

〈논 문〉

지지부 탄성효과를 고려한 회전 외팔 보의 진동해석

Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams Considering the Elastic Foundation Effect

윤 경 재* · 유 흥 희**

Kyung Jae Yun and Hong Hee Yoo

(2000년 8월 10일 접수 : 2000년 11월 13일 심사완료)

Key Words : Vibration Analysis(진동해석), Rotating Cantilever Beam(회전 외팔 보), Elastic Foundation Effect(지지부 탄성효과), Dynamic Buckling(동적 좌굴), Coupling Effect(연성효과)

ABSTRACT

This paper presents a modeling method for the vibration analysis of rotating cantilever beams considering the elastic foundation effect. Mass and stiffness matrices are derived explicitly by considering coupling effect between stretching and bending motion. Numerical results show that the bending direction elastic foundation stiffness influences the vibration characteristics significantly in practical range of beam configuration. The ranges of elastic foundation stiffness to avoid the dynamic buckling are also presented. The method presented in this paper can be used to predict the variations of natural frequencies of rotating cantilever beams with elastically restrained root.

1. 서 론

회전 외팔보는 실제 많은 기계 구조물, 예를 들면 터빈 블레이드, 헬리콥터 회전익, 인공위성 안테나 등에서 발견할 수 있다. 이러한 구조물의 동적 특성 및 진동 특성을 연구하는 일은 기계시스템의 성능을 향상시키기 위해서는 반드시 선행되어야 할 중요한 일이라 할 수 있다.

회전외팔보는 대부분 지지단부분의 탄성효과를 고려하지 않고 단순히 고정지지단으로 모델링하여 연구되었다. 그런데 이러한 연구가 계속 진행되면서, 보의 지지단을 탄성지지조건으로 고려할 필요성이 요구됨에 따라 탄성지지단을 고려한 연구가 진행되었다. 회전하는 외팔보의 탄성지지효과를 고려한 연구는 1956년 Boyce⁽¹⁾가 최초로 탄성지지단을 갖는 회전하는 균질한 bar의 진동에 관한 해석적 방법을 제시하였으며, 1986년 Afolabi, D.⁽²⁾가 Root부분의 복

원력을 고려한 블레이드의 고유진동수의 연구를 하였다. 그리고 1994년에는 S.Y.Lee 등⁽³⁾이 탄성지지단을 갖는 회전하는 티모센코 보의 굽힘진동해석을 연구하였다. 하지만 지금까지의 연구들은 지지단 강성 모델링이 y방향과 θ 방향만을 고려하는 형태였으며, 보의 인장모드와 굽힘모드가 서로 연관되어 나타나는 연성효과(coupling effect)를 고려하지 않고 단지 굽힘모드만을 고려하여 모델링과 해석을 수행하여왔다. 연성효과를 고려하는 경우는 연성효과가 외팔 보의 회전각속도에 비례하여 자이로 항으로 나타나면서 고유진동수에 영향을 주게 된다. 그리고 보가 어느 이상의 각속도로 회전하면 동적 좌굴(dynamic buckling)이 발생하게 되는데 이에 관한 연구는 아직 이루어지지 않았다. 본 논문에서는 이러한 기존 논문에서는 고려하지 않았던 내용들을 고려하여 연구를 수행하여 그 해석결과를 제시하는 것을 연구목표로 한다. 즉, 보의 지지단 부분을 x, y 방향 선형 스프링과 θ 방향 회전스프링을 갖는 탄성 지지단으로 모델링하여 각 방향의 강성특성이 회전 각속도에 따라 회전 외팔 보의 진동특성에 어떠한 영향을 미치는지를 조사하고자 한다. 그리고 연성효과를 고려한 진동해석

* 정회원, 한양대학교 대학원

** 정회원, 한양대학교 기계공학과

모델링을 통하여 연성효과를 고려하지 않은 경우와의 차이를 비교 제시하고자 한다. 끝으로 외팔 보가 회전하고 있을 때 회전 각속도의 크기에 따라 동적 좌굴을 피하기 위해서는 각 방향의 강성이 어느 범위의 크기를 가져야 하는지 수치해석을 통해 구하여 제시하였다.

2. 운동 방정식

2.1 모델링을 위한 가정

본 연구에서는 다음의 가정들을 사용하였다. 첫째, 보는 균질하고 등방성이며 단면은 대칭으로 일정하다. 둘째, 전단효과와 단면관성효과(rotary inertia effect)는 고려하지 않는다. 즉, 오일러의 가정 및 보 이론을 사용한다. 이는 탄성지지 효과 및 연성 효과가 고유진동수에 미치는 영향에 연구의 초점을 맞추기 위해서이다. 셋째, 보는 회전평면내의 변형만 일어난다고 가정한다. 즉 면내 굽힘 운동만을 다룬다.

2.2 운동 방정식의 유도

Fig. 1은 각속도 Ω 로 회전하는 축 A에 부착된 외팔 보의 형상을 보여주고 있다. 지지단은 그 탄성효과를 고려하기 위하여 K_x, K_y, K_θ 의 강성을 갖는 스프링으로 모델링 하였으며 \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 는 기준틀 A에 부착된 단위 벡터들을, 그리고 $\hat{\delta}_1$ 과 $\hat{\delta}_2$ 는 보의 좌측 단면을 나타내는 기준틀 B에 부착된 단위 벡터들을 나타낸다. O는 축 A에 고정된 점을 나타내며, O*는 보의 좌측 단면상의 점을 나타낸다. 그리고 O와 O*는 탄성변형이 없을 때 서로 일치한다. 외팔 보의 탄성 변형 전 임의의 질점 P₀는 탄성 변형 후 P의 위치로 움직인다. P₀로부터 P까지의 거리를 \vec{u} 라 하면 u_1 과 u_2 는 각각 \vec{u} 의 $\hat{\delta}_1$ 과 $\hat{\delta}_2$ 방향 변위를 나

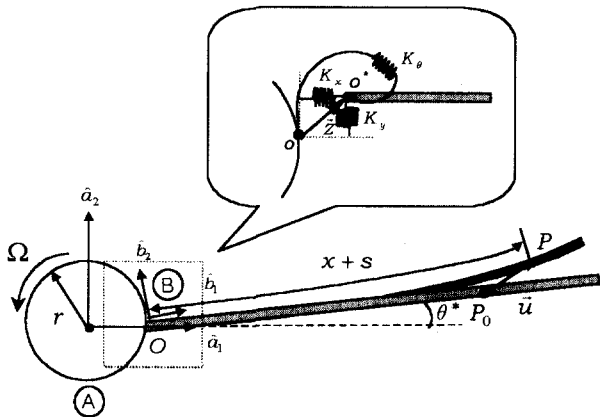


Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam with an elastically restrained root

타낸다. x 는 점 O*로부터 P₀까지의 거리를 나타내며 s 는 인장변위를 나타낸다. 지지단의 탄성 변형량을 x^*, y^*, θ^* 라 할 때, 기준 틀 B의 각속도와 O*의 속도는 다음과 같다.

$$\vec{w}^B = (\Omega + \dot{\theta}^*) \hat{a}_3 \quad (1)$$

$$\vec{v}^{O^*} = (\dot{x}^* - \Omega y^*) \hat{a}_1 + (\dot{y}^* + \Omega(x + x^*)) \hat{a}_2 \quad (2)$$

이 때 점 P의 속도 \vec{v}^P 및 가속도 \vec{a}^P 는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^{O^*} + \frac{Bd}{dt} (\vec{u}) + \vec{w}^B \times (x \hat{\delta}_1 + \vec{u}) \quad (3)$$

$$\vec{a}^P = \frac{Bd}{dt} (\vec{v}^P) + \vec{w}^B \times \vec{v}^P \quad (4)$$

모드방법을 이용해 상미분 운동방정식을 구하기 위해서 인장변수 s 와 횡방향 변위 u_2 는 다음과 같이 근사화 한다.

$$s = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \quad (5)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \quad (6)$$

여기서 $\phi_{1j}(x), \phi_{2j}(x)$ 는 인장과 굽힘방향 가상모드 함수들, $q_{1j}(t)$ 와 $q_{2j}(t)$ 는 시간의 함수인 일반좌표들, 그리고 μ_1 과 μ_2 는 일반좌표의 총 개수이다. u_1 대신 s 를 근사화하므로 식 (3)에 나타난 u_1 및 그의 시간에 관한 미분값은 모두 s 와 u_2 로 표시되어야 하므로, u_1 과 s 및 u_2 사이의 관계식으로 표현되어야 한다. 이를 위해서 참고문헌 (4)에 제안된 기하학적 제한조건이 사용되는데 그것은 다음과 같다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{du_2}{d\sigma} \right)^2 d\sigma \quad (7)$$

외력이 작용하지 않는 보에 대해 Kane의 방법을 따른 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\int_0^L \rho \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_i} \right) \cdot \frac{d\vec{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (8)$$

여기서 L 과 ρ 는 보의 길이와 단위 길이 당 질량을 각각 의미하며 q_i 는 일반좌표인 q_{1i} 와 q_{2i} 그리고 x^*, y^*, θ^* 로 이루어지며 μ 는 일반좌표의 총 개수로 $\mu_1 + \mu_2 + 3$ 이 된다.

U 는 보의 탄성에너지로 다음과 같이 표시된다.

$$U = U_E + U_P \quad (9)$$

여기서

$$U_E = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (10)$$

$$U_P = \frac{1}{2} K_x x^*{}^2 + \frac{1}{2} K_y y^*{}^2 + \frac{1}{2} K_\theta \theta^*{}^2 \quad (11)$$

여기서 E 는 영의 계수, A 는 보의 단면적, I 는 보의 2차 면적 모멘트, 그리고 K_x , K_y , K_θ 는 x , y , θ 방향 지지단 강성을 나타낸다. 회전 외팔보의 운동방정식은 이상의 과정을 종합하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$-\sum_{j=1}^{\mu_1} \left[M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + P_{1j} \ddot{x}^* - 2\Omega \left(M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} + P_{1j} \dot{y}^* + Q_{1j} \dot{\theta}^* \right) - (\Omega^2 M_{ij}^{11} - K_{ij}^s) q_{1j} - \Omega^2 P_{1j} x^* \right] \quad (12)$$

$$= -\Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} (P_{1j} + Q_{1j})$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + P_{2j} \ddot{y}^* + Q_{2j} \ddot{\theta}^* + 2\Omega M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + 2\Omega P_{2j} \dot{x}^* + (r\Omega^2 K_{ij}^{GA} + \Omega^2 K_{ij}^{GB} - \Omega^2 M_{ij}^{22} + K_{ij}^B) q_{2j} - \Omega^2 P_{2j} y^* + r\Omega^2 P_{2j} \theta^* \right] = 0 \quad (13)$$

$$-\sum_{j=1}^{\mu_1} P_{1j} \ddot{q}_{1j} - \rho L \ddot{x}^* + 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_2} P_{2j} \dot{q}_{2j} + 2\Omega \rho L \dot{y}^* + \rho L^2 \Omega \dot{\theta}^* + \Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} P_{1j} q_{1j} + (\rho L \Omega^2 - K_x) x^* \quad (14)$$

$$= -\rho L r \Omega^2 - \frac{1}{2} \rho L^2 \Omega^2$$

$$-\sum_{j=1}^{\mu_2} P_{2j} \ddot{q}_{2j} - \rho L \ddot{y}^* - \frac{1}{2} \rho L^2 \ddot{\theta}^* - 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_1} P_{1j} \dot{q}_{1j} - 2\Omega \rho L \dot{x}^* + \Omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} P_{2j} q_{2j} + (\rho L \Omega^2 - K_y) y^* \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho L^2 \Omega^2 \theta^* = 0$$

$$-\sum_{j=1}^{\mu_2} Q_{2j} \ddot{q}_{2j} - \frac{1}{2} \rho L^2 \ddot{y}^* - \frac{1}{3} \rho L^3 \ddot{\theta}^* - 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_1} Q_{1j} \dot{q}_{1j} - \rho L^2 \Omega \dot{x}^* - \sum_{j=1}^{\mu_2} r\Omega^2 P_{2j} q_{2j} \quad (16)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho L^2 \Omega^2 y^* - \left(\frac{1}{2} \rho r L^2 \Omega^2 \theta^* + K_\theta \right) \theta^* = 0$$

여기서

$$M_{ij}^{ab} = \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx \quad (17)$$

$$K_{ij}^s = \int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (18)$$

$$K_{ij}^B = \int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \quad (19)$$

$$K_{ij}^{GA} = \int_0^L \rho (L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (20)$$

$$K_{ij}^{GB} = \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (21)$$

$$P_{ai} = \int_0^L \rho \phi_{ai} dx \quad (22)$$

$$Q_{ai} = \int_0^L \rho x \phi_{ai} dx \quad (23)$$

2.3 진동 방정식

앞에서 유도된 운동방정식들을 무차원화 하기 위해 다음과 같은 무차원 변수와 매개변수들을 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (24)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (25)$$

$$q_j^* \equiv \frac{q_j}{L} \quad (26)$$

$$\delta \equiv \frac{r}{L} \quad (27)$$

$$a^* \equiv \frac{x^*}{L} \quad (28)$$

$$\beta^* \equiv \frac{y^*}{L} \quad (29)$$

$$\lambda \equiv \left(\frac{AL^2}{I} \right)^{1/2} \quad (30)$$

$$\gamma \equiv T\Omega \quad (31)$$

$$K_x^* \equiv \frac{K_x}{\left(\frac{EA}{L} \right)} \quad (32)$$

$$K_y^* \equiv \frac{K_y}{\left(\frac{EI}{L^3} \right)} \quad (33)$$

$$K_\theta^* \equiv \frac{K_\theta}{\left(\frac{EI}{L} \right)} \quad (34)$$

여기서

$$T \equiv \left(\frac{\rho L^4}{EI} \right)^{1/2} \quad (35)$$

식 (24)~(35)을 이용하면 다음과 같은 무차원 진동 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\bar{M}_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j}^* + \bar{P}_{1j} \ddot{a}^* - 2\gamma \left(\bar{M}_{ij}^{12} \dot{q}_{2j}^* + \bar{P}_{1j} \dot{\beta}^* + \bar{Q}_{1j} \dot{\theta}^* \right) + (\lambda^2 \bar{K}_{ij}^s - \gamma^2 \bar{M}_{ij}^{11}) q_{1j}^* - \gamma^2 \bar{P}_{1j} a^* \right] = \gamma^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} (\bar{P}_{1j} + \bar{Q}_{1j}) \quad (36)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\bar{M}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j}^* + \bar{P}_{2j} \ddot{\beta}^* + \bar{Q}_{2j} \ddot{\theta}^* + 2\gamma \bar{M}_{ij}^{21} \dot{q}_{1j}^* + 2\gamma \bar{P}_{2j} \dot{a}^* + \gamma^2 (\delta \bar{K}_{ij}^{GA} + \bar{K}_{ij}^{GB} - \bar{M}_{ij}^{22} + \bar{K}_{ij}^B) q_{2j}^* - \gamma^2 \bar{P}_{2j} \beta^* + \delta \gamma^2 \bar{P}_{2j} \theta^* \right] = 0 \quad (37)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} \widetilde{P}_{1j} \ddot{q}_{1j}^* + \ddot{\alpha}^* - 2\gamma \sum_{j=1}^{\mu_2} \widetilde{P}_{2j} \ddot{q}_{2j}^* - 2\gamma \dot{\beta}^* - \gamma \dot{\theta}^* - \gamma^2 \sum_{j=1}^{\mu_1} \widetilde{P}_{1j} \dot{q}_{1j}^* + (K_x^* - \gamma^2) \alpha^* = \delta\gamma + \frac{1}{2} \gamma^2 \quad (38)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \widetilde{P}_{2j} \ddot{q}_{2j}^* + \ddot{\beta}^* + \frac{1}{2} \ddot{\theta}^* + 2\gamma \sum_{j=1}^{\mu_1} \widetilde{P}_{1j} \dot{q}_{1j}^* + 2\gamma \dot{\alpha}^* - \gamma^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \widetilde{P}_{2j} \dot{q}_{2j}^* + (K_y^* - \gamma^2) \beta^* - \frac{1}{2} \gamma^2 \theta^* = 0 \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} \widetilde{Q}_{2j} \ddot{q}_{2j}^* + \frac{1}{2} \ddot{\beta}^* + \frac{1}{3} \ddot{\theta}^* + 2\gamma \sum_{j=1}^{\mu_1} \widetilde{Q}_{1j} \dot{q}_{1j}^* + \dot{\alpha}^* + \sum_{j=1}^{\mu_2} \delta\gamma^2 \widetilde{P}_{2j} \dot{q}_{2j}^* - \frac{1}{2} \gamma^2 \dot{\beta}^* + (K_\theta^* + \frac{1}{2} \delta\gamma^2) \theta^* = 0 \quad (40)$$

여기서

$$\widetilde{M}_{ij}^{ab} = \int_0^1 \psi_{ai} \psi_{bj} d\xi \quad (41)$$

$$\widetilde{K}_{ij}^s = \int_0^1 \psi_{1i, \xi} \psi_{1j, \xi} d\xi \quad (42)$$

$$\widetilde{K}_{ij}^B = \int_0^1 \psi_{2i, \xi\xi} \psi_{2j, \xi\xi} d\xi \quad (43)$$

$$\widetilde{K}_{ij}^{GA} = \int_0^1 (1 - \xi) \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \quad (44)$$

$$\widetilde{K}_{ij}^{GB} = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \quad (45)$$

$$\widetilde{P}_{ai} = \int_0^1 \psi_{ai} d\xi \quad (46)$$

$$\widetilde{Q}_{ai} = \int_0^1 \xi \psi_{ai} d\xi \quad (47)$$

여기서 대응하는 x 와 ξ 에 대해 $\psi_{ki}(\xi)$ 는 $\phi_{ki}(x)$ 의 값과 동일하다. 식 (36)~(40)는 하나의 행렬 방정식 형태로 다음과 같이 표기될 수 있다.

$$[M]\{\dot{\Phi}\} + [C]\{\dot{\Phi}\} + [K]\{\Phi\} = \{F\} \quad (48)$$

여기서

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \{q_1^*\} \\ \{q_2^*\} \\ \alpha^* \\ \beta^* \\ \theta^* \end{Bmatrix} \quad (49)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [\widetilde{M}_{11}] & \{0\} & \{\widetilde{P}_1\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & [\widetilde{M}_{22}] & \{0\} & \{\widetilde{P}_2\} & \{\widetilde{Q}_2\} \\ \{\widetilde{P}_1\}^T & \{0\} & 1 & 0 & 0 \\ \{0\} & \{\widetilde{P}_2\}^T & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \{0\} & \{\widetilde{Q}_2\}^T & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \{0\} & -2\gamma\{\widetilde{M}_{12}\} & \{0\} & -2\gamma\{\widetilde{P}_1\} & -2\gamma\{\widetilde{Q}_1\} \\ 2\gamma\{\widetilde{M}_{21}\} & \{0\} & 2\gamma\{\widetilde{P}_2\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & -2\gamma\{\widetilde{P}_2\}^T & 0 & -2\gamma & -\gamma \\ 2\gamma\{\widetilde{P}_1\}^T & \{0\} & 2\gamma & 0 & 0 \\ 2\gamma\{\widetilde{Q}_1\}^T & 0 & \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -\gamma[\widetilde{K}_{11}] & \{0\} & -\gamma^2\{\widetilde{P}_1\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & (\gamma[\widetilde{K}_{22}] + \gamma^2([\widetilde{K}_{21}^{GA}] + [\widetilde{K}_{21}^{GB}] - [\widetilde{M}_{22}])) & \{0\} & -\gamma^2\{\widetilde{P}_2\} & \delta\gamma^2\{\widetilde{P}_2\} \\ -\gamma^2\{\widetilde{P}_1\}^T & \{0\} & K_x^* - \gamma^2 & 0 & 0 \\ \{0\} & -\gamma^2\{\widetilde{P}_2\}^T & 0 & K_y^* - \gamma^2 & -\frac{1}{2} \gamma^2 \\ \{0\} & \delta\gamma^2\{\widetilde{P}_2\}^T & 0 & -\frac{1}{2} \gamma^2 & K_\theta^* + \frac{1}{2} \delta\gamma^2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

식 (51)을 보면 행렬 $[C]$ 는 비대칭 형태를 가지는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 고유치 해석을 위해서 복소모드 해석법을 사용하였다. 이를 위해 식 (48)을 다음과 같이 변환한다.

$$[M]^*\{Z\} + [K]^*\{Z\} = \{F\} \quad (53)$$

여기서

$$[M]^* = \begin{bmatrix} \{0\} & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$[K]^* = \begin{bmatrix} -[M] & \{0\} \\ \{0\} & [K] \end{bmatrix} \quad (55)$$

복소모드 해석을 위해 열행렬 $\{Z\}$ 를 다음과 같이 변수 분리한다.

$$\{Z\} = e^{\lambda t} \{\Theta\} \quad (56)$$

여기서 λ 는 복소수값의 고유치이고 Θ 는 모드형상을 나타내는 열행렬이다. 식 (56)을 (53)에 대입하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\lambda[M]^*\{\Theta\} + [K]^*\{\Theta\} = \{0\} \quad (57)$$

복소모드 해석방법을 적용해서 구해진 고유치는 복소수 값을 갖는데 허수 부의 값으로부터 고유진동수를 구할 수 있다.

3. 수치 해석

본 연구에서는 회전 외팔보의 가장 낮은 고유진동수들이 충분히 수렴된 결과를 얻기 위해서 고정된 외팔보의 인장 모드들과 굽힘모드 각각 10개를 가상모드로 하여 수치해석

을 수행하였다. Table 1은 지지단의 탄성을 고려한 경우가 기존의 고정지지 모델링의 경우에 비해 1차 고유진동수가 어떠한 차이가 있는지를 축 반경비 δ 와 회전각속도 γ 의 변화에 따라 알아보았다. 여기서 무차원 변수들은 $\alpha=70$, K_x^* , K_y^* , $K_\theta^*=10^5$ 으로 하였다. 축 반경비가 클수록 그리고 회전각속도가 증가할수록 두 결과간의 차이가 더 커지는 것을 관찰 할 수 있다. Table 1에서 (FIX)는 고정지지단의 결과를, (E)는 탄성지지단의 결과를 나타내며 고정지지단은 참고문헌 (5)의 결과를 나타낸다.

Table 1 Analysis of the first natural frequencies between fixed and elastically restrained root

	$\gamma=2$	$\gamma=10$	$\gamma=50$
$\delta=0$	3.62 (FIX)	4.97 (FIX)	7.55 (FIX)
	3.62 (E)	4.95 (E)	5.60 (E)
$\delta=1$	4.40 (FIX)	13.05 (FIX)	41.38 (FIX)
	4.40 (E)	13.01 (E)	38.85 (E)
$\delta=5$	6.64 (FIX)	27.28 (FIX)	74.19 (FIX)
	6.64 (E)	27.14 (E)	67.91 (E)

Table 2 The range of elastic stiffness in practical systems according to hub-ratio and thickness ratio

$\delta = 0.1$			
ϵ	K_x^*	K_y^*	K_θ^*
0.05	1.290×10^6	1.110×10^6	8.340×10^5
0.067	2.250×10^6	1.650×10^6	1.310×10^6
0.1	3.390×10^6	2.880×10^6	5.7519×10^4
0.2	4.630×10^6	4.060×10^6	3.730×10^6
$\delta = 1$			
ϵ	K_x^*	K_y^*	K_θ^*
0.05	3.710×10^5	3.070×10^5	2.790×10^5
0.067	4.780×10^5	4.690×10^5	4.250×10^5
0.1	5.360×10^5	4.980×10^5	4.880×10^5
0.2	8.150×10^5	6.560×10^5	5.940×10^5
$\delta = 10$			
ϵ	K_x^*	K_y^*	K_θ^*
0.05	8.300×10^4	7.330×10^4	5.750×10^4
0.067	1.210×10^5	9.990×10^4	8.900×10^4
0.1	1.870×10^5	1.670×10^5	1.570×10^5
0.2	2.660×10^5	2.330×10^5	2.100×10^5

실제적으로 의미가 있는 지지단 강성의 크기를 상용 해석 프로그램인 ANSYS를 이용하여 구해보았으며 그 결과는 Table 2와 같다. ANSYS에서 반경 r 인 hub에 길이 L , 두께 t 를 갖는 외팔보가 고정되어있는 형태로 모델링을 하였으며, 지지단 부분에 x, y 방향의 힘과 θ 방향의 모멘트가 작용할 때, 그에 따른 각 방향의 변형된 값 $\delta_x, \delta_y, \delta_\theta$ 를 통해 각 방향의 스프링 강성 K_x, K_y, K_θ 를 구할 수 있다. 이와 같이 구한 스프링의 강성들을 식 (32)~(34)의 무차원화 과정을 통해서 K_x^*, K_y^*, K_θ^* 를 구하였다. 이 때 일반적인 경우의 결과를 얻어내기 위해서 새로운 무차원 변수인 보의 두께 비를 다음과 같이 정의하였다.

$$\epsilon = \frac{t}{L} \tag{58}$$

Table 2는 축 반경 비와 두께 비의 변화에 따른 강성들의 범위를 나타낸 것이다. 이 결과에 근거하여 실제 의미가 있는 지지단 강성들의 크기가 $10^4 - 10^6$ 에 있음을 확인할 수 있었다. 따라서 본 연구에서의 수치해석은 무차원화된 지지단의 강성 K_x^*, K_y^*, K_θ^* 의 값들을 $10^4 - 10^6$ 의 범위로 하여 수행하였다. 이 범위에서 매개변수를 변화시키며 수치해석을 수행한 결과 회전 외팔보의 고유진동수에 결정적인 영향을 미치는 지지단의 강성은 K_y^* 임을 확인할 수 있었다. 예를 들어 인장 및 굽힘 방향 무차원 지지단 강성 K_x^* 와 K_y^* 가 서로 같은 경우 이 강성들을 무차원화 식 (32)~(34)를 통해서 차원화 시키면 K_x 가 K_y 보다 훨씬 큰 값을 갖는다는 것을 확인할 수 있다. 이는 x 방향이 y 방향에 비해 상대적으로 더 큰 구속적 효과를 갖는다는 것을 의미한다. 즉, 무차원화된 강성의 크기가 서로 같은 경우라면 K_x 가 K_y 보다 더 고정지지단에 가까운 효과를 나타낸다는 것이며, 바꾸어 말하면 탄성 지지단의 경우에는 K_y 가 K_x 보다 더 큰 영향을 미칠 수 있다는 것을 나타내는 것이다. Fig. 2는 K_y^* 의 크기에 따른 회전 외팔보의 고유진동수에 미치는 영향을 보여주는 데, 지지단의 강성 K_y^* 가 10^5 이상일 경우에는 그 영향이 거의 일정하나 그 이하의 범위 즉, $10^4 - 10^5$ 에서는 고유진동수 변화에 상당한 영향을 미치는 것을 확인할 수가 있었다. 좀 더 자세히는, $1 \times 10^4 - 4 \times 10^4$ 의 범위에서는 비교적 많은 차이를 보이지만 6×10^4 이상에서는 그 차이의 폭이 많이 줄어들어 결국은 고정지지단의 결과에 수렴하는 것을 확인할 수가 있다. 또한 이 그림이 보여주듯이 γ 가 계속해서 증가하면 결국에 고유진동수가 0이 되는

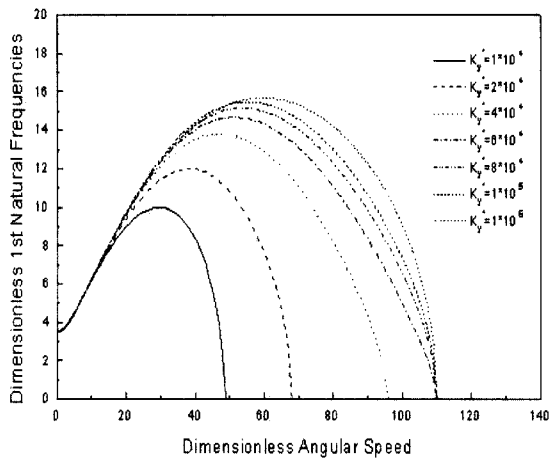


Fig. 2 Variations of dimensionless 1st natural frequency vs. K_y^*

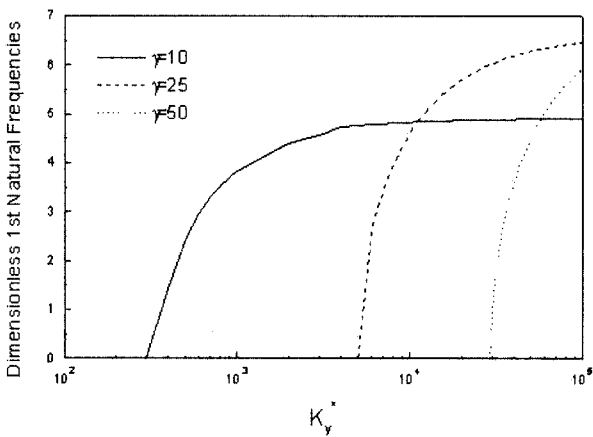


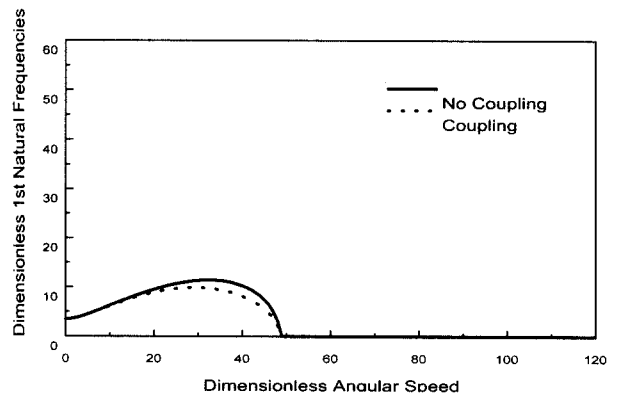
Fig. 3 Magnitude of y-direction stiffness and dynamic buckling

현상이 발생하는데 이를 동적 좌굴이라 부른다. 그리고 Fig. 3을 통해 동적 좌굴을 피하기 위해서는 어느 정도의 지지단 강성을 가져야 할 것인지를 알 수가 있다. Fig. 3은 γ 의 증가에 따라 동적 좌굴을 피하려면 K_y^* 의 강성의 값이 크게 증가해야 함을 보여주고 있다. Table 3은 각각의 경우에 대하여 왼쪽 열은 $K_x^* = K_\theta^* = 10^5$, 중간 열은 $K_y^* = K_\theta^* = 10^5$, 오른쪽 열은 $K_x^* = K_y^* = 10^5$ 의 값들을 가질 때 동적 좌굴을 피하기 위한 강성의 값들을 보여준다. 즉 Table 3은 동적 좌굴을 피하기 위한 지지단의 강성들의 크기를 좀 더 자세히 나타낸 것이다. 여기서 확인할 수 있듯이 동적 좌굴을 피하기 위해서 물리적으로 의미가 있는 지지단 강성의 크기 $10^4 - 10^6$ 의 범위에서는 K_y^* 가 지배적인 영향을 미치며, K_x^*, K_θ^* 는 별 영향을 미치지 못한다는 것을 확인할 수 있다.

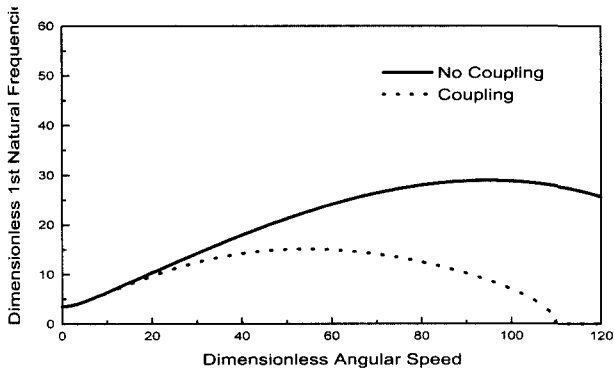
Table 2와 Table 3에 대해서 좀 더 구체적으로 살펴보면, Table 2는 ANSYS를 통해서 구한 실제 강성의 크기에 근거한 결과들이다. 이에 반해 Table 3은 단지 동적 좌굴이 발생할 수 있는 조건을 나타낸다. 따라서 실제의 경우, K_x^* 나 K_θ^* 의 값이 Table 3에 나타난 값을 갖기 어려우므로 이들의 영향에 의해 동적 좌굴이 발생할 가능성은 거의 없다. 이에 반해 K_y^* 의 경우는 Table 2에서 알 수 있듯이 실제 값들이 동적 좌굴이 발생할 수 있는 값에 근접해 있다. 따라서 실제적으로 동적 좌굴은 K_y^* 의 영향에 의해 발생할 수 있다. Table 2에서 제시되었듯이 축 반경비 $\delta=10$ 인 경우에 K_y^* 의 값에서 동적 좌굴이 발생할 수 있는데, 이는 실제 설계측면에서 터빈 블레이드와 같이 블레이드의 길이에 비해 축의 회전반경이 훨씬 큰 구조물에 해당한다. Fig. 4는 회전각속도 γ 의 변화에 따라 연성효과(coupling effect)를 무시한 경우와 고려한 경우를 비교해 나타낸다. 연성효과가 무시된 결과는 실선으로 연성효과가 고려된 결과는 점선으로 나타내고 있다. 연성효과를

Table 3 The stiffness magnitude of dynamic buckling

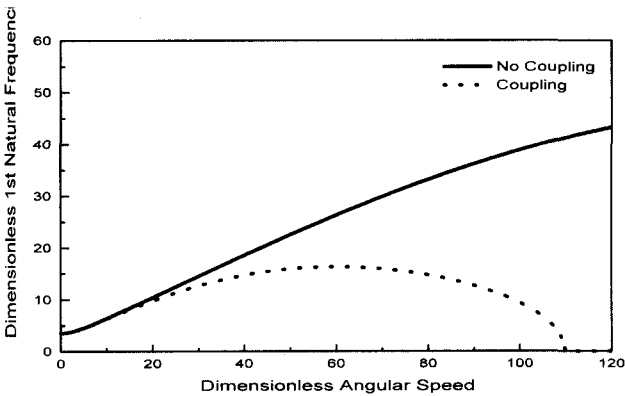
γ	K_y^*	K_x^*	K_θ^*
10	4.0×10^2	2.0×10^2	무관
15	1.2×10^3	3.0×10^2	무관
20	2.7×10^3	5.0×10^2	무관
25	6.0×10^3	7.0×10^2	2
30	9.0×10^3	1.0×10^3	3
35	1.3×10^4	1.3×10^3	5
40	1.8×10^4	1.7×10^3	8
45	2.3×10^4	2.1×10^3	14
50	3.0×10^4	2.6×10^3	23



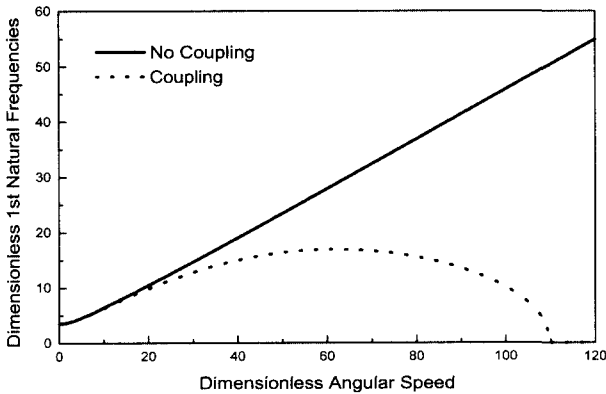
(a) $K_x^* = 10^5, K_y^* = 10^4, K_\theta^* = 10^5$



(b) $K_x^* = 10^5, K_y^* = 10^5, K_\theta^* = 10^5$



(c) $K_x^* = 10^5, K_y^* = 10^6, K_\theta^* = 10^5$



(d) Fully-Fixed

Fig. 4 Comparison of the first natural frequency ($\delta=0.1$)

고려한 경우가 고려하지 않은 경우보다, 그리고 스프링 강성계수가 작아질수록 고유진동수가 낮게 나타나는 것을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 지지단의 탄성과 회전하는 외팔보의 인장과 굽힘 운동간의 연성효과를 고려한 진동해석 모델링이 제시되었으며, 회전각속도, 축 반경비, 세장비, 지지단 강성의 변화를 고려한 모드해석을 수행하였다. 실제적으로 사용되는 보의 두께 비 및 축 반경비의 범위에서 회전하는 외팔보의 고유진동수는 탄성 지지단의 K_x^*, K_θ^* 크기 변화에는 거의 영향을 받지 않으며 K_y^* 에 지배적으로 영향을 받음을 확인할 수 있었다. 또한 동적 좌굴의 발생도 실제적으로 K_y^* 의 값과 밀접히 연관됨을 알 수 있었다. 끝으로 스프링강성의 크기에 따라 연성효과를 고려한 경우와 무시한 경우 고유진동수의 예측 값의 현격한 차이도 실제적인 K_y^* 값의 범위에서만 발생함을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 2000년도 한양대학교 교내 연구비로 진행되었으며 이에 관계자 여러분들께 감사 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Boyce, W. E., 1956, "Effect of Hub Radius on the Vibrations of a Uniform Bar," ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 23, pp. 298~299.
- (2) Afolabi, D., 1986, "Natural Frequencies of Cantilever Blades with Resilient Roots," J. of Sound and Vibration, Vol. 110, pp. 429~441.
- (3) Lee, S. Y., Lin S. M., 1994, "Bending Vibrations of Rotating Nonuniform Timoshenko Beam With an Elastically Restrained Root," ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 61, pp. 949~955.
- (4) Yoo, H. H., Ryan, R. and Scott, R., 1995 "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," J. of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.
- (5) Yoo, H. H., and Shin, S. H., 1998 "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," J. of Sound and Vibration, Vol. 212, No. 5, pp. 807~828.