

# 상관된 Nakagami 페이딩채널에서 비동기 송신 다이버시티 시스템 성능분석

정회원 여민기\*, 한영열\*\*

## Performance Analysis of Noncoherent Transmit Diversity System over Correlated Nakagami Fading Channel

Min-Ki Yeo\*, Young-Yearl Han\*\* *Regular Members*

### 요약

고속무선 이동 통신에서 가장 문제가 되는 것이 다중전송로에 의한 페이딩잡음이며, 이러한 페이딩의 문제점을 이동성을 보장하면서도 효율적으로 해결할 수 있는 방법이 최근 제안된 STTD(Space Time Transmitter Diversity) 기법이다.<sup>[1][2]</sup> 본 논문에서는 상관된 Nakagami 페이딩 채널환경에서 적용될 수 있는 수신신호의 확률밀도함수를 유도하고 이 유도된 새로운 확률밀도함수를 이용하여 비동기 송신 다이버시티 시스템의 성능을 비교 분석한다.

### ABSTRACT

Signal Fading due to multipath propagation severely impairs the performance of high speed mobile communication systems. Effective diversity scheme for fading channel is STTD(Space Time Transmitter Diversity) method. In this paper, we derive the new probability density function of the envelope of the received signal over correlated Nakagami fading channel. Using the new pdf of the envelope, we analyze the performance of noncoherent transmit diversity system on correlated Nakagami fading channel.

### I. 서론

인터넷의 급속한 보급과 정보사회로 급격한 변혁은 보다 신속하고 신뢰성 있는 통신기술을 요구하고 있으며 이러한 요구는 과거의 아날로그 통신 시스템보다 월등히 우수한 디지털 이동통신의 보급을 촉진시키고 있다. 보다 나은 양질의 통신서비스를 제공하기 위하여 차세대 이동 통신은 다양한 소비자 욕구를 수용할 수 있는 통신방식 이어야 하며, 물론 전력과 대역폭의 효율성까지도 함께 고려되어 설계되어야 한다. 고속의 이동 통신환경에서 전파의 다중 전송로로 인한 페이딩 현상은 시스템 성능에 중대한 영향을 미친다. 백색 가우스 잡음환경하에서  $10^2$ 오류확률을  $10^3$ 오류확률로 줄이기 위해서는 일반적으로 1~2 dB의 신호대잡음비(Signal

to Noise Ratio) 가 요구되지만 페이딩환경에서는 10dB의 이상의 신호대잡음비가 요구된다고 알려져 있다.<sup>[2]</sup> 이러한 페이딩에 대한 대책으로 일반적으로 널리 알려진 방법이 다이버시티(diversity)수신 기법이다. 이 기법은 임의의 시간에 있어서 공간상이나 주파수상으로 충분히 떨어져 있는 경로에서는 페이딩이 동시에 발생하지 않는다는 통계적 성질을 이용하고 있다.

그러나 이러한 다이버시티 기법을 실현하는데 복수개의 수신 안테나를 사용해야 하므로 간단하고 가격이 저렴해야하는 휴대용단말기에 적용하기에는 적합하지 못한 단점이 있었다. 최근 다이버시티 성능을 그대로 유지하면서도 단말기에 복잡도를 증가시키지 않는 방법인 STTD(Space Time Transmitter Diversity) 기법이 소개되었으며, 이동통신의 기지국

\* 한양대학교 전자통신공학과  
논문번호: 00357-0907, 접수일자: 2000년 9월 7일

(Base Station) 에 복수개의 송신안테나를 사용하지  
만 이동단말기에는 1개의 안테나를 사용하는 방식  
이다.

본 논문에서는 II장에서 STTD방법에 대해 살펴  
보고, III장에서, STTD방식을 사용할 경우 발생하는  
두 송신 안테나로부터 상관된 수신신호가 Nakagami  
페이딩잡음 및 협대역 가우스 잡음을 겪을 경우  
포락선(Envelope)의 확률밀도함수를 유도하고, 유도  
된 확률밀도 함수가 타당함을 검증하며, IV장에서  
는 유도한 확률밀도 함수를 이용하여 비동기 시스  
템의 오율식을 유도하고 그 성능을 분석한다.

## II. STTD 기법

STTD방식은 최초로 협대역 통신시스템 적용을  
목적으로 제안되었으며, 최근에는 광대역 CDMA  
(Wideband Code Division Multiple Access) 시스템  
적용을 목적으로 ETSI에서 W-CDMA국제규격으로  
채택되고 있다. 그림1. 은 STTD 기법의 블록 도를  
보여주고 있다.

시간  $t$ 에서 송신 안테나 1과 송신안테나 2에 대  
한 복소 승 왜곡(Complex Multiplicative Distortion)  
을 각각  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$ 라 하고, 페이딩이 두 연속적인  
심벌에 걸쳐서 상수로 가해진다고 가정하면

$$h_1(t) = h_1(t+T) = h_1 = \sum_{i=1}^L \alpha_{1,i} = \sum_{i=1}^L |\alpha_{1,i}| e^{j\theta_{1,i}}$$

$$h_2(t) = h_2(t+T) = h_2 = \sum_{i=1}^L \alpha_{2,i} = \sum_{i=1}^L |\alpha_{2,i}| e^{j\theta_{2,i}} \quad (1)$$

로 나타낼 수 있다.

여기서  $T$ 는 심벌의 주기(Symbol Duration) 이고  
 $\alpha_{j,i}$ 는  $j$ 번째 송신안테나로부터 수신된  $i$ 번째 다중 전  
송로로 가해진 Nakagami 페이딩 잡음을 표시하고  
있으며,  $L$ 은 수신 경로의 총 수이다. 수신 신호는  
아래 식과 같이 된다.

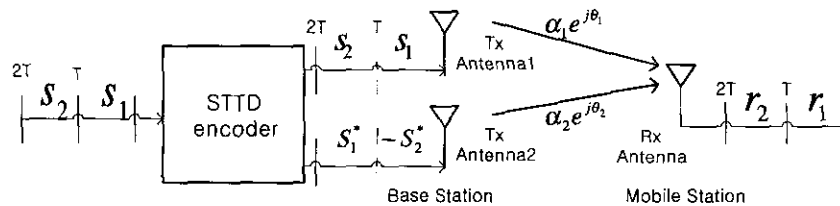


그림 1. STTD 기법의 블록도

$$r_1 = r_1(t) = h_1 s_1 - h_2 s_2^* + n_1$$

$$r_2 = r_2(t) = h_1 s_2 + h_2 s_1^* + n_2 \quad (2)$$

여기서  $r_1$ ,  $r_2$  는 각각 시간  $t$ 와  $t+T$ 에서 수신  
신호이고,  $n_1$ ,  $n_2$  는 백색가우스잡음(Additive White  
Gaussian Noise)을 나타낸다.

송신된 신호  $s_1$ ,  $s_2$  대한 이동단말기에서 수신된  
신호  $\tilde{s}_1$ ,  $\tilde{s}_2$  는 아래식과 같이 처리 되어 합성된다

$$\tilde{s}_1 = h_1^* r_1 + h_2 r_2^*$$

$$= \sum_{i=1}^L \left( |\alpha_{1,i}|^2 + |\alpha_{2,i}|^2 \right) s_1 + \alpha_{1,i}^* n_{1,i} + \alpha_{2,i} n_{2,i}$$

$$\tilde{s}_2 = -h_2 r_1^* + h_1^* r_2$$

$$= \sum_{i=1}^L \left( |\alpha_{1,i}|^2 + |\alpha_{2,i}|^2 \right) s_2 + \alpha_{2,i}^* n_{2,i} + \alpha_{1,i} n_{1,i} \quad (3)$$

이 된다.

식 (3)은 송신다이버시티 시스템에서도 최대비합  
성방법(Maximal Ratio Receiver Combining)과 동  
일한 결과를 얻을 수 있음을 보여주고 있다. [2]

## III. 상관된 Nakagami 환경에서 수신신호의 포락선의 확률밀도함수

다중경로 페이딩 채널에서 수신신호를 통계적으  
로 표현하는 모델로서 가장 보편적으로 적용되는  
모델이 Rayleigh분포지만 보다 일반적이고 특히 도  
시지역의 페이딩모델로 더 적합하다고 알려진 분포  
모델이 Nakagami 페이딩 모델이다. 두 송신 안테  
나로부터 송신된 신호는 서로 상관되어 수신기에  
도달하게 되며, Nakagami페이딩채널에서 상관된 수  
신신호의 결합확률밀도함수는 식 (4)와 같이 주어진다.<sup>[3]</sup>

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{2m}{\Omega}\right)^{m+1} \frac{4\alpha_1^m \alpha_2^m}{\alpha \Gamma(m) \rho^{m-1} (1-\rho^2)} e^{\frac{2m(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{\Omega(1-\rho^2)}} I_{m-1} \left( \frac{4m\rho\alpha_1\alpha_2}{\Omega(1-\rho^2)} \right) \quad \alpha \geq 0, 0 < \rho < 1 \quad (4)$$

여기서  $\rho$  는 두 송신 안테나로부터 수신된 신호 사이의 상관계수(Correlation Coefficient)를 나타내며,  $\Gamma$  는 감마 (Gamma) 함수를 표시하고,  $Q = E[A^2]$  이며, 페이딩지수  $m$  은 모멘트의 비로서 아래 식 (5) 와 같이 정의된다.

$$m = \frac{\Omega^2}{E[(A^2 - \Omega)^2]}, \quad m \geq \frac{1}{2} \quad (5)$$

STTD 기법을 사용할 경우 기지국에서 두개의 송신안테나로 신호를 송출하므로 안테나 하나로 송출되는 전력은 그 반이 되어 식 (6)과 같이 된다.

$$E[\alpha_i^2] = \frac{\Omega}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

페이딩지수  $m$  은 페이딩의 정도를 나타내는 지수로서  $m=1$  일 때는 Rayleigh분포가 된다.

수신기에서 각각의 송신안테나로부터 더해진 수신 신호  $\alpha$  ( $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ )에 대한 새로운 확률밀도함수를 유도하기 위하여,  $\alpha_2$  대신에  $\alpha - \alpha_1$ 을 식 (4)에 대입하고  $\alpha_1$  전구간에 대하여 적분하면  $f(\alpha)$ 를 유도할 수 있다.

$$f(\alpha) = \int_0^\alpha f(\alpha_1, \alpha - \alpha_1) d\alpha_1 \quad (7)$$

아래의 관계식 (8)과 (9)를 이용하여 식 (7)의 적분을 풀어 정리하면 식 (10)의 결과식을 얻을 수 있다. [7, pp721, pp967]로부터

$$\int_1^\infty (\sqrt{x^2 - 1}) e^{-\alpha x} J_\nu(\beta \sqrt{x^2 - 1}) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta^\nu (\alpha^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}} K_{\nu + \frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \quad (8)$$

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} \quad (9)$$

$$f(\alpha) = \left(\frac{m\alpha^2}{\Omega}\right)^m \frac{2}{\alpha \Gamma(m) \rho^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{k! \Gamma(m-k)} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4\alpha^2 m \rho}\right)^k \left[ (-1)^k e^{\frac{2m\alpha^2}{\Omega(1+\rho)}} + (-1)^m e^{\frac{2m\alpha^2}{\Omega(1-\rho)}} \right] \quad (10)$$

가산성 백색가우시안 잡음  $n(t)$ 가 포함된 수신신호는 식 (11)과 같이 표현된다. 여기서 신호성분  $A \cos \omega_c t$ 의 진폭  $A$ 가 식 (10)의 상관된 Nakagami 분포를 갖는 것으로 가정한다.

$$r(t) = A \cos \omega_c t + n(t) \quad (11)$$

식 (11)의 수신신호가 대역통과 여파기를 통과한 신호는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t) = A \cos \omega_c t + n_c \cos \omega_c t - n_s \sin \omega_c t = \sqrt{(A + n_c)^2 + n_s^2} \cos(\omega_c t + \tan^{-1} \frac{n_s}{A + n_c}) = R \cos(\omega_c t + \theta) \quad (12)$$

여기서  $R$ 과  $\theta$ 는 각각 포락선과 위상오류를 나타내고 있으며,  $n_c$ 와  $n_s$ 는 서로 독립이고 평균이 0이며 분산이  $\sigma_n^2$ 인 가우시안 잡음을 나타낸다.

여기서 새로운 변수  $x, y$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$\left. \begin{aligned} x &= A + n_c = R \cos \theta \\ y &= n_s = R \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$A$ 와  $n_c$ 는 서로 독립이므로  $x$ 에 대한 확률 밀도 함수는 두 확률 밀도 함수의 컨볼루션(convolution)이 된다<sup>[12]</sup>.

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty f_\alpha(\alpha) f_{N_c}(x - \alpha) d\alpha = \int_0^\infty \left(\frac{m\alpha^2}{\Omega}\right)^m \frac{2}{\alpha \Gamma(m) \rho^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{k! \Gamma(m-k)} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4\alpha^2 m \rho}\right)^k \left[ (-1)^k e^{\frac{2m\alpha^2}{\Omega(1+\rho)}} + (-1)^m e^{\frac{2m\alpha^2}{\Omega(1-\rho)}} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_c}^2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma_{n_c}^2}} d\alpha \quad (14)$$

$x$ 와  $y$ 가 서로 독립이므로  $x$ 와  $y$ 의 두 결합확률밀도함수 (Joint Probability Density function)는 두 확률밀도함수의 곱이 된다. 두 확률밀도 함수를 곱하여 정리하면 식 (15)와 같다.

$$f(x, y) = f(x)f(y)$$

$$= \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{1}{\pi\sigma_n^2\Gamma(m)\rho^m} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_n^2}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{k!\Gamma(m-k)} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4m\rho}\right)^k$$

$$\int_0^\infty \left[ \begin{aligned} &(-1)^k e^{-\left(\frac{2m}{\Omega(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)\alpha^2} e^{-\frac{x\alpha}{2\sigma_n^2}} \alpha^{2m-2k-1} \\ &+ (-1)^m e^{-\left(\frac{2m}{\Omega(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)\alpha^2} e^{-\frac{x\alpha}{2\sigma_n^2}} \alpha^{2m-2k-1} \end{aligned} \right] d\alpha \quad (15)$$

위 식으로부터 식 (13)의 관계를 이용하여  $R$ 과  $\theta$ 의 결합 확률 밀도 함수로 변환하면 식 (16)이 된다.

$$f(r, \theta) = f_{x,y}(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) |J|$$

$$= \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{r}{\pi\sigma_n^2\Gamma(m)\rho^m} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{k!\Gamma(m-k)} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4m\rho}\right)^k$$

$$\int_0^\infty \left[ \begin{aligned} &(-1)^k \alpha^{2m-2k-1} e^{-\left(\frac{2m}{\Omega(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)\alpha^2} e^{-\frac{r\cos\theta\alpha}{2\sigma_n^2}} \\ &+ (-1)^m \alpha^{2m-2k-1} e^{-\left(\frac{2m}{\Omega(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)\alpha^2} e^{-\frac{r\cos\theta\alpha}{2\sigma_n^2}} \end{aligned} \right] d\alpha \quad (16)$$

여기서  $J$ 는 Jacobian 이다.

주변확률밀도함수(Marginal Probability Density Function)의 정의<sup>[12]</sup>에 의하여 다음의 관계식 (17)과 (18)을 이용  $\theta$ 의 전 구간에 대해 식 (16)을 적분하면 포락선  $R$ 에 대한 확률 밀도 함수를 구할 수 있다

$$\int_0^\pi e^{\pm i\beta\cos x} dx = \pi J_0(i\beta), \quad i = \sqrt{-1}$$

:Bessel 함수 (17)

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x} J_\nu(\beta x) dx$$

$$= \frac{\beta^\nu \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)} \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+1; -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (18)$$

[7, pp, 716]

여기서는  ${}_1F_1(\alpha, \beta, \gamma)$ 초기하 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$${}_1F_1(\alpha, \beta, x) = \sum_{i=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha+i)\Gamma(\beta)x^i}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+i)i!},$$

$\beta \neq 0, -1, -2, \dots$  (19)

최종적으로 상관된 Nakagami 페이딩 및 백색가우시안 잡음 환경에서의 수신신호 포락선의 확률 밀도 함수를 식 (20)과 같이 얻을 수 있다.

$$f_R(r) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(r, \theta) d\theta$$

$$= \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{r}{\sigma_n^2 \rho^m} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)k!} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4m\rho}\right)^k$$

$$\left[ \begin{aligned} &(-1)^k \left(\frac{2m}{\Omega(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} \left[ {}_1F_1\left[m-k; 1; -\frac{r^2}{2\sigma_n^2} \left(1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1+\rho)}\right)\right] \right. \\ &\left. + (-1)^m \left(\frac{2m}{\Omega(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} \left[ {}_1F_1\left[m-k; 1; -\frac{r^2}{2\sigma_n^2} \left(1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1-\rho)}\right)\right] \right] \right] \quad (20)$$

확률 밀도 함수로서의 타당성을 검증하기 위하여 먼저 포락선의 확률밀도함수를 포락선 전 구간에 대하여 적분하면 즉  $f_R(r)$ 의 0차 모멘트( $0^{\text{th}}$  Moment),  $\int_0^\infty f_R(r) dr$  구하여 그 값이 1이 되는 것을 확인한다.

적분식에서  $r^2 = t$ 로 치환( $2rdr = dt$ )하고 초기하함수 정의식 (19) 및 아래의 감마함수의 적분 정의식인 식 (21)을 이용하여

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\mu x} dx = \frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu} \quad (21)$$

0차 모멘트를 계산하고 정리하면 식 (22)를 얻을 수 있다.

$$\int_0^\infty f_R(r) dr$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!} \left[ \left( \frac{1+\rho}{2\rho} \right)^m \left( -\frac{1-\rho}{2\rho} \right)^k + \left( -\frac{1-\rho}{2\rho} \right)^m \left( \frac{1+\rho}{2\rho} \right)^k \right] \quad (22)$$

$n = m-1$ 로 두면

$$= \sum_{k=0}^n C_k \left[ \left( \frac{1+\rho}{2\rho} \right)^{n+1} \left( -\frac{1-\rho}{2\rho} \right)^k + \left( -\frac{1-\rho}{2\rho} \right)^{n+1} \left( \frac{1+\rho}{2\rho} \right)^k \right] \quad (23)$$

[8]에서

$$\sum_{k=0}^n C_k (x^{n+1}(1-x)^k + (1-x)^{n+1}(x)^k) = 1 \quad (24)$$

이므로

식 (23)은 1의 값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 즉 식 (20) 포락선 분포의 0차 모멘트가 1로 되어 확률밀도 함수로서의 조건을 만족한다.

또한 백색가우스 잡음이 0으로 접근할 때 즉  $\lim_{\sigma_n^2 \rightarrow 0} I$  일 때 식 (20)이 신호성분만의 식 (10)이 됨을 보임으로써 식 (20)의 타당성을 검증 하고자 한다.

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = e^z {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma, -z), \quad (25)$$

식 (25)를 이용하여 정리하면

$$\lim_{\sigma_n^2 \rightarrow 0} I f_R(r) = \lim_{\sigma_n^2 \rightarrow 0} \left( \frac{m}{\Omega} \right)^m \frac{r}{\sigma_n^2 \rho^m} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)k!} \left( \frac{\Omega(1-\rho^2)}{4m\rho} \right)^k$$

$$\left[ (-1)^k \left( \frac{2m}{\Omega(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2} \right)^{k-m} e^{-\frac{-2r^2m}{\Omega(1+\rho)+4m\sigma_n^2}} \right. \\ \left. {}_1F_1 \left[ m-k; 1; \frac{r^2}{2\sigma_n^2 \left( 1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1+\rho)} \right)} \right] \right. \\ \left. + (-1)^m \left( \frac{2m}{\Omega(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2} \right)^{k-m} e^{-\frac{-2r^2m}{\Omega(1-\rho)+4m\sigma_n^2}} \right. \\ \left. {}_1F_1 \left[ m-k; 1; \frac{r^2}{2\sigma_n^2 \left( 1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1-\rho)} \right)} \right] \right] \quad (26)$$

식 (27)을 이용하여 식 (26)의 극한을 계산하고  $r$  대신  $\alpha$ 를 대입하면 신호가 페이딩에만 영향을 받았을 때의 식(10)으로 환원된다는 것을 알 수 있다.

$$\lim_{\sigma_n^2 \rightarrow 0} I f_R(\alpha, \beta, -z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} z^{-\alpha}, \quad (27)$$

Nakagami 페이딩지수  $m=1$ 일때 위에서 식 (20)에 대입하고 정리하면

$$f_R(r) = \frac{1+\rho}{\rho} \frac{r}{\sigma^2(1+\rho)+2\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma^2(1+\rho)+2\sigma_n^2}} - \frac{1-\rho}{\rho} \frac{r}{\sigma^2(1-\rho)+2\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma^2(1-\rho)+2\sigma_n^2}} \quad (28)$$

로 되며, 이는 상관된 Rayleigh 페이딩 및 백색가우시안잡음 환경에서의 포락선확률분포식이 된다. 다이버시티 방식을 사용하지 않은 경우 즉  $\rho=1$ 일 즉 송신다이버시티 기법을 사용하지 않았을 경우 식 (28)은 Rayleigh 확률분포가 되는 것도 쉽게 알 수 있다.<sup>[10]</sup>

앞에서 분석한 조건들은 Nakagami 페이딩 및 백색 가우시안 잡음환경에서 유도된 포락선의 확률밀도함수가 pdf로서 타당함을 보여 주고 있다.

그림2.와 그림3.은  $Q/2 = 1$ 로 고정하고 확률밀도 함수를 그린 것이다.

그림2. 는  $\rho = 0.5, m=2$ 일때 신호 대 잡음비에 따른 확률밀도함수를 그린 것이다. 그림에서 보면 신호 대 잡음비가 클수록 확률밀도가 더 첨예하게 모여 있음을 알 수 있다.

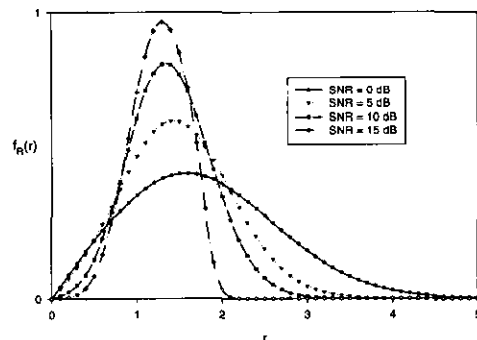


그림 2. 포락선의 분포함수( $\rho = 0.5, m=2$ )

그림3. 은  $SNR=10dB, m=2$ 일때 상관계수  $\rho$ 에 따른 확률밀도함수를 그린 것이다. 상관계수  $\rho$  값이 0에 가까울수록 더 첨예하게 모여 있음을 보여준다.

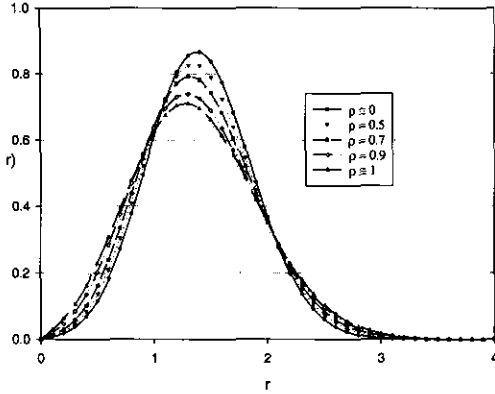


그림 3. 포락선의 분포함수(SNR=10dB,m=2)

#### IV. 상관된 Nakagami 환경에서 비동기 시스템의 성능분석

페이딩이 존재하는 통신 시스템에서 오류 확률을 구할 때에는 먼저 가산성 백색 가우시안 잡음만이 존재할 때의 오류 확률을 구한 후, 얻어진 오류 확률식을 해당 페이딩의 확률 밀도 함수로 평균을 취하여 구하는 방법이 일반적이다.<sup>[10]</sup> 그러나 이 논문에서는 앞장에서 구한 수신 신호의 포락선의 분포 함수를 이용하여 비동기 M-ary FSK, DPSK 및 ASK 송신다이버시티 시스템의 성능을 새로운 방법으로 해석한다.

##### 1. M-ary FSK 시스템의 오류확률

송신단에서  $s_i(t)$ 가 전송되었다고 가정하면 비동기 M-ary FSK 수신기에서의 결정 변수  $R_1$ 은 다음식 (29)와 같이 앞에서 유도한 Nakagami 페이딩 및 백색가우시안 잡음환경에서의 포락선의 확률밀도 함수가 된다.<sup>[10]</sup>

$$f_R(r_1) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{r_1}{\sigma_n^2 \rho^m} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma_n^2}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)k!} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4m\rho}\right)^k$$

$$\left[ (-1)^k \left(\frac{2m}{\Omega(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} {}_1F_1\left[m-k; 1; \frac{r_1^2}{2\sigma_n^2 \left(1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1+\rho)}\right)}\right] \right. \\ \left. + (-1)^m \left(\frac{2m}{\Omega(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} {}_1F_1\left[m-k; 1; \frac{r_1^2}{2\sigma_n^2 \left(1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1-\rho)}\right)}\right] \right] \quad (29)$$

결정 변수  $R_N$ 는 잡음 성분 뿐이므로 다음과 같은 Rayleigh 분포를 따르게 된다.

$$f_R(r_N) = \frac{r_N}{\sigma_n^2} e^{-r_N^2/2\sigma_n^2}, N=2,3,\dots,M, r_N \geq 0 \quad (30)$$

M-ary FSK 시스템에서는 일 때 오류가 발생한 것이므로 오류 확률은 다음과 같은 과정을 통하여 구할 수 있다<sup>[10]</sup>.

$$P(E) = P(R_1 < R_2, R_1 < R_3, \dots, R_1 < R_N | R_1) \\ = \int_0^\infty f(r_1) \left[ \int_{r_1}^\infty f(r_N) dr_N \right]^{M-1} dr_1 \quad (31)$$

해당 함수를 위 식에 대입하고 [ ]안의 적분을 먼저 계산하며, 초기함수를 식 (19)로 풀어 정리하면 (32)식을 얻을 수 있다.

$$P(E) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{1}{M\rho^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)k!} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4m\rho}\right)^k$$

$$\left[ (-1)^k \left(\frac{2m}{\Omega(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} \sum_{i=0}^{m-k} \frac{\Gamma(m-k+i)}{\Gamma(m-k)\Gamma(i+1)i!} \left(\frac{1}{M \left[1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1+\rho)}\right]}\right)^i \int_0^\infty \frac{M r_i}{\sigma_n^2} e^{-\frac{M r_i^2}{2\sigma_n^2}} \left(\frac{M r_i^2}{2\sigma_n^2}\right) dr_i \right. \\ \left. + (-1)^m \left(\frac{2m}{\Omega(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} \sum_{i=0}^{m-k} \frac{\Gamma(m-k+i)}{\Gamma(m-k)\Gamma(i+1)i!} \left(\frac{1}{M \left[1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1-\rho)}\right]}\right)^i \int_0^\infty \frac{M r_i}{\sigma_n^2} e^{-\frac{M r_i^2}{2\sigma_n^2}} \left(\frac{M r_i^2}{2\sigma_n^2}\right) dr_i \right] \quad (32)$$

식 (32)적분항에서  $\frac{M r_i^2}{2\sigma_n^2} = t$  로 치환하면,  $\frac{M r_i}{\sigma_n^2} dr_i = dt$  로 되며 적분항은  $\Gamma(i+1)$ 로 되어 식 (33)을 얻는다.

$$P(E) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{1}{M\rho^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)k!} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4m\rho}\right)^k$$

$$\left[ (-1)^k \left(\frac{2m}{\Omega(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} \sum_{i=0}^{m-k} \frac{\Gamma(m-k+i)}{\Gamma(m-k)i!} \left(\frac{1}{M \left[1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1+\rho)}\right]}\right)^i \right. \\ \left. + (-1)^m \left(\frac{2m}{\Omega(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} \sum_{i=0}^{m-k} \frac{\Gamma(m-k+i)}{\Gamma(m-k)i!} \left(\frac{1}{M \left[1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1-\rho)}\right]}\right)^i \right] \quad (33)$$

한편,

$$\frac{1}{M \left[ 1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1+\rho)} \right]} = \alpha \quad \frac{1}{M \left[ 1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1-\rho)} \right]} = \beta \quad \text{라 두}$$

고 감마함수의 적분정의식을 이용하면

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m-k+i)}{\Gamma(m-k)!} \left( \frac{1}{M \left[ 1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1+\rho)} \right]} \right)^i \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-k)} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{t^{m-k+i-1}}{i!} e^{-t} dt (\alpha)^i \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-k)} \int_0^{\infty} t^{m-k-1} e^{-t} dt \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (t\alpha)^i \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-k)} \int_0^{\infty} t^{m-k-1} e^{-(1-\alpha)t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-k)} \left( \frac{1}{1-\alpha} \right)^{m-k} \int_0^{\infty} x^{m-k-1} e^{-x} dx \\ &= \left( \frac{1}{1-\alpha} \right)^{m-k} \\ &= \left( \frac{M(\Omega(1+\rho) + 4m\sigma_n^2)}{\Omega(1+\rho)(M-1) + 2Mm\sigma_n^2} \right)^{m-k} \end{aligned} \quad (34)$$

로 되고 마찬가지로 방법으로

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m-k+i)}{\Gamma(m-k)!} \left( \frac{1}{M \left[ 1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1-\rho)} \right]} \right)^i = \left( \frac{1}{1-\beta} \right)^{m-k} \\ &= \left( \frac{M(\Omega(1-\rho) + 4m\sigma_n^2)}{\Omega(1-\rho)(M-1) + 2Mm\sigma_n^2} \right)^{m-k} \end{aligned} \quad (35)$$

로 된다.

식 (34)와 (35)를 식 (33)에 대입하고 신호대 잡음비

$$S = \frac{\Omega/2}{\sigma_n^2} = \frac{\Omega}{2\sigma_n^2} \text{로 나타내면 M-ary FSK 오류확률식은 식 (36)과 같다.}$$

$$P(E) = \left( \frac{m}{2} \right)^m \frac{1}{M\Gamma(m)\rho^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{k!} \left( \frac{(1-\rho^2)}{2m\rho} \right)^k$$

$$\times \left[ \begin{aligned} & (-1)^k \left( \frac{2M(1+\rho)}{(1+\rho)(M-1)S + 2Mm} \right)^{k-m} \\ & + (-1)^m \left( \frac{2M(1-\rho)}{(1-\rho)(M-1)S + 2Mm} \right)^{k-m} \end{aligned} \right] \quad (36)$$

(36)식에  $M=2, m=1$ 을 대입하면, 상관된 Rayleigh 환경에서 Binary FSK 오류식(37)이 된다.

$$P(E) = \frac{1+\rho}{\rho} \frac{1}{(1+\rho)S+4} - \frac{1-\rho}{\rho} \frac{1}{(1-\rho)S+4} \quad (37)$$

충분히 상관 되었을 경우 즉  $\rho \cong 1$ 일 때 채널 환경은 Rayleigh가 되며 이때 오류 식은 식 (38)이 되며, 이는 잘 알려진 Rayleigh 환경에서의 비동기 FSK의 오류식이 된다.<sup>[10]</sup>

$$P(E) = \frac{1}{S+2} \quad (38)$$

그림4.는 비동기 M-ary FSK 시스템의 신호대 잡음비, 상관계수 및 페이딩지수의 변화에 따른 오류 확률을 그린 그래프이다. 여기서  $M=2$ 로 고정하였다. 그래프는 상관계수  $\rho$ 가 0에 접근할수록 시스템 성능이 좋아지고, 페이딩지수  $m$ 이 커질수록 성능이 좋아지는 것을 볼 수 있다.  $10^{-4}$  오류 확률을 기준으로 그림4.를 살펴보면 완전상관 되어 STTD 기법을 사용하지 않은 경우 즉  $\rho=1$ 인 경우에 비해서  $\rho=0$ , 즉 비상관(Uncorrelated)된 경우 약 15dB의 신호대 잡음비 이득을 얻을 수 있음을 보여주고 있다. 그림5.은  $\rho=0.5, m=2$ 인 경우  $M$  값의 변화에 따른 오류확률을 그린 그래프이다.

$M$ 이 클수록 성능이 좋아짐을 볼 수 있다.

## 2. DPSK 시스템의 오류 확률

DPSK 최적 수신기에서 결정변수를 다음과 같이 정의한다<sup>[10]</sup>.

$$R_1 = \sqrt{(AT/2 + w_1)^2 + w_3^2} \quad (39)$$

$$R_2 = \sqrt{w_2^2 + w_4^2} \quad (40)$$

여기서  $w_i$ 는 서로 독립이고 평균이 0이며 분산이  $\sigma_n^2 = \frac{N_0 T}{8}$  인 가우시안 랜덤 변수이다.

$A' = \frac{T}{2} A$  라 두면

$\Omega' = E[A'^2] = \frac{T^2}{4} E[A^2] = \frac{T^2}{8} \Omega$  가 되므로 두 결정 변수의 분포는 다음과 같다.

$$f_r(r_1) = \left(\frac{m}{\Omega'}\right)^m \frac{r_1}{\sigma_n'^2 \rho^m} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma_n'^2}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)k!} \left(\frac{\Omega'(1-\rho^2)}{4m\rho}\right)^k$$

$$\left[ (-1)^k \left(\frac{2m}{\Omega'(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n'^2}\right)^{k-m} {}_1F_1\left[m-k; 1; -\frac{r_1^2}{2\sigma_n'^2 \left(1 + \frac{4m\sigma_n'^2}{\Omega'(1+\rho)}\right)}\right] \right.$$

$$\left. + (-1)^m \left(\frac{2m}{\Omega'(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n'^2}\right)^{k-m} {}_1F_1\left[m-k; 1; -\frac{r_1^2}{2\sigma_n'^2 \left(1 + \frac{4m\sigma_n'^2}{\Omega'(1-\rho)}\right)}\right] \right] \quad (41)$$

$$f_r(r_2) = \frac{r_2}{\sigma_n'^2} e^{-r_2^2/2\sigma_n'^2} \quad r_2 \geq 0 \quad (42)$$

$R_2 > R_1$  일 때 오류가 발생한 것이므로 비동기 M-ary FSK 시스템과 비슷한 전개과정을 통하여 오류 확률을 구하면 식 (43)과 같다

$$P(E) = \left(\frac{m}{2}\right)^m \frac{1}{2\Gamma(m)\rho^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{k!} \left(\frac{(1-\rho^2)}{2m\rho}\right)^k$$

$$\left[ (-1)^k \left(\frac{2(1+\rho)}{(1+\rho)S+2m}\right)^{k-m} + (-1)^m \left(\frac{2(1-\rho)}{(1-\rho)S+2m}\right)^{k-m} \right] \quad (43)$$

로 되며,  $m=1$ 인 경우 상관된 Rayleigh 채널에서의 DPSK 시스템의 오율식은 식(44)가 된다.

$$P(E) = \frac{1+\rho}{2\rho} \frac{1}{(1+\rho)S+2} - \frac{1-\rho}{2\rho} \frac{1}{(1-\rho)S+2} \quad (44)$$

FSK 시스템에서와 마찬가지로  $\rho=1$ 로 두면, 즉 Rayleigh 채널에서의 오율식은

$$P(E) = \frac{1}{2S+2} \quad (45)$$

로 되며 이 또한 잘 알려진 Rayleigh 페이딩 환경에서

DPSK 시스템의 오류 확률식 임을 확인할 수 있다.<sup>[10]</sup>

그림6. 은 식 (43)을 신호 대 잡음 비, 상관계수 및 페이딩지수를 변화 시키면서 오류 확률을 그린 그림이다. 그림4. 의 FSK시스템에 비해 3dB 성능이 개선됨을 보여주고 있다.

### 3. 비동기 ASK의 오류 확률

ASK 방식에서 송신 신호는 다음과 같다<sup>[9]</sup>.

$$\begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_c t \\ s_2(t) = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (46)$$

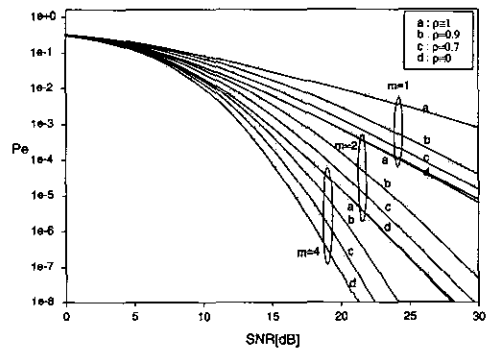


그림 4. 비동기 FSK의 오류 확률(M=2)

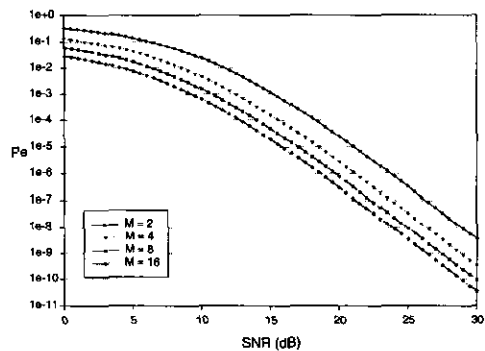


그림 5. 비동기 M-ary FSK의 오류확률(m=2, rho=0.5)

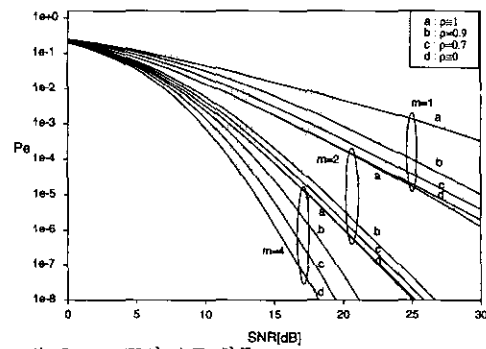


그림 6. DPSK의 오류 확률



비동기 ASK 수신기에서 포락선 검파기와 샘플러 (sampler)를 지난 후의 신호를 결정변수  $R$ 이라 정의 한다. 송신단에서  $s_1(t)$ 가 전송되었을 경우 결정 변 수는 다음과 같은 분포를 갖는다.

$$f(r|s_1) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{r}{\sigma_n^2 \rho^m} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)k!} \left(\frac{\Omega(1-\rho^2)}{4m\rho}\right)^k$$

$$\left[ (-1)^k \left(\frac{2m}{\Omega(1+\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} {}_1F_1\left[m-k; 1; \frac{r^2}{2\sigma_n^2 \left(1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1+\rho)}\right)}\right] \right. \\ \left. + (-1)^m \left(\frac{2m}{\Omega(1-\rho)} + \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)^{k-m} {}_1F_1\left[m-k; 1; \frac{r^2}{2\sigma_n^2 \left(1 + \frac{4m\sigma_n^2}{\Omega(1-\rho)}\right)}\right] \right] \quad (47)$$

$s_2(t)$ 가 전송 되었을 경우에 수신기에는 잡음만이 수 신되므로 결정 변수  $R$ 은 Rayleigh분포를 갖게 된다.

$$f(r|s_2) = \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-r^2/2\sigma_n^2} \quad (48)$$

$s_1(t)$ 와  $s_2(t)$ 가 발생할 확률이 동일하다고 가정하면 우도비 판정(Likelihood Ratio Test)에 의하여 임계 값을 다음식으로부터 구할 수 있다<sup>[9]</sup>.

$$\Lambda(r) = \frac{f(r|s_2)}{f(r|s_1)} \quad (49)$$

이 식을 만족하는 근은 수치적으로 구할 수 있으며, 근은 SNR에 따라서 다른 값을 갖게 된다. 위의 식을 만족하는 근을  $r_{th}$ 라 하면 오류 확률은 다음식 으로부터 구할 수 있다.

$$P(E) = \frac{1}{2} \int_0^{r_{th}} f(r|s_1) dr + \frac{1}{2} \int_{r_{th}}^{\infty} f(r|s_2) dr \quad (50)$$

이렇게 식 (50)을 수치적으로 구한 값으로부터 오류 확률 그래프를 그릴 수 있다.

그림 7.은 신호 대 잡음 비, 상관계수  $\rho$  및 페이 딥지수  $m$ 을 변화 시키면서 그린 그림이다. FSK, DPSK시스템에서와 마찬가지로  $\rho$  값이 적을수록 성능이 좋아지고  $m$ 값이 커질수록 성능이 좋아지는 것 을 볼 수 있다.

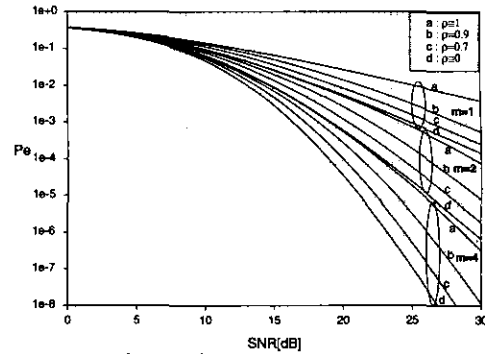


그림 7. ASS의 오류 확률

### V. 결론

본 논문에서는 송신다이버시티 기법을 사용할 경 우 발생하는 상관된 Nakagami페이딩 및 협대역 가 우시안 잡음 환경에서 수신 신호의 포락선의 확률 밀도 함수를 유도하였다. 유도된 확률밀도함수가 타 당함을 확인하기 위하여 여러 경우를 통하여 검증 하였다. 또한, 새로 유도된 포락선의 확률 밀도 함수를 이용하여 상관된 Nakagami페이딩 환경에서 비동기 M-ary FSK, DPSK 및ASK시스템의 성능을 새로운 방법으로 해석할 수 있는 방법을 제시하였 고, 비동기 M-ary FSK, DPSK시스템의 정확한 오 류확률식을 유도 하였다. 그리고, 각 시스템을 성능 을 여러 경우로 나누어 그래프로 그려 비교 분석하 였으며, 그 결과 또한 타당함을 보였다.

### 참고 문헌

- [1] A. Hottinen and R. Wichman, "Transmit Diversity Techniques for WCDMA", 5<sup>th</sup> Annual Smart Antenna Workshop, July 23-24 1998, Stanford.
- [2] S. M. Alamouti, "A simple transmit antenna diversity technique for wireless communications", *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, 1998.
- [3] M. Nakagami, "The m-distribution - A general formula of intensity distribution of rapid fading," in *Statistical Methods of Radio Wave Propagation*, W. C. Hoffman (ed.), pp. 3-36, Pergamon Press, New York, 1960
- [4] A. A. Abu-Dayya and N. C. Beaulieu, "Analysis of switched diversity systems on

generalized-fading channels”, *IEEE Transactions on Communication*, vol. COM-42, pp. 2959-2966, Nov. 1994.

[5] T. Aulin, “Characteristic of a digital mobile radio channel,” *IEEE Trans. Vehi.*, VT-30, pp. 45-53, Feb. 1981

[6] H. Suzuki, “A statistical model for urban multipath channels with random delay,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp. 673-680, July 1977

[7] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Inc., 1965

[8] Gosfer, R.W. Item 42 in Beeler, M.; Gosper, R.W.; and Schroepfel, R. Hakmem. Cambridge, MA: *MIT Artificial Intelligence Laboratory*, Memo AIM-239, p.16, Feb. 1972.

[9] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, Part I, John Wiley & Sons, Inc., 1968

[10] R. E. Ziemer and W. H. Tranter, *Principles of Communications*, Houghton Mifflin Company, 1995

[11] J.B. Thomas, *An Introduction to Statistical Communication Theory*, New York, John Wiley & Sons Inc., 1968.

[12] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1982.

[13] 임채현, “Nakagami 페이딩채널에서 수신 신호의 포락선 분포” *한양대학교 석사논문*, 1998.

여민기 (Min-Ki Yeo)

정회원



1983년 2월 : 한양대학교 전자통신공학과 학사

1985년 2월 : 한양대학교대학원 전자통신공학과 석사

1984년 12월~2000년 3월 : 삼성전자 통신연구소 연구원

1993년 3월~현재 : 한양대학원 전자통신공학과 박사과정

<주관심 분야> Modulation, Detection, Estimation & Mobile Comm.

한영열 (Young-Yearl Han)

정회원

통신학회 논문지 제 xx권 제 xx호 참조