韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2000, 11. 제 39권, 제 2호, 145-150.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2000, Vol. 39, No. 2, 145-150.

$(-8)^{\frac{1}{3}}$에 내재된 수 체계 확장의 의미와 오류 해석

최 영 기 (서울대학교)

1. 서 론

교사가 가르치고자 하는 내용을 정확하게 전달되기 위해서는 그 내용에 내재되어 있는 기본 개념뿐만 아니라 이들 사이에 상정되어 있는 관련성에 대하여 이해하는 것이 필수적이다. 특히 컴퓨터와 같은 계산기의 발전으로 단순히 계산하는 기교를 아는 것보다는 지식의 구조를 아는 것이 더욱 강조되고 있다.

학습 촉진자로서의 교사의 역할은 수학적 목표를 설정하고, 그것을 추구하기 위해 교실내의 분위기를 만들어 내고, 학생이 주제를 잘 이해하도록 적당한 설명 방법을 이용하고 발문하며, 적절한 행동을 제시하고 토론을 이끄는 것까지를 포함하게 되었다. 이 역할을 충실히 수행하기 위해서는 교사의 교과 주제에 관한 지식이 필수적이다(Even and Tirosh, 1995). 실제적으로 교사교육에서 교과에 관한 지식 구조에 관한 연구는 점점 중요한 위치를 차지하게 되었다.

교사가 주제에 관하여 얼마나 심도있게 보느냐 하는 것은 전적으로 교사가 갖고 있는 교과 내용에 대한 지식의 본질과 깊이에 달려 있다. Bruner는 교육에서 지식의 표층에 해당하는 사실이나 결과들을 교육내용으로 하는 것을 비판하면서 지식의 현상에 내재하는 구조를 통한 개념을 교육내용으로 해야 함을 주장하고, 수학에서의 구조와 원리에 대한 교육을 강조하였다. 교과 내용의 구조를 파악한다는 것은 한가지 현상을 여러 가지 현상과 관련지어 이해할 수 있게 된다는 것을 말한다. 요컨대 구조를 학습한다는 것은 사물이나 현상이 어떻게 관련되어 있는 가를 학습하는 것이다(이홍우, 1990). 그러므로 교사 자신이 가르치는 내용의 기본구조를 명확히 하지 않은 채 특정한 계산이나 기술만을 가르치면 학생에게 지적인 희열을 전달하기가 매우 어렵다. 또한 교사가 교과에 관하여 표층적인 구조만을 이해하고 가르칠 때, 수업에서 발생하는 다양한 학생들의 오류를 정확하게 진단하는 것도 매우 어렵게 된다.

실제적으로 교사교육에서 수학구조와 원리에 관한 교육은 수학교육의 방법과 더불어 수학교육의 내용에 있어서 핵심적인 사항이다.

저널 Education Studies in Mathematics에서 발표된 일련의 논문(Even and Tirosh, 1995; Even and Tirosh, 1997; Goel and Robillard, 1997)을 통하여 $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 다루는 상반된 두 가지 접근 방식에 대한 논쟁이 있었다. 논쟁을 야기시킨 다음의 식의 전개과정을 살펴보자.

$$-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=(8^2)^{\frac{1}{6}}=2$$

Even과 Tirosh는 그들의 논문(Even and Tirosh, 1995)을 통하여 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 은 정의되지 않는 연산이라고 주장하면서 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 로 잘못 인식하는 이스라엘의 교사들이 학생들의 $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 이해하는 다양한 반응에 어떻게 대처하는 지를 보여 준다.

그러나 Goel과 Robillard(Goel and Robillard, 1997)는 $(-8)^{\frac{1}{3}}$은 정의되지 않는 것이라고 주장하는 Even 과 Tirosh가 잘못된 인식을 가진 것이며 오히려 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$로 인식하는 교사들의 인식이 옳음을 다음과 같은 미국 교과서(Dugopolski, 1995)의 예를 들어

* 2000년 5월 투고, 2000년 11월 심사 완료.

설명하였다.

a가 실수이고 $r=\frac{p}{q}$ 일 때 a^r을 a^{r_1} 으로 정의한다. 여기서 r_1은 p 와 q의 최대공약수로 나눈 $r=r_1$ 인 기약분수이다. 그러므로 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 이고 $(-8)^{\frac{2}{6}}$는 $(-8)^{\frac{1}{3}}$로 정의되어 역시 -2 이다.

이러한 논의에 대하여 Even과 Tirosh는 그들의 반박 논문(Even and Tirosh, 1997)을 통하여 지수의 법칙 ($(a^m)^n=a^{mn}$)을 포기하면서 까지 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 로 받아들이는 것은 부적절하므로 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 는 정의되지 않는 것으로 받아들이는 것이 바람직하다고 다시 주장하였다.

Shulman은 교사가 필요로 하는 교과에 관한 지식을 'knowing that' 과 'knowing why' 의 두 가지로 구분하고 교사는 어떤 것이 그렇다('knowing that')를 이해하는 것뿐만 아니라 좀더 나아가 그것이 왜 그런가 ('knowing why')를 아는 것이 필요하다고 주장하였다 (Shulman, 1986).

본 논문에서는 교사 교육의 관점에서 이러한 논쟁에 깔려 있는 본질적인 문제는 수의 확장에 내재되어 있는 수학 구조에 관한 것임을 지적하고, 이것을 통하여 교사들에게 'knowing why' 관점을 제시하고자 한다. 이러한 'knowing why' 의 관점을 이해하는 것의 중요성은 교사가 문제에 깔린 개념을 체계적으로 이해함으로써 학생들이 흔히 갖고 있는 오개념을 정확하게 진단할 수 있기 때문이다.

2. $(-8)^{\frac{1}{3}}$에 내재된 지식에 관한 구조

하나의 수 체계가 어떠한 결함이 있으면, 그 결함은 그 수 체계를 확장시키게 하는 동기를 유발시킨다. 이러한 과정의 반복이 실제로 하나의 수 체계가 체계적으로 확장하는 과정이다. 자연수의 체계로부터 복소수 체계까지의 확장을 다음과 같이 표현할 수 있다.

자연수 → 정수 → 유리수 → 실수 → 복소수

자연수를 구성하고 있는 원리의 핵심은 어떠한 수라도 그 수의 다음 수가 있다는 것이다. 자연수에서 2의 다음 수는 3이지만, 유리수나 실수에서는 2의 다음 수를 찾을 수 없다. 그러나 자연수는 뺄셈에 대하여 닫혀있지 않다. 음수라는 것을 모르는 초등학생에게는 다음과 같은 오류가 발생할 수 있다.

5에서 10을 빼면 0 이예요. 왜냐하면 아무 것도 남지 않았어요.

자연수에서 정수로의 확장은 덧셈과 뺄셈의 연산에 대하여 닫혀있기 위한 대수적인 확장이며, 정수에서 유리수로의 확장도 곱셈과 나눗셈의 연산에 대하여 닫혀있기 위한 대수적인 확장이다. 반면에 유리수에서 실수로의 확장은 극한과정(limit process)에 대하여 닫혀 있기 위한 해석적인 확장이다. 각 항이 유리수인 수열에 대하여 그 수열이 수렴하는 극한값은 일반적으로 유리수가 아니다. 예를 들어 다음과 같이 $\sqrt{2}$ 에 수렴하는 유리수의 항으로 이루어진 수열이 존재한다.

$$a_1=1.4,\ a_2=1.41, a_3=1.414,\ \ldots\ ,\ \lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$$

이와 같이 유리수는 극한값에 대하여 닫혀 있지 않으므로 그 안에서 극한과정을 자유롭게 할 수가 없고, 이 결함을 해결하기 위하여 유리수로부터의 확장이 필요한데 그 수가 유리수 집합에서의 데데킨트 절단(Dedekind cut)으로 만들어 낸 실수이다. 실수는 극한과정에 대하여 닫혀있다는 의미에서 해석학적으로 완비(complete)되어 있다. 그러나 $x^3+8=0$ 와 같은 실수 계수를 갖는 방정식이 항상 실수 안에서 해를 갖는 것은 아니므로 실수도 다항식의 근을 구하는 데에는 충분한 구조를 갖고 있는 것이 아니다. 학교수학에서 방정식의 해에 관한 다음과 같은 오 개념이 있다.

$x^3+8=0$ 와 같이 실수 계수를 갖는 방정식의 해가 실수인 것은 당연합니다. 왜냐하면 실수에 실수를 곱하거나 더하여도 실수이니까요.

이러한 의미에서 실수는 대수적으로 완비되어 있지 않다. 그러므로 이러한 결함을 극복하기 위하여 실수로부터 확장된 수가 필요한데, 그 확장된 수는 확장된 수를 계수

로 갖고 있는 모든 다항식이 확장된 수 안에서 근을 갖도록 되어야 한다. 이러한 성질을 대수적으로 닫혀 있다(algebraically closed)고 한다. 이러한 성질을 만족하도록 실수로부터 확장된 수가 복소수 C 이다. 즉 복소수 계수를 갖고 있는 모든 방정식

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots a_1 x + a_0 = 0,\ a_i \in C$$

은 복소수 안에서 해를 갖는다. 이것을 대수학의 기본정리(Fundamental Theorem of Algebra)라 하는데 대수의 구조와 원리를 나타내는 근본적이고 핵심적인 정리이다. 예를 들어, 방정식 $x^3 + 8 = 0$ 의 해를 구한다거나, 해석하는 것은 복소수 안에서 가능한 것이다.

뺄셈에 대하여 닫혀 있지 않는 자연수 안에서 뺄셈에 관한 문제를 해결할 수 없고, 유리수 안에서는 수열의 극한에 관련된 문제를 완벽하게 설명할 방법이 없다. 마찬가지로 실수 안에서 실수 계수를 갖고 있는 방정식의 해에 대한 문제를 완벽하게 설명할 수 없다. $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 에 대한 접근 방식에 내재된 문제는 방정식 $x^3 = -8$, 즉 $x^3 + 8 = 0$ 의 해를 구하는 문제가 변형(變形)된 형태이다. 즉, 두 형태에 내재된 구조는 본질적으로 같은 것이므로 그것에 대하여 적용할 원리는 같고, 그 원리가 바로 대수학의 기본 정리이다. 그러므로 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 에 내재된 문제를 실수에서 해결하려는 시도 자체가 불안정한 것이고, 궁극적인 해결은 복소수 안에서만 가능하다.

이와 같은 관점에서 보면 서론에서 제기한 $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 다루는 상반된 두 가지 접근 방식에 대한 논쟁(Even and Tirosh, 1995; Even and Tirosh, 1997; Goel and Robillard, 1997)은 그 해결을 실수에서 찾으려 했던 점에서 비본질적이고 지식의 표피에 해당하는 현상적인 것에 관한 논쟁으로 볼 수 있고, 그 현상 안에 내재되어 있는 근본적인 수학구조는 대수적으로 닫혀 있음에 대한 원리이다.

3. 복소수를 통한 이해

복소수는 평면의 점을 나타내는 수이다. 평면의 점을 직교 좌표계를 이용하여 나타낼 수도 있지만 절대값 r과 편각 θ 로 이루어진 극형식으로 나타낼 수도 있다. 평면에 있는 점 (x, y)를 복소수로 $z = x + iy$ 로 나타낼 수 있고, 이것을 절대값 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 인 편각 θ 를 이용하여 극형식으로 나타낼 수 있다. 여기서 절대값 r 은 유일하게 정하여지지만 θ의 값은 유일하게 정하여지지 않으므로 z의 극형식은 $re^{i(\theta+2n\pi)}$, $n \in Z$(정수의 집합) 으로 표현되고 이 때 $-\pi < \theta \le \pi$ 인 θ를 주치(principal value)라 한다.

실수의 유리수 멱에 대한 정의와 같이 k가 자연수, m이 정수라 할 때 복소수 z 에 대하여 $z^{\frac{1}{k}}$은 k제곱하여 z가 되는 모든 복소수의 집합으로 정의되고, $z^{\frac{m}{k}}$는 $z^{\frac{1}{k}}$의 m제곱으로 정의된다. 그러므로 $z = re^{i(\theta+2n\pi)}$, $n \in Z$ 라 할 때, 복소수의 유리수 멱은 다음과 같이 정의된다(Churchill and Brown, 1990).

$$z^m = (re^{i(\theta+2n\pi)})^m = r^m e^{i(m\theta+2n\pi)},\ n \in Z$$

$$z^{\frac{1}{k}} = (re^{i(\theta+2n\pi)})^{\frac{1}{k}} = r^{\frac{1}{k}} e^{i(\frac{\theta}{k}+\frac{2n}{k}\pi)},\ n \in Z$$

$$z^{\frac{m}{k}} = (re^{i(\theta+2n\pi)})^{\frac{m}{k}} = r^{\frac{m}{k}} e^{i(\frac{m\theta}{k}+\frac{2mn}{k}\pi)},\ n \in Z$$

위의 정의에 의하여 다음의 예를 계산할 수 있다.

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = (8e^{i(\pi+2n\pi)})^{\frac{1}{3}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}n\pi)},\ n \in Z$$

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{2}{6}} e^{i(\frac{2\pi}{6}+\frac{4}{6}n\pi)} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}n\pi)},\ n \in Z$$

$$((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = (8^2 e^{i(2\pi+2n\pi)})^{\frac{1}{6}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{3})},\ n \in Z$$

따라서 $(-8)^{\frac{1}{3}}$과 $(-8)^{\frac{2}{6}}$은 같으며, 절대값이 2이고 편각의 주치는 정수 n의 값에 따라 다음의 3가지의 값을 갖는다.

<표 1> $(-8)^{\frac{1}{3}}$의 절대값과 편각의 주치

절대값	2	2	2
편 각	$-\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{\pi}{3}$

이 중 실수 축에 있는 경우가 편각의 주치가 π일 때이고, 이 값이 -2 이다. 그러나 $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 의 경우는 절대값은 2 이지만 편각의 주치는 정수 n의 값에 따라 다음의 6 가지의 값을 얻는다.

<표 2> $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 의 절대값과 편각의 주치

절대값	2	2	2	2	2	2
편각	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

이 중 실수 축에 있는 경우는 편각의 주치가 0 와 π일 때이고, 이 때의 값이 각각 2 와 -2 이다. 즉 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 의 값 중에서 실수의 값에 해당하는 것은 -2이지만, $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 의 값 중에서 실수인 것은 2와 -2 이다. 따라서 복소수의 관점에서

$$(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}\neq[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$$

이다. 이상으로 다음 식

$$-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=(8^2)^{\frac{1}{6}}=2$$

에 대한 오류를 분석할 수 있다. 그러나 대수적으로 닫혀있지 않는 실수에서는 이러한 분석을 할 수 없다.

이와 같이 $(-8)^{\frac{1}{3}}$의 관한 논의는 복소수 영역에 해당되므로 복소수 안에서 해석되어야 한다. 복소수에서 $(-8)^{\frac{2}{6}}\neq[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$가 되는 것은 자연수 m에 대하여 z^m을 정의하는 방식과 $z^{\frac{1}{m}}$을 정의하는 방식의 차이에서 기인한다. z^m에 대한 정의하는데 있어서 다음의 상황을 고려하여 보자. 복소수 z에 대하여

$$z^2=re^{i(\theta+2n_1\pi)}re^{i(\theta+2n_2\pi)}$$

$=r^2e^{i(2\theta+2(n_1+n_2)\pi)}$ 이다. 여기서 $n_1, n_2\in Z$ 이므로 $n_1+n_2=n$ 으로 놓으면

$$z^2=r^2e^{i(2\theta+2n\pi)},\ n\in Z$$

가 되어, 일반적으로 $z^m=r^me^{i(m\theta+2n\pi)},\ n\in Z$로 정의된다. 그러나 z^2을 $re^{i(\theta+2n\pi)}re^{i(\theta+2n\pi)}$로 생각하여 $r^2e^{i(2\theta+4n\pi)}$로 본다면, 일반적인 형태의 z^m은 $r^me^{i(m\theta+2mn\pi)},\ n\in Z$로 정의된다. 이러한 정의에서는 지수의 법칙이 성립하여

$(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 이 되지만

$$(-8)^2=(8e^{i(\pi+2n\pi)})^2=8^2e^{i(2\pi+4n\pi)},\ n\in Z$$

$$8^2=(8e^{i2n\pi})^2=(8^2e^{i4n\pi}),\ n\in Z$$

이 되어 편각의 값이 주치와 2π의 배수의 합의 형태가 아니고, 또한 $(-8)^2$ 은 편각이 $(2n+1)2\pi$ 인 점에서 편각이 $4n\pi$ 인 8^2 과는 다른 수가 되어, 실수로부터 복소수로의 확장에 대한 근본적인 문제를 발생시킨다.

또한 방정식의 관점으로 논의를 돌려 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 의 값은 $(-8)^{\frac{1}{3}}=x$ 로 놓아 방정식 $x^3+8=0$의 해를 구하는 문제로, $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 의 값은 $x^6+64=0$의 해를 구하는 문제로 변형할 수 있고, 이것을 해결할 수 있는 영역은 대수학의 기본정리에 의하여 복소수이다. 그러므로 서론에서 언급한 실수 안에서의 $(-8)^{\frac{1}{3}}$에 대한 접근 방식에 대한 논쟁(Even and Tirosh, 1995, 1997; Goel and Robillard, 1997)은 비본질적이다.

4. 결 론

일반적으로 교사가 가르칠 주제에 관한 원리를 정확하게 이해하였을 때, 교사는 학생에게 가르치고자 하는 내용이 알 가치가 있음을 전달할 수 있다. 교수의 원리의 핵심은 교사가 스스로 개념을 이해하고, 그것을 단순히 전달하거나 주입하는 것이 아니라 이해되어 지도록

가르치는 것이다.

$(-8)^{\frac{1}{3}}$ 에 관련된 식의 오류는 대수적으로 닫혀 있지 않은 실수에서 관계를 분석하려는 시도에서 발생된 오류이다. 위의 문제에서 보는 바와 같이 주어진 연산이 어떤 수에 대하여 닫혀있는가 알아보는 것은 중요한 의미를 지니고 있다. 이 문제에 관련된 내용에 대한 지식이 물론 학생들에게는 상위개념이어서 그 원인을 학생에게 충분히 이해되도록 설명하기는 어렵지만, 교사의 입장에서는 그것과 관련된 교과지식을 전체적으로 이해하고 그 안에서 교과내용들이 어떻게 관련되어 있는 가를 파악하는 것은 필수적인 것이다.

가르치고자 하는 것에 대한 교과지식을 충분히 이해하지 못한 상황에서 학생들에게 개념을 명료하고 체계적으로 설명한다는 것은 어려운 것이며 또한 학생들이 갖는 오 개념의 원인을 분석하는 것도 어렵게 된다. 학생의 답이 옳은지 틀린지에 대한 교사의 판단과 그 답에 내포되어 있는 의미를 얼마나 깊이 설명할 수 있는 가는 교사의 그 주제에 대한 이해에 달려 있다. 그러나 학생을 체계적으로 이해시키는 데에는 내용에 대한 이해 외에도 그 내용에 대하여 학생들이 갖고 있는 개념과 그들의 사고 방식에 대한 고려가 필요하다. 즉 교사는 학생들이 갖고 있는 개념의 밑에 깔려 있는 논법을 이해할 수 있어야 하며, 학생들이 흔하게 저지르는 오류의 원인을 알아차려야만 한다(Even and Tirosh, 1995). 이러한 관점에서의 교사에게 필요한 수학적 지식에 관한 연구 또한 의미가 있고, 꾸준히 연구되어 오고 있다(Ball, 1990; Even, 1990; Even and Tirosh, 1995; Skemp, 1976).

서론에서 언급한 식의 오류는 어떤 연산에 대하여 닫혀있지 않은 상태에서 그 연산을 다루게 되었을 때 나타나는 전형적인 오류인 것이다. 그러므로 복소수의 개념이 충분히 설명되지 않은 학교 현장에서 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 을 다루는 것은 매우 미묘하고 어려운 것이다. 그러나 이에 대한 논의는 함수 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 과 같은 함수를 다루는 데에도 관련되어 있어 단순히 상위개념이라고 무시하기도 어렵다.

$(-8)^{\frac{1}{3}}$ 을 Goel과 Robillard가 주장하듯이 -2로 인식하든지, Even과 Tirosh처럼 정의되지 않는 연산으로 받아들이든지 그것의 선택은 전적으로 교사에게 달려있고 어느 것이 낫다고 단언할 수 없고, 그 선택 또한 본질적인 것이 아니다. 그러나 어느 것을 선택하든지 그것이 내포하고 있는 의미를 정확하게 파악하는 것은 매우 중요하다.

끝으로 1998년에 서울대학교에서 중등 1급 정교사 자격 연수를 받은 수학 교사에 대하여 조사한 $(-8)^{\frac{1}{3}}$이 정의되지 않는 연산인가, 아니면 $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 -2 로 인식해야 되는가에 대한 설문의 결과이다.

<표 3> 설문결과

	중학교 수학 교사	고등학교 수학 교사
$(-8)^{\frac{1}{3}}$을 정의되지 않는 연산으로 인식하는 교사수	18 명	14 명
$(-8)^{\frac{1}{3}}$을 -2 로 인식하는 교사수	16 명	13 명
확신이 없는 교사수	14 명	7명

설문의 결과를 분석하여 보면 $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 정의되지 않는 연산으로 인식하는 교사는 밑을 양수로 제한함으로써 지수법칙이 일반적으로 성립하게 하는 것이 의미가 있다고 생각한 반면에, $(-8)^{\frac{1}{3}}$을 -2로 인식하는 교사는 지수법칙은 밑이 양수인 경우에만 성립하게 하고 음수인 경우에는 지수법칙을 성립하지 않게 하더라도 밑이 음수인 경우에도 지수가 확장되는 것이 의미가 있다고 생각하였다.

참 고 문 헌

이홍우 (1990). Bruner 지식의 구조, 교육과학사.

Ball, D. L. (1990). Examining the subject-matter knowledge-of prospective mathematics teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* 21(2), pp.132-143.

Churchill, R. V. & Brown J. W. (1990). *Complex Variables and Application*, McGraw-Hill Company.

Dugopolski, M (1995). College Algebra, Addison-Wesley Publishing, pp. 28-29.

Even, R. (1990). Subject-matter knowledge for teaching and the case of functions, *Educational Studies in Mathematics* 21, pp.521-544.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept, *Journal for Research in Mathematics Education* 24(2), pp.94-116.

Even, R. and Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as source of teacher presentations of the subject matter, *Educational Studies in Mathematics* 29, pp.1-19.

Even, R. and Tirosh, D. (1997). To define or not to define: The case of $(-8)^{\frac{1}{3}}$", *Educational Studies in Mathematics* 33, pp.321-330.

Goel, S. K. and Robillard, M. S. (1997). "The equation $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = [(-8)^2]^{\frac{1}{6}} = 2$", *Educational Studies in Mathematics* 33, pp.319-320.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* 15(2), pp.4-14.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics teaching* 77, pp.20-26.

The Meaning of the Extensions of Number Systems in School Mathematics and the Error Analysis Involved in the Interpretation of $(-8)^{\frac{1}{3}}$

Choi, Younggi
Department of Mathematics Education, Seoul National University,
Seoul 151-742, Korea; E-mail: yochoi@plaza.snu.ac.kr

In this paper, we study the subject-matter knowledge related to the problem about rational exponent with negative bases. From the school mathematics point of view, we first investigate the meaning of the extensions of the number systems.

We analyze the intrinsic meaning involved in the $(-8)^{\frac{1}{3}}$ through the natural interpretation of rational exponent with negative bases by the complex number. We explain why it is important for a teacher to have the subject-matter knowledge in order to detect and correct student's mistake and misunderstanding.