사는 적절한 소프트웨어를 활용하거나 개발하여 사용하여야 한다. 특히, Cabri II는 갈무리한 일련의 과정을 명시적으로 편집할 수 있는 상태로 만들어 준다는 점에서 새로운 차원의 학습환경을 제공하여 준다. Cabri II는 Geometric Supposer의 반복기능을 애니메이션의 형태로 대체하고 있다. 즉, 작도를 한 후, 도형의 전체 또는 일부를 선택하여 마우스로 그 부분을 잡아끌어 도형의 바뀌는 모습을 관찰하면서 계속 변형시켜 볼 수 있다. 그 움직임은 선택된 부분이 어떠한 작도 과정을 거쳤는가? 하는 논리적 순서에 따른다. 임의로 작도된 점은 자유롭게 움직이지만, 그 점을 한 끝점으로 작도된 선분은 점의 움직임에 철저히 의존하게 된다(신동선・류희찬, 1998). 변형되는 여러 도형으로부터 발견적 사고를 이끌어 낼 수 있으며, 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 조작으로 가능하다는 점에서 기하학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히, 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션을 통한 직관적 탐구활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

위와 같은 장점에도 불구하고 계산기나 컴퓨터의 사용이 어린 학생들에게 계산능력을 저하시킬 수 있음을 간과해서는 안될 것이다. 컴퓨터 활용의 제한점으로는 첫째, 컴퓨터가 CAI형태로 수학에 관련된 모든 내용을 프로그램으로 완전하게 소화해 낼 것이라고 보는 견해는 위험하다. 동기를 유발하고 학습내용을 심화시키며, 창의력을 제공하는 도구로서 컴퓨터의 활용이 극대화된다고 하더라도 제한적 교육과정이 될 수밖에 없다. 둘째로는 컴퓨터를 취급하는 교사의 기능이 요구된다. 컴퓨터는 기계에 불과하므로 컴퓨터를 운영하고 조작하는 교사의 중요성이 증대되기 때문이다.

III. Cabri II의 활용 예

이 장에서는 삼각형의 외심, 내심, 무게중심, 수심과 그들의 관계에 대하여, 제II장에서 소개한 반힐의 5단계 지도방법에 따라 Cabri II를 활용한 교수-학습 방안을 제시하고자 한다. 지필 환경에서 기본적인 내용을 지도한 후, 선행 지식을 가진 학습자에게 학습내용에

대한 명료화와 일반화가 이루어질 수 있도록 실험실 환경에서 다음 내용을 3차시에 걸쳐 학습자 스스로 조작하면서 탐구하도록 하여 사고수준을 향상시키고자 한다.

1. 삼각형의 외심

학습내용 : 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점, 외심에서 만나고 외심에서 꼭지점에 이르는 거리는 같다.

가. 1단계 지도 : 질문/정보

① 내접, 외접원, 외심의 용어에 대해 질문한다. 삼각형의 모든 꼭지점이 한 원 위에 있을 때, 삼각형은 그 원에 내접한다고 하고, 원을 주어진 삼각형의 외접원, 외접원의 중심을 외심이라한다.

② 삼각형의 외심을 그 삼각형의 각 변의 수직이등분선 위에 있다고 말할 수 있는가? 또한, 삼각형의 외심과 꼭지점을 연결한 선분의 길이는 같은가?

나. 2단계 지도 : 유도된 오리엔테이션 (<그림 1> 참조)

① **삼각형**을 선택하고 마우스로 세 점을 클릭하여 삼각형을 만든다.

② **도형의 이름**을 사용하여 세 꼭지점을 A, B, C라 붙인다.

③ **수직이등분선**을 사용해서 마우스로 세 변을 차례차례 클릭하여 세 변의 수직이등분선을 그린다. 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만남을 알 수 있다.

④ **교점**을 사용하여 외심을 찾고, 그 점을 **도형의 이름**으로 O라 붙인다.

⑤ **선분**을 사용하여 점 O와 세 꼭지점을 차례로 연결하여 선분을 그린다.

⑥ **거리와 길이**를 사용하여 $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ 의 길이를 잰다. 여기서, 외심에서 각 꼭지점에 이르는 거리가 같음을 알 수 있다.

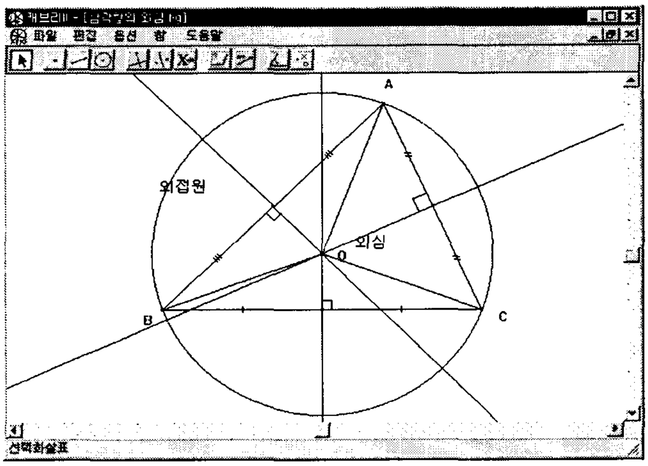
나. 3단계 지도 : 설명

① 원을 사용하여 점 O를 중심으로 외접원을 그린다.

② 삼각형의 모양(직각삼각형, 둔각삼각형, 예각삼각형)을 바꾸어 가며 외심의 위치를 탐구해서 토론해 보자.

· 직각삼각형인 경우에는 외심은 빗변의 중점에 위치한다.

· 둔각삼각형인 경우에 외심은 삼각형 밖에 위치한다.
· 예각삼각형인 경우의 외심은 삼각형 안에 위치한다.



<그림 1>

라. 4단계 지도 : 자유로운 오리엔테이션
다음 문제를 학생 스스로 조작하게 한 후, 자유토론을 실시한다.
삼각형의 모양이 바뀔 때, 외심의 자취를 탐구해 보자.

마. 5단계 지도 : 통합
· 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점, 외심에서 만났는가?
· 삼각형의 외심과 그 꼭지점을 연결한 선분의 길이는 같았는가?
· △ABC의 세 점 A, B, C는 한 원주 상에 있음을 알 수 있었는가?

2. 삼각형의 내심

학습내용 : 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점, 내심에서 만나고 내심에서 각 변에 이르는 거리는 같다.

가. 1단계 지도 : 질문/정보
① 외접, 내접원, 내심의 용어를 질문한다. 삼각형의 세 변이 모두 안쪽에 있는 한 원에

접할 때, 삼각형은 원에 외접한다고 하고, 이 원을 주어진 삼각형의 내접원, 내접원의 중심을 내심이라 한다.

② 삼각형의 내심은 그 삼각형의 세 내각의 이등분선 위에 있다고 말할 수 있는가? 또한, 삼각형의 내심과 삼각형 각 변에 이르는 거리는 같은가?

나. 2단계 지도 : 유도된 오리엔테이션 (<그림 2> 참조)

① 삼각형과 도형의 이름으로 △ABC를 그린다.

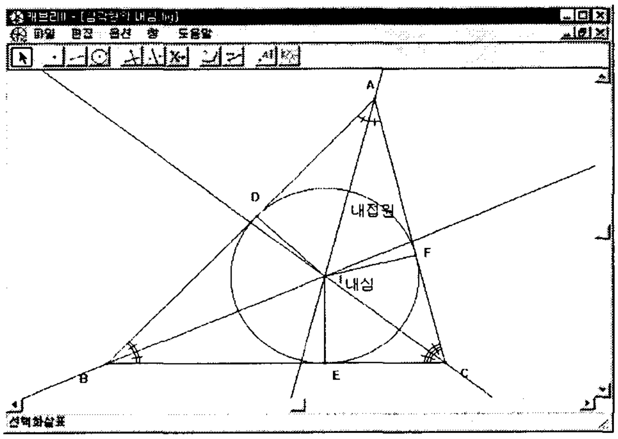
② 각의 이등분선으로 △ABC의 세 각의 이등분선을 그린다. 여기서 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다는 것을 알 수 있다.

③ 교점을 사용하여 세 각의 이등분선의 교점인 내심을 찾고, 도형의 이름으로 I라 붙인다.

④ 수직선을 사용하여 내심에서 각 변에 수직인 직선을 그린다.

⑤ 점과 도형의 이름을 사용하여 △ABC와 만나는 점을 D, E, F라 붙인다.

⑥ 거리와 길이를 사용하여 $\overline{ID}$, $\overline{IE}$, $\overline{IF}$의 길이를 잰다. 여기서, 내심에서 각 변에 이르는 거리가 같다는 것을 알 수 있다.



<그림 2>

다. 3단계 지도 : 설명

① 원을 사용하여 점 I를 중심으로 내접원을 그린다.

② 삼각형의 모양(직각삼각형, 둔각삼각형, 예각삼각형)을 바꾸어 가며 내심의 위치를

탐구해서 토론한다.

라. 4단계 지도 : 자유로운 오리엔테이션

다음 문제를 학생 스스로 조작하게 한 후, 자유토론을 실시한다.

- 삼각형의 모양이 바뀔 때 내심의 자취를 탐구해보자.
- 2단계 지도에서 주어진 △ABC와 내심 I에 대하여 ∠BIC의 크기를 구해보자.

마. 5단계 지도 : 통합

- 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점, 내심에서 만나는지 알아보자.
- 내심에서 각 변에 이르는 거리는 같은지 알아보자.
- 내심과 외심이 일치한 삼각형은 어떤 삼각형이 되는지 알아보자.
- 삼각형의 내심을 중심으로 하는 삼각형의 외접원이 가능한지 생각해 보자.

3. 삼각형의 외심, 내심, 무게중심, 수심과의 관계

먼저, 중선과 수선에 대한 개념을 알아보고 삼각형의 무게중심과 수심에 대해 탐구해 보자.

(1) 삼각형의 무게중심

학습내용 : 삼각형의 세 중선은 무게중심에서 만나고, 무게중심은 각 중선의 길이를 꼭지점으로부터 2 : 1로 나눈다.

가. 1단계 지도 : 질문/정보

중점, 중선, 무게중심의 용어를 질문한다.

삼각형의 각 꼭지점에서 대변에 내린 중선은 한 점에서 만나는가?

나. 2단계 지도 : 유도된 오리엔테이션

① 삼각형과 도형의 이름으로 삼각형의 꼭지점 A, B, C를 붙인다.

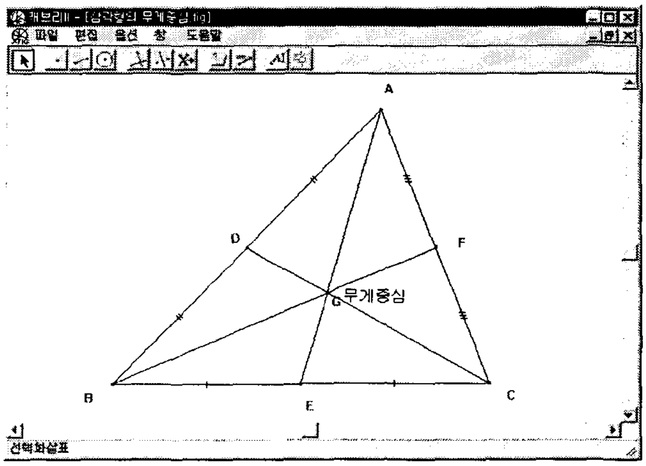
② 중점을 사용하여 세 선분 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$의 중점을 찾아 도형의 이름으로 세변의 중점을 D, E, F라 붙인다.

③ 속성바꾸기를 사용하여 $\overline{AD} = \overline{BD}$, $\overline{BE} = \overline{CE}$, $\overline{AF} = \overline{CF}$임을 확인해 본다.

④ 선분을 사용하여 점 A, B, C에서 대변의 중점에 선분을 긋는다.

⑤ 교점을 사용하여 세 중선이 만나는 무게중심을 찾고, 도형의 이름으로 G라 붙인다.

⑥ 거리와 길이를 사용하여 꼭지점에서 무게중심까지의 길이와 무게 중심에서 각 변의 중점까지의 길이를 재어보면 $\overline{AG}:\overline{GE} = 2:1$, $\overline{BG}:\overline{GF} = 2:1$, $\overline{CG}:\overline{GD} = 2:1$임을 확인한다.



다. 3단계 지도 : 설명

삼각형의 모양(직각삼각형, 둔각삼각형, 예각삼각형)을 바꾸어 가며, 무게중심의 위치를 탐구해서 토론한다.

라. 4단계 지도 : 자유로운 오리엔테이션

삼각형의 모양이 바뀔 때 무게중심의 자취를 탐구해보자.

마. 5단계 지도 : 통합

무게중심을 중심으로 하는 삼각형의 내접원이나 외접원이 가능한지 생각해 보자.

(2) 삼각형의 수심

학습내용 : 삼각형의 세 수선은 수심에서 만난다.

가. 1단계 지도 : 질문/정보

수선, 수심의 용어를 질문한다.

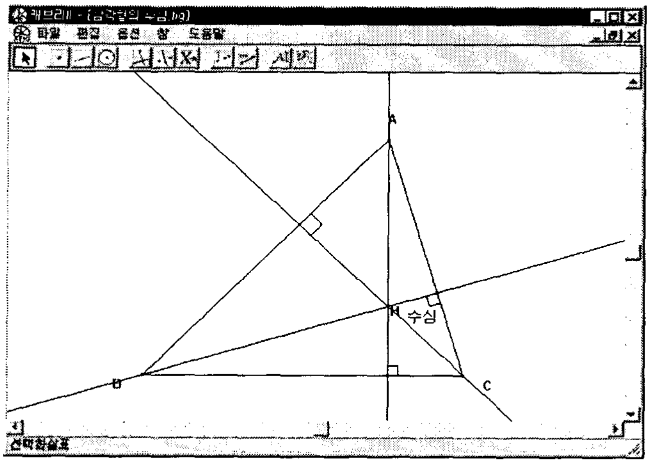
삼각형의 각 꼭지점에서 대변에 내린 수선은 한 점에서 만나는가?

나. 2단계 지도 : 유도된 오리엔테이션

① 삼각형과 도형의 이름으로 삼각형의 꼭지점 A, B, C를 붙인다.

② 수직선을 사용하여 점 A에서 $\overline{BC}$에 수직인 직선과, 점 B에서 $\overline{AC}$에 수직인 직선, 점 C에서 선분 $\overline{AB}$ 에 수직인 직선을 그린다.

③ 교점을 사용하여 세 수선이 만나는 점인 수심을 찾고, 도형의 이름으로 H라 한다.



다. 3단계 지도 : 설명

삼각형의 모양(직각삼각형, 둔각삼각형, 예각삼각형)을 바꾸어 가며, 수심의 위치를 탐구해서 토론한다.

라. 4단계 지도 : 자유로운 오리엔테이션

삼각형의 모양이 바뀔 때 수심의 자취를 탐구해보자.

마. 5단계 지도 : 통합

수심을 중심으로 하는 삼각형의 내접원이나 외접원이 가능한지 생각해 보자.

(3) 삼각형의 외심, 내심, 무게중심, 수심의 관계

가. 1단계 지도 : 질문/정보

① 외심, 내심, 무게중심, 수심의 용어를 상기시킨다.

② 삼각형의 외심, 내심, 무게중심, 수심의 관계를 살펴보기 전에 매크로로 정의하는 과정을 알아본다.

나. 2단계 지도 : 유도된 오리엔테이션

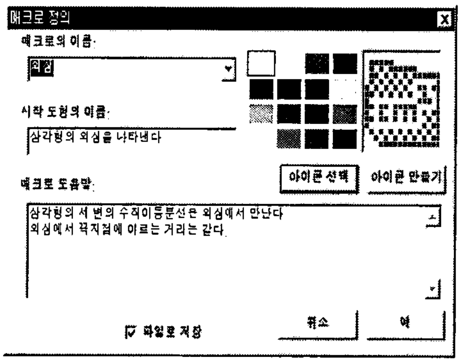
① 삼각형의 외심을 매크로로 정의한다. 외심이 작도되어 있는 삼각형에서 다음을 선택한다.

· X→ 시작 도형을 사용하여 삼각형을

· →Y 마지막 도형을 사용하여 외심을

· X→Y 매크로 정의를 사용하면 오른쪽과 같은 대화상자가 나타난다. 대화상자에 필요한 내용을 입력한 뒤 파일로 저장을 지정한다.

② 외심에서와 마찬가지로 내심, 무게중심, 수심에 대해서도 매크로로 정의한다.

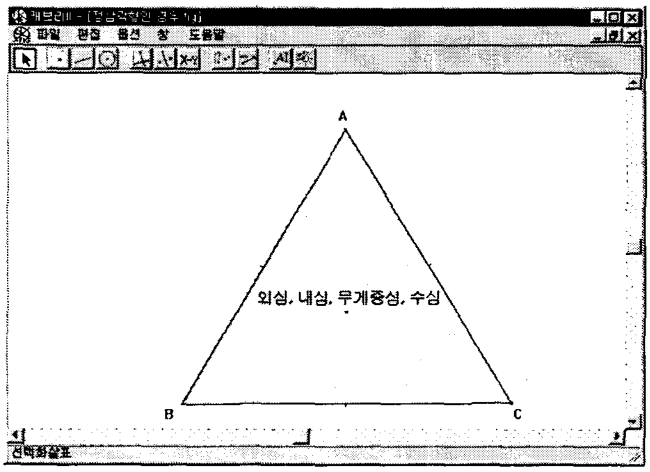


다. 3단계 지도 : 설명

특수한 삼각형에서 외심, 내심, 무게중심, 수심 등의 관계를 조사해 본다.

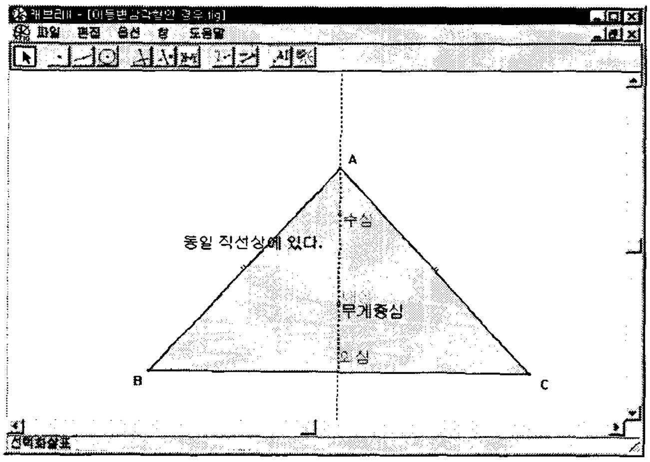
① 정삼각형

정삼각형에서는 외심, 내심, 무게중심, 수심이 모두 한 점에서 일치함을 확인 할 수 있다.



② 이등변삼각형

이등변삼각형의 각 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로 외심, 내심, 무게중심, 수심은 모두 꼭지각의 이등분선 위에 있다. 이를 공선으로 확인해 보자. 그리고 직각이등변삼각형에서는 모두 수직이등분선 위에 있음도 알 수 있다.



라. 4단계 지도 : 자유로운 오리엔테이션

일반 삼각형의 경우에 있어서 외심, 내심, 무게중심, 수심 등의 관계를 탐구해 보자.

마. 5단계 지도 : 통합

① 외심, 내심, 무게중심, 수심이 일치하는 삼각형에 대하여 알아보자.

② 외심, 내심, 무게중심, 수심이 꼭지각의 이등분선 위에 있는 삼각형에 대하여 알아보자.

③ 수직이등변삼각형에서는 어떻게 되는지 조사해 보자.

Ⅳ. 결론 및 제언

21세기 교육은 지난날의 획일적이고 통제적인 지식주입 위주의 교육에서 과감히 탈피하여 차별화 교육, 창의적 교육, 인성교육, 단계 수준별 교육, 통합교육 등을 통한 학생 개인과 집단에게 더욱 질 높은 교육을 실시하여 교육효과의 극대화를 도모하여야 한다. 수학학습에서의 컴퓨터의 활용은 주의력을 끌거나 동기를 유발하고 학습의 심화를 촉진시키며 창의력을 제공하는 도구로 사용되는 장점도 있지만, 컴퓨터라는 수단이 수학에 관련된 모든 내용을 프로그램으로 소화해 낼 수는 없다. 지나친 컴퓨터 사용은 선행지식이 없는 학습자에게는 매체에 종속되는 결과를 가져올 수도 있고, 때로는 오락적 측면이 부각될 수도 있으나, 컴퓨터 사용은 위계성이 매우 엄격한 수학교과에서 앞서 학습한 선행지식의 이해를 돕고, 논리를 중요시하는 기하교육에서 엄격한 연역적 구조로부터 발견적 사고를 이끌어 내어 논리적 추론능력을 향상시키는 효과적인 수단임은 틀림이 없다고 생각한다. 적절한 컴퓨터 사용을 위해서 교수-학습 프로그램을 다양하게 개발하여야 하고 기존의 프로그램을 학습자의 수준에 알맞게 재구성하여야 한다. 여기서 교사의 역할은 더욱 중요하다. 학습자 개개인의 인지수준을 파악하여 중재자로써 교사와 학습자가 함께 진행하는 수업을 이끌어야 하기 때문이다.

피아제, 딘즈 등의 수학교육 이론에서 보는바와 같이 학습은 선행지식을 가지고 수단을 통해 능동적으로 새로운 과제에 접근하며 새로운 정보를 동화하고 자기 자신의 의미를 구성할 때 효과적으로 이루어진다. 도형의 학습에 있어서도 지필 환경에서 도형의 기본개념을 학습한 이후에 컴퓨터를 이용한 실험실 환경에서 Cabri Ⅱ라는 기하학습 프로그램을 이용한 교수-학습 방안을 통하여 학습자 스스로 탐구하여 얻은 지식을 자신의 것으로 재정립하여 후행 학습에 긍정적인 전이가 이루어지도록 하여야 할 것이다.

학생들이 가장 어려워하는 도형영역 지도에서, 교사는 학습자의 수준에 알맞은 도형의 시각화를 통하여 도형 학습의 어려움을 완화시켜주는 교육이 필요하다. 기하 소프트웨어인 Cabri Ⅱ의 장점은 작도가 용이하고 다양한 예를 제시할 수도 있으며, 작도를 한 이후에는

도형의 전체 또는 일부를 선택해서 끌기 기능을 사용하여 도형의 모양이 바뀌는 모습을 관찰하면서 계속 탐구할 수 있다. 이러한 일련의 과정에서 학습자는 탐구한 도형의 개념과 그에 관련된 내용을 이해하게 되고 여러 도형의 성질을 역동적으로 변화시켜 조작함으로써 도형의 일반화 개념을 알 수 있게 된다.

본 논문에서 제시한 Cabri II라는 기하학습 프로그램을 활용한 교수-학습 방안이 다음의 관점에서 강조되었으면 한다.

첫째, 학습자 입장에서는 도형을 학습하는데 직관력과 호기심으로 그치지 않고, 그들 스스로 어떤 성질의 논리적 개념을 형성해가기 위한 탐구학습에 도움이 되었으면 한다.

둘째, 교사의 입장에서는 개인차를 고려한 단계형 수준별 교육과정에서 도형에 대한 그들의 인지수준을 재구성하여 발견학습의 고리 역할이 되었으면 한다. 시청각 교육을 통한 고리 역할이 이루어질 때, 학습자들은 도형에 대한 호기심에서 출발하여 기하학적 직관을 키우고 더 나아가 논리적 추론능력이 키워질 수 있을 것으로 생각한다.

참 고 문 헌

한국교육개발원(1997). 제 7차 교과교육과정 개발의 쟁점.

교육부(1997). 초・중등학교 교육과정, 교육부 고시 제1997-15호.

나귀수(1998). 중학교 기하의 증명 지도에 관한 소고-Van Hiele과 Freudenthal의 이론을 중심으로-. 대한수학교육학회 논문집, 18(1), pp. 291~298.

류희찬(1998). 컴퓨터를 활용한 수학교육의 이론과 실제. 대한수학교육학회 1998년 추계수학교육학연구발표대회 논문집, pp. 29-43.

류희찬・조완영(1999). Cabri II를 이용한 증명 교수학습 방법에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리지 E <수학교육 논문집> 제8집, pp. 17-32.

서동엽(1995). 증명지도의 목표와 수준에 대한 소고. 대한수학교육학회지, 5(1), pp. 203~215.

석용징・신현성・이준열(1998). 수학과 교재론. 서울 : 경문사.

신동선・류희찬(1998). 수학교육과 컴퓨터. 서울 : 경문사.

신현성(1995). 수학교육론. 서울 : 경문사.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

한태식(1995). Van Hiele 이론에 근거한 대표적 연구의 비교. 대한수학교육학회 논

문집, 5(1), pp. 29-37.

Clements. D. H., & Battista, M. T.(1992). Geometry and spatial reasoning. In D A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp.420-464). New York, NY: Macmillan Publishing Company.

Dienes. Z. P.(1960). *Building up mathematics*. Hutchinson Educational LTD.

Piaget, J. & Szeminska, A.(1960). *The child's conception of geometry*. Basic Books.

van Hiele, P. M.(1986). *Structure and insight: A theory of mathematic education*. Academic Press.

A Teaching-Learning Method of Figures Using Cabri II
- Focused on the theory of van Hiele -

Su-Jung Choi, Yong-Soo Pyo (Pukyong National University)

The teaching-learning methods of figures using computers make loose the difficulties of geometry education from the viewpoint that the abstract figures can be visualized and that by means of this visualization the learning can be accomplished through the direct experience or control.

In this thesis, we present a teaching-learning method of figures using Cabri II so that the learners establish their knowledge obtained through their search, investigation, supposition and they accomplish the positive transition to advanced learning. So the learners extend their ability of sensuous intuition to their ability of logical reasoning through their logical intuition.