한국소음진동공학회지 제 10 권 제 6 호, pp. 949~954, 2000.

〈논 문〉

위상신호를 이용한 단순평판의 진동계측

Measurement of Plate Vibration by Using Phase Signals

함연수* · 김정수** · 김관주**
Yeon Soo Ham, Jung Soo Kim and Kwanju Kim

(2000년 5월 23일 접수 : 2000년 11월 3일 심사완료)

Key Words: Modal Expansion(모드 확장), Accelerance(가속도 주파수 응답 함수), Phase Information(위상 정보), BEM(경계 요소 해석)

ABSTRACT

Applicability of the vibration signal phase for predicting the modal damping properties of structures is investigated. For uniform plates with different internal damping levels, the phase delay as a function of the frequency span as well as a function of the distance between the excitation and response measurement points are experimentally obtained. Dependence of the phase characteristics on the amount of structural damping is elucidated -more heavily damped plate shows notably reduced phase delay at intermediate distances. The experimental results compare favorably with analytical predictions, and show much promise for further refinement as a tool for estimating structural properties.

1. 서 론

구조물 진동시 나타나는 신호의 특성을 주파수 평면에서 분석하는 단계에서 위상정보보다는 진폭정보에 의존하는 것이 상례화 되어 있다. 일단 진폭의 크기에 대한 정보가 이해하기 쉽고 대상신호의 측정과정에서 오차의 민감도 또한 작다고 알려져 있기 때문이다.[1~3] 그러나 모드 밀도가 높거나 고감쇠 구조물의 경우 공진주파수 부근의 진폭신호가 뚜렷하지 못할 수 있고 무시할 수 없는 측정오차가 존재 할 수 있다. 이에 반하여 응답의 위상신호는 비교적 뚜렷한 특성을 갖는다.

본 연구에서는 진동시 나타나는 위상신호를 사용하여 구조물 특성을 파악하고자 하였다. 2차원 평판구조물을 사용하여 경계조건에 따른 진동 위상 신호와 구조물의 동특성 사이의 상관관계를 실험적으로 도출하는 데에 초점을 맞추었다. 특히 구조의 내부 감쇠특성은 질량 및 강성과 비교 할 때 보다 다양한 물리적 현상에 의하여 발생하므로 규명하기가 쉽지 않다.[4,5] 서로 다른 감쇠를 갖는 동일한 평판 구조물의 진동실험을 수행하여 감쇠효과의 증가에 따른 위상신호 변화를 측정하였고 위상신호와 내부감쇠 사이의 높은 상관관계를 확인하였다.

* 홍익대학교 대학원 기계공학과
** 정회원, 홍익대학교 공과대학 기계공학과

2. 구조물의 진동 해석

2.1 파동해석

2차원 평판구조의 경우, 수직 방향 w의 운동방정식은 다음과 같다.

$$D\nabla^4 w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

$$\nabla^4=\frac{\partial^2}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

여기서, D는 평판의 굽힘강성 이고 $\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$ 로 표현된다.

h는 평판의 두께, ρ는 밀도, ν는 프와송비이다.

평판이 조화 운동을 하는 경우, x 방향으로 진행하는 파동에 대한 식 (1)의 완전해는 다음과 같다.

$$w=(A\,e^{k_b x}+B\,e^{-k_b x}+C\,e^{-jk_b x}+D\,e^{jk_b x})e^{j\omega t} \quad (2)$$

여기서 $k_b=\sqrt{\frac{\omega}{\chi\,C_l}}$는 굽힘파의 파동수(wave number)를 나타내며 주파수 ω의 함수임을 알 수 있다. 식 (2)에서 처음 두 항은 비전파성 파동으로서 전혀 진동에너지를 전달하지 못하며, 나머지 두 항은 전파성 파동으로서 공간상에서 정현파형을 가지는 실제 굽힘파이다. 굽힘파가 구조물을 통해 전달되는 속도(phase velocity)는 다음과 같다.

$$C_b=\sqrt{\chi\,\omega\,C_l} \quad (3)$$

여기서 C_l은 종파(longitudinal wave)의 속도로서 $\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$의 값을 가지며, χ는 구조물의 회전 반경으로서 일정한 두께 h를 갖는 평판의 경우 $\frac{h}{\sqrt{12}}$의 값을 갖는다.

2.2 모드해석

Fig. 1과 같이 두 변의 길이가 각각 L_x, L_y인 직사각형 평판으로서 경계조건이 자유지지의 경우와 $x=0$과 $x=L_x$인 두 변에서 clamped된 2-edge clamped인 경우를 고려하였다. 자유지지의 경우 이론적인 해는

$$\begin{aligned} w(x,y) = {} & A_1\sin\alpha x\sin\gamma y+A_2\cos\alpha x\sin\gamma y \\ & +A_3\sin\alpha x\cos\gamma y+A_4\cos\alpha x\cos\gamma y \\ & +A_5\sin\alpha x\sin\gamma y+A_6\cos\alpha x\sin\gamma y \\ & +A_7\sin\alpha x\cos\gamma y+A_8\cos\alpha x\cos\gamma y \quad (4) \end{aligned}$$

로 표현할 수 있다.

2-edge clamped 지지의 경우 이론적인 해[6]는 일반적으로 홀수모드는

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = {} & \cos\gamma_{1n}\left[\frac{x}{L_x}-\frac{1}{2}\right] \\ & +\frac{\sin(\gamma_{1n}/2)}{\sinh(\gamma_{1n}/2)}\sinh\gamma_{1n}\left[\frac{x}{L_x}-\frac{1}{2}\right] \quad (5a) \end{aligned}$$

$$n=1,3,5\cdots$$

여기서 γ_{1n}은 $\tan(\gamma_{1n}/2)+\tanh(\gamma_{1n}/2)=0$의 해이다. 짝수모드는

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = {} & \sin\gamma_{2n}\left[\frac{x}{L_x}-\frac{1}{2}\right] \\ & +\frac{\sin(\gamma_{2n}/2)}{\sinh(\gamma_{2n}/2)}\sinh\gamma_{2n}\left[\frac{x}{L_x}-\frac{1}{2}\right] \quad (5b) \end{aligned}$$

$$n=2,4,6\cdots$$

여기서 γ_{2n}은 $\tan(\gamma_{2n}/2)-\tanh(\gamma_{2n}/2)=0$의 해이다.

균일한 사각 평판의 경우 인접한 파동수 사이의 간격은 x 방향으로 $\frac{\pi}{L_x}$, y 방향으로 $\frac{\pi}{L_y}$로 주어지고 임의의 파동수 k_b까지 존재하는 모드의 개수를 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.[7]

$$N_p(k_b)=\frac{k_b^2 L_x L_y}{4\pi} \quad (6)$$

윗 식을 주파수의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$N_p(f)=\frac{L_x L_y\cdot f}{2\chi C_l} \quad (7)$$

본 연구에서는 $L_x=80$ cm, $L_y=45$ cm, 두께 $h=1.2$ mm, 재질이 steel인 균일한 사각평판에 대하여 0~400 Hz 주파수 대역에서 유한요소모델을 Fig. 2와 같이 구성하여 수치적으로 고유주파수를 구하였고, 모드의 개수가 식 (7)의 이론적 근사치와 서로 유사함을 확인하였다(Table.2 참조).

유한요소 방법에서는 상용 프로그램인 ANSYS를 사용하

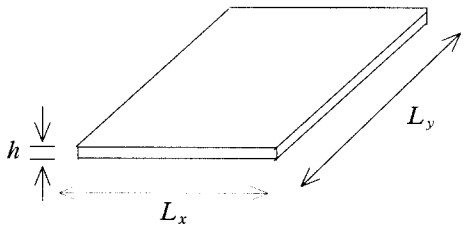

Fig. 1 A uniform rectangular plate

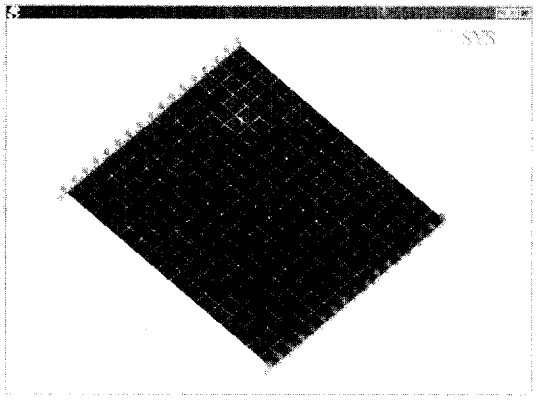

Fig. 2 FEM model of a uniform plate

였고 요소의 크기는 가장 높은 주파수에 해당하는 파장(wave length) λ의 $\frac{1}{4}$이 넘지 않도록 하였다.

2.3 위상신호와 구조진동

누적된 위상지연(phase delay)을 구하기 위해서는 $-\pi$와 π사이를 건너뛰는 불연속적인 위상 선도를 연속적인 함수형태를 갖도록 하여야 한다. 위상에 2π를 더하거나 빼서 연속적인 위상신호로 바꾸는 작업을 phase unwrapping이라 한다. 아래의 그림에 나타나 있듯이 Fig. 3의 측정된 위상신호는 unwrapping을 통하여 Fig. 4의 연속적인 하강곡선을 그리게 된다.

무한평판의 경우에 굽힘파의 위상지연(phase delay)은 다음과 같이 구해진다.

$$\phi(f, r) = -k_b r = -\sqrt{\frac{2\pi f}{\chi C_l}}\, r \tag{8}$$

ϕ는 주파수 f와 거리 r의 함수이므로 ϕ는 주파수를 따라 매끄럽게 하강하는 곡선이 된다. 또한 파동전파거리 r에 대해서도 선형적으로 하강하게 된다. 경계를 갖는 유한평판의 경우에 측정점 x_0에서의 가속도 응답과 x_s에서 작용하는 가진력 사이의 전달함수(transfer function)는 다음과 같이 모드 응답의 합으로 표현할 수 있다.[7]

$$Y_{so}(w) = -\frac{w^2}{M}\sum_n \frac{\phi_n(x_s)\,\phi_n(x_0)}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega\omega_n\eta} \tag{9}$$

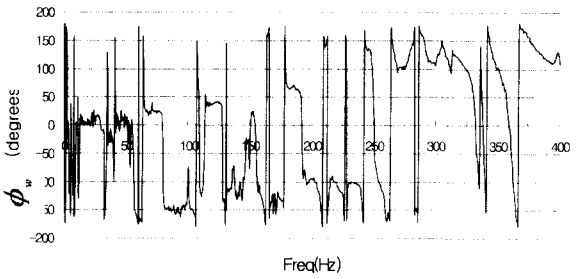

Fig. 3 Phase signal before unwrapping

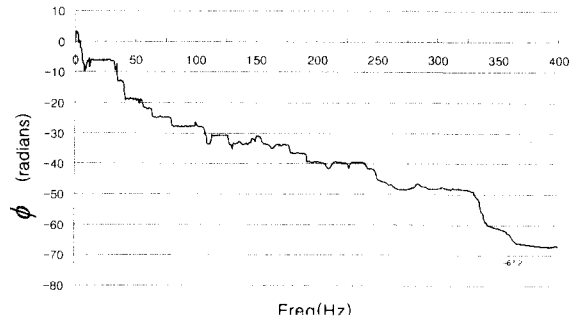

Fig. 4 Phase signal after unwrapping

여기서 $\phi_n(x_s)$와 $\phi_n(x_0)$는 각각 x_s와 x_0점에서의 n번째 모드형태의 크기를, w_n은 n번째 고유 주파수를, w는 주파수 대역을, η는 손실률(loss factor)을, M은 평판의 전체질량을 나타낸다. 전달함수 Y_{so}에서 pole과 zero가 존재하게 되는데 pole의 수는 분모에 나타나는 모드의 개수와 동일하고 zero의 수는 분자에 포함된 모드형태의 sign change의 개수와 동일하다.

전달함수의 위상을 살펴보면 zero점을 통과할 때마다 위상이 π만큼 위로 상승하게 되고, 즉 $\triangle\phi_{zero} = +\pi$, pole 혹은 각 고유주파수를 통과할 때의 위상변화 $\triangle\phi_{pole}$는 식 (9)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\triangle\phi_{pole} = -\tan^{-1}\frac{\eta\,\omega\,\omega_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)} \tag{10}$$

$\triangle\phi_{pole}$을 $\frac{\omega}{\omega_n}$의 함수로서 다음과 같이 도시할 수 있다.

Fig. 5에 나타난 대로 pole을 지날때에는 위상이 π만큼 하강하게 되며($-\pi$), 감쇠효과 η가 증가할 수록 pole 부근에서의 위상변화가 완만히 나타나지만 $-\pi$의 최종 위상변화에는 영향을 미치지 않는 것을 알 수 있다.

Unwrapping한 위상값은 pole과 zero를 거치면서 누적된 결과를 나타내게 된다. 즉, 위상값은 다음과 같은 식에 의해서 결정된다.

$$\phi = -\pi(N_{pole} - N_{zero}) \tag{11}$$

따라서 누적된 위상의 최종값은 내부 감쇠와 무관하나 내부감쇠가 증가할 수록 완만하게 수렴될 것으로 예상할 수 있다.

2차원 평판에서는 가진점과 측정점사이의 거리가 충분할 때 통계적으로 zero의 수는 pole의 수의 $\frac{1}{2}$에 근접하게 된다. 따라서 누적된 위상값은 다음과 같은 근사식으로부터 얻을 수 있다.[8]

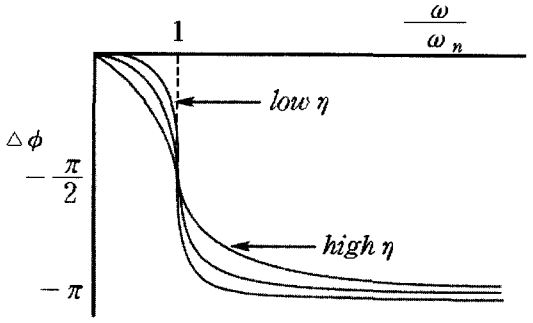

Fig. 5 Phase change at resonance

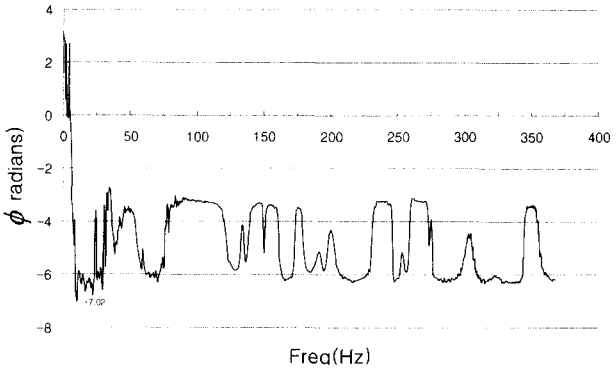

Fig. 6 Unwrapped phase at the driving point

$$\phi_{asym} = -\frac{\pi}{2} N_p \tag{12}$$

여기서 N_p는 식 (7)에 의하여 근사적으로 주어진다. 그러나 가진점과 측정점이 일치하거나 매우 가까울 때 zero와 pole의 수가 거의 동일하므로 식 (11)에 의하면 위상은 기준값을 중심으로 오르락 내리락 하게 된다. 즉, 위상은 누적되지 않는다. 가진점과 수신점이 일치할때 가속도와 가진력 사이의 전달함수의 위상값은 실험적으로 Fig. 6과 같고 위상이 누적되지 않는다는 것을 확인하였다.

3. 구조물의 위상신호 측정

가진은 평판의 정 중앙에서 하였고 가속도 측정은 평판을 16개의 mesh로 나누어 각 각의 mesh의 모서리지점에서 하였다. 관심 주파수 대역은 0~400 Hz으로 sine sweep 하였다. 측정순서는 수신점이 가진점에서 점점 멀어지는 방향으로 하였다. 우선 평판(저감쇠 평판으로 명명)에 대하여 실험을 수행하고 평판에 감쇠재를 도포하여(고감쇠 평판으로 명명) 동일한 실험을 수행하였다.

감쇠재료는 질량과 두께변화를 최소화하기 위하여 중방식 도료(제품명:Gelnac)를 판의 양면에 균일하게 도포하였다. 이때 질량증가율은 1.8%이내이며 두께 증가 또한 0.11 mm 이하로서 확인되었다.

대략적인 감쇠효과의 변화를 알기 위하여 half-power bandwidth방법을 사용하여 모드별 손실율 η를 구한 후 0~400Hz 주파수 대역에서의 평균값을 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Comparison of loss factors

Damping level \ Boundary conditions	Free-free	2-edge clamped
Light damping	0.003	0.004
Heavy damping	0.013	0.014

손실율은 감쇠제의 도포에 의하여 약 4배의 증가를 보이고 있으며 구분의 편리를 위하여 저감쇠와 고감쇠로 명명하기로 한다.

각 측정점에서는 가속도와 가진력사이의 전달함수를 구하였고 진폭(Fig. 8)과 위상(Fig. 9)을 구한 후 unwrapping을 수행하여 누적된 위상을 구하였다.

자유지지의 조건은 평판에 비해 그 강성이 무시할 수 있을 정도로 매우 작은 고무줄을 평판의 4 모서리에 지지시켜 근사화 하였다.

2-edge clamped 의 경우는 평판의 마주보는 두 변을 지지할 만한 큰 틀에 두 변을 vise로 지지하였다.

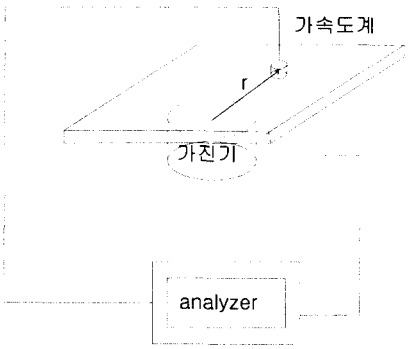

Fig. 7 Experimental setup

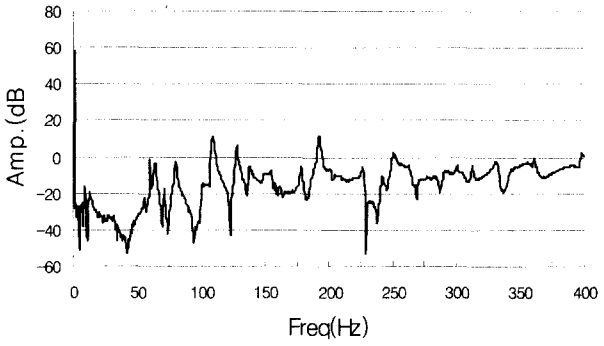

Fig. 8 Signal amplitude for 2-edge clamped case

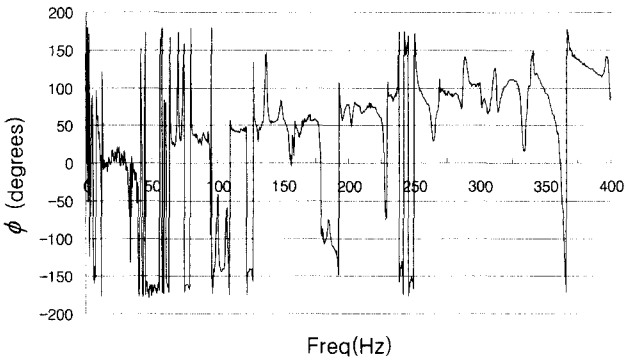

Fig. 9 Signal phase for 2-edge clamped case

4. 해석 및 실험결과

먼저 위상 신호의 정확성을 검증하기 위하여 0~400 Hz 주파수 대역에서 모드개수에 대한 이론 및 수치해석 결과와 실험결과를 비교하여 요약하면 Table 2와 같다.

실험결과는 동일한 진동신호로부터 진폭과 위상을 취한 후 비교적 뚜렷한 모드의 개수를 count한 것이다. Table 2의 결과에서 보듯이 진폭신호보다 위상신호가 비교적 뚜렷함을 확인할 수 있다. 다음 위상신호를 주파수 및 가진점과 측정점 사이의 거리의 함수로서 구하였다. 각각의 지지조건에 대하여 누적된 위상을 구하고 이론적 근사치와 비교하였다.

먼저 감쇠재를 도포하지 않은 저감쇠 평판의 주파수에 따른 위상결과는 Fig. 10과 같다.

맨 위의 곡선이 식 (8)에 의한 무한평판의 이론치이고 계단형으로 불규칙하게 하강하는 실선은 실험치, 하강하는 직선은 식 (12)에 제시된 유한평판의 이론적 근사치이다.

Fig. 10의 실험치는 가진점으로부터 충분히 떨어진 임의 지점에서 응답가속도와 가진력 사이의 전달함수의 위상을 unwrapping 하여 나타낸 것이다.

무한 평판의 경우 식 (8)을 적용하면 완만한 하강곡선을 그릴 수 있다. 한편 유한평판의 경우에 실험치는 보다 급격한 하강곡선을 그리고 있으며 이론적 근사치와 매우 유사함을 알 수 있다. 유한평판의 경우 측정점이 가진점으로부터 충분히 떨어져만 있으면 측정위치나 지지조건과 무관하게 거의 동일한 결과를 얻을 수 있었다.

Table 2 Mode count for different methods - lightly damped case

	자유지지	2-edge clamped
이론적 근사치	40개	40개
수치해석	38개	41개
진폭을 이용한 실험치	~20개	~21개
위상을 이용한 실험치	36개	43개

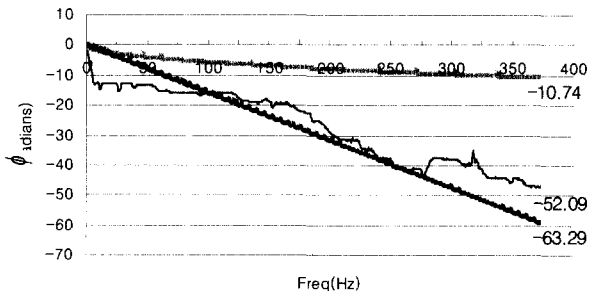

Fig. 10 Phase delay vs frequency(B.C : free-free)

그 이유는 경계조건이 변할 때 처음 몇 개의 저주파 고유모드는 다른 특성을 보일 수 있으나 고주파 모드로 갈수록 그 영향이 미미해지기 때문이다. 본 연구에서 40개 정도의 모드를 포함하는 주파수 대역에서의 진동특성을 다루므로 실험결과가 경계조건에 크게 민감하지 않으리라는 것을 예상할 수 있다

가진점과 측정점 사이의 거리에 따른 누적위상 변화를 요약하면 Fig. 11과 같이 나타낼 수 있다.

맨 위의 선이 무한 평판의 이론치이고 불연속적인 실선은 실험치, 아래의 점선은 식 (12)의 유한 평판의 이론적 근사치 점근선이다. 무한 평판의 경우 식 (8)에 의해서 완만한 하강 직선을 그리게 된다. 실험치를 얻기 위해서는 먼저 각 측정점에서 전달함수의 위상을 unwrapping한 후 최종 누적위상을 거리의 함수로서 표시한 것이다. 유한 평판의 경우 실험치는 급격하게 하강하다가 거리가 충분해짐에 따라서 이론적 근사치에 의한 점근선에 수렴되는 경향을 보임을 알 수 있다. 저감쇠 평판의 경우 충분한 거리는 약 10 cm 정도로 판명되었다.

다음 감쇠 물질을 도포한 고감쇠 구조와 이전의 저감쇠 경우의 누적된 위상을 비교하였다. Fig. 12는 저감쇠의 경우 충분한 거리로 판명된 측정위치에서(가진점으로부터 10 cm이상 떨어진) 주파수에 따른 위상변화를 나타낸 것이다.

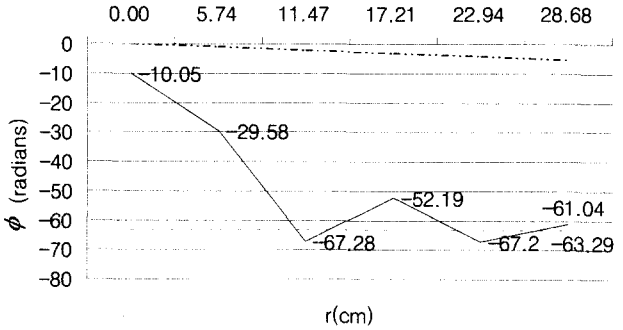

Fig. 11 Phase delay vs distance r(B.C : 2-edge clamped)

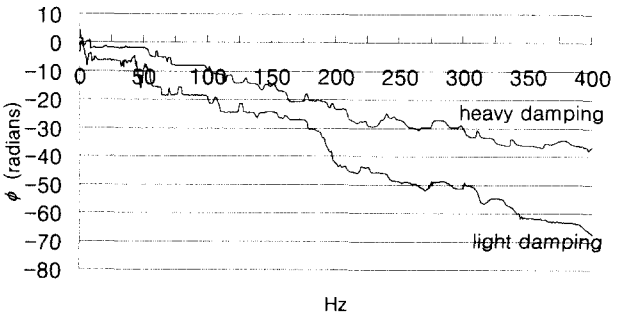

Fig. 12 Phase delay vs frequency(B.C : free-free)

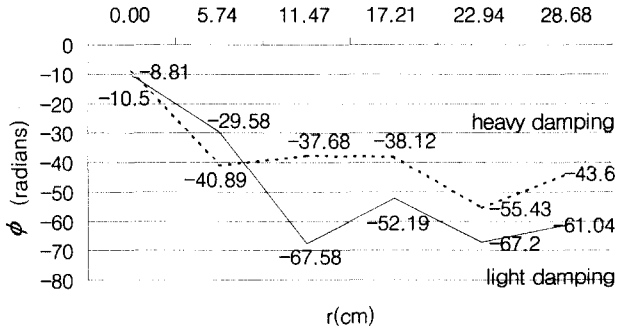

Fig. 13 Phase delay vs distance r(B.C : 2-edge clamped)

그러나 이 거리에서 고감쇠 구조의 경우 위상변화는 저감쇠 실험치 및 이론치에 크게 못 미치는 것으로 측정되었다.

Fig. 13은 위상의 거리에 따른 변화를 비교한 것이다. 내부감쇠에 의해서 위상변화는 훨씬 완만해지고, 25 cm 이상의 거리에서도 이론적 근사치에 수렴되지 않는 것을 볼 수 있다. 이는 구조의 감쇠가 증가할수록 정재파(standing wave) 특성이 감소하는 것을 보여준다.

5. 결 론

자유지지와 2-edge clamped지지 경계조건을 갖는 균일한 사각평판을 대상으로 누적된 위상지연값을 실험적으로 구하였고 이론적 근사치와 비교하였다. 먼저 0~400 Hz주파수 대역에서 위상신호를 이용하여 도출된 모드의 개수는 이론적 근사치 및 수치해석 결과치와 근사함을 확인하였다.

또한 위상신호를 주파수와 거리의 함수로서 표현할 때 이론적으로 제시된 경향과 매우 유사함을 확인하였다. 그러나 고감쇠평판의 경우 주파수 및 거리에 따른 위상신호의 변화는 보다 완만해지며, 특히 위상을 거리의 함수로 표현할 때 이론적으로 제시된 점근선에 매우 느리게 수렴됨을 알 수 있었다. 이와 같은 실험결과는 감쇠특성과 위상신호 사이의 매우 높은 상관관계를 시사하며 향후 이 방법을 보완하여 구조물의 감쇠를 보다 정량적으로 측정할 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

이 논문은 1998년 한국학술진흥재단의 학술연구비(기계공학연구)에 의하여 지원되었으며, 이에 감사 드립니다.

참 고 문 헌

(1) Bert, C. W., 1973, "Material Damping - Introductory Review of Mathematical Models, Measures and Experimental Techniques," J. Sound & Vibration, 29(2).

(2) Henderson, J .P., and Jones, D.I.G, 1978, "Specification of Damping Material Performance," Shock & Vibration Bulletin 48.

(3) Ungar, E. E., E.M .Kerwin, Jr., 1962, "Loss Factors of Viscoelastic Systems in Terms of Energy Concepts," J. Acoust. Soc.Am. 34 pp. 954~957.

(4) Rogers, L., 1981, "On Modeling Viscoelastic Behavior," The Shock & Vibration Bulletin No. 51.

(5) Kumar, B.,and M.L. Drake, 1984, "Constrained Layer Damping with Vitreous Enamel," J. Sound & Vibration, Vol. 93, No. 3.

(6) Beranek, L. L., 1971, "Noise and Vibration Control", MacGraw-Hill Co. Inc..

(7) 김정태, 강준수, 1997, "구조물 진동 · 소음의 수치해석시 최적요소 크기는 $\lambda/4$이다." 대한기계학회논문집(A), 제 21권 제 11호, pp. 1950~1956.

(8) Richard H. Lyon, 1987, "Machinery Noise and Diagonosis" Butterworth.