

# 위상최적화에 대한 개론

이 상 진\*

## 1. 서 언

고대사회로부터 인간은 부족한 자원으로 인해 생활 속에서 일어나는 여러 가지 일들을 최소한의 비용으로 해결하기 위해 노력해 왔다. 이러한 최적화의 개념은 현재 과학, 공학 그리고 경제 등 많은 분야에 도입되어 지고 있다.

최적화 문제는 수학적인 복잡함 때문에 최근까지도 실용화에 어려움이 있어 학구적인 관심에만 머물렀었다. 그러나 유한요소법이 기존의 해석적 방법을 대체 함에 따라 공학적 문제에 접근하는 시각이 크게 달라지게 되었고, 적은 비용으로 고성능의 컴퓨터를 사용할 수 있게 되어 개선된 최적화 알고리즘의 개발이 용이하게 되면서 최적화는 공학자 들에게 이해하기 쉬운 형태의 학문으로 발전하게 되었다.

구조공학 분야의 최적화는 일반적으로 주어진 조건에 대한 최적의 구조적 형태나 크기를 결정하는 것이다. 이는 Zienkiewicz교수<sup>1)</sup>가 구조물의 형상을 최적화하기 위하여 유한요소법을 최적화 과정에 도입한 이래 구조물의 형상을 표현하는 기법, 설계변수에 대한 민감도를 계산하는 방법

그리고 최적화 알고리즘 등의 개발로 발전을 거듭하여 왔다.

그런데 구조물의 형상과 크기 최적화<sup>2)</sup>는 그 구조물의 초기 위상이 최적화 후까지도 고정되어 있게 된다. 따라서 주어진 하중과 경계조건에 알맞은 구조물의 위상을 찾기 위한 최적화기법에 대한 연구가 최근에 활발해지고 있다. 초기위상을 개선하기 위해 개발된 위상최적화기법은 구조물의 형상과 크기를 동시에 변화시키는 방법이며 궁극적으로는 구조물에 사용된 재료를 재분배함으로써 구조물의 새로운 위상을 찾아내는 방법이다. 위상최적화는 형상과 크기 최적화에서 사용되어온 구조물의 좌표와 두께같은 설계변수를 사용하지 않고, 구조물을 구성하고 있는 다공성 물질내에 존재하는 빈 공간의 크기를 최적화를 위한 설계변수로 이용하게 된다. 또한 구조물에 사용된 초기의 재료양을 최적화 전 과정을 통하여 일정하게 유지시킨다. 이러한 개념의 도입으로 기존의 형상과 크기 최적화에서 바꿀 수 없었던 위상을 변화시킬 수 있게 되었다. 위상최적화의 개발은 또한 기존의 구조 최적화의 개념을 구조 설계 최적화의 개념으로 발전시키게되었으며 더 나아가

\* 본 학회 편집위원 · 한국원자력연구소, 선임연구원

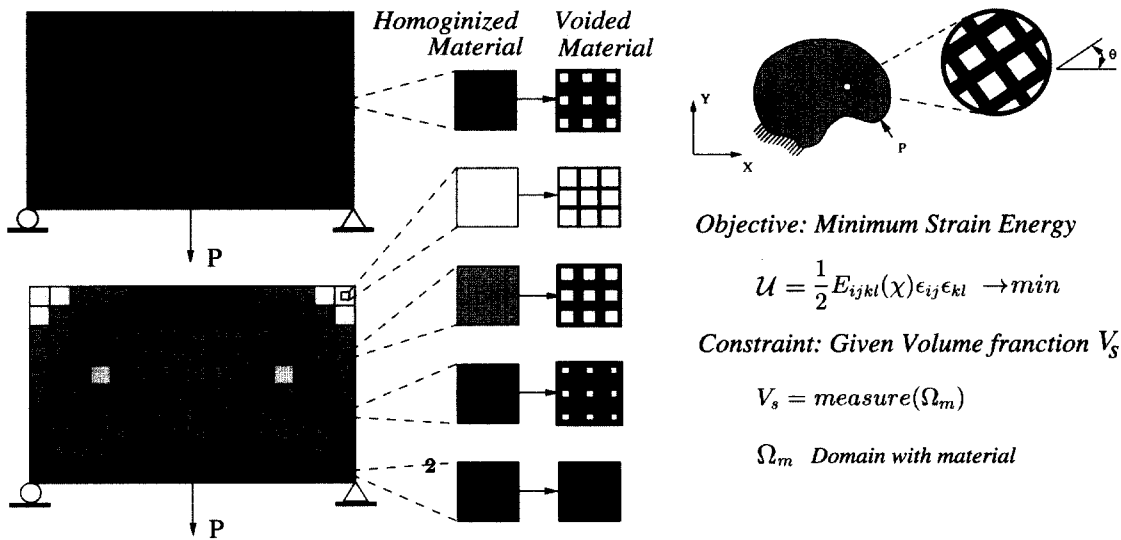


그림 1 Basic concept of topology optimization

형상, 크기최적화 1법과 병용하여 통합설계최적화 과정(Integrated design optimization process)<sup>3)</sup>의 개발을 가능하게 하였다.

본 고는 구조물의 설계 최적화에 많은 기여를 하고 있는 위상최적화를 두 편의 원고로 나누어 소개하고자 한다. 첫 번째 원고에서는 위상최적화에 사용되는 재료의 종류와 기본적 이론에 대하여 기술하고 두 번째 원고에서는 판에 대한 위상최적화의 적용에 대하여 기술하고자 한다.

## 2. 위상최적화의 기본 개념

위상최적화의 기본 개념은 주어진 설계영역 내에서 물질을 최적상태로 재분배하여 구조물의 강성을 최대화하는 물질분포 함수  $E_{ijkl}(\chi)$ 를 찾아내는 것이다. 즉 전체 설계 영역  $\Omega$ 내에서 변형에너지를 최소화하면서 동시에 임의의 구속조건을 만족하는 최적의 물질 분포함수  $E_{ijkl}(\chi)$ 를 구하는 것이다. 따라서 위상최적화문제의 목적함수는 최소화해야 하는 구조물의 변형에너지로 하고, 그 구속조건은 초기의 물질의 밀도가 일정하게 유지되는 것으로 정의된다. 이를 수식으로 표현하면 다음<sup>4)</sup>과 같다.

$$\text{Minimize } U = \frac{1}{2} E_{ijkl}(\chi) \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$$

subject to  $Vol = \text{measure}(\Omega_m)$  (1)

여기서  $\Omega_m$ 은 물질이 분포하는 영역을 나타내고 영역  $\Omega_m$ 의 부피는 초기 구속조건으로 사용된다.

위상최적화의 개념은 그림 1과 같이 도시할 수 있으며 그림에서 단순보는 가로와 세로로  $16 \times 10$ 개의 유한요소로 이산화 되어있다. 위상최적화는 일반적으로 균질하게 재료가 분포되어 있는 상태로 시작되며 최적화과정을 통하여 각 요소가 다른 재료밀도를 가지게 된다. 하지만 이미 존재하는 구조물의 새로운 위상을 찾을 경우 각 유한요소의 재료밀도가 다를 수 있다.

## 3. 위상최적화에 사용되는 물질의 정식화

위상최적화는 물질이 차 있는 부분과 없는 부분으로 이루어진 비 등질인 단위셀이 구조물에 반복적으로 분포되어 있다는 가정<sup>2)</sup>을 전제로 한다. 단위셀의 반복은 물질의 주기성과 관련이 있는데 이는 물리학적인 측면으로 보면 물질이 원자나 분자의 반복된 형태로 나타나는 것으로도 설명되어 질 수 있다. 유한요소법을 사용하면 설계영역이 이산화되고 하나의 유한요소가 하나의 셀로 표현된다. 따라서 구조물의 전체 설계영역  $\Omega$

는 셀이 반복되어진 것으로 간주 할 수 있다. 본 절에서는 이산화된 영역에서 요소  $e$ 에 대한 재료 모델에 대하여 기술하고자 한다.

### 3.1 가(假) 등질화 된 재료모델

위상최적화의 문제는 전체설계영역  $\Omega$ 내에서 변화하는 탄성텐서  $E_{ijkl}$ 의 최적값을 찾아내는 문제로 정의되는데 이때  $E_{ijkl}$ 은 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$E_{ijkl}(x) = \chi(x) \bar{E}_{ijkl}(x) \quad (2)$$

여기서  $\bar{E}_{ijkl}(x)$ 는 물질을 구성하는 탄성계수이고,  $\chi(x)$ 는 설계영역  $\Omega$ 내에서 변화하는 물질의 존재유무를 나타내는 지시변수(Indicator factor)로 각 요소에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1 : \text{물질유} \\ &= 0 : \text{물질무} \end{aligned} \quad (3)$$

그러나 물질의 존재유무를 식 (3)에서 정의한 바와 같이 영이나 일의 양극의 값으로 정의하면 최적값은 물질이 존재하거나 또는 존재하지 않는 부분이 불연속적으로 나타나게 된다. 따라서 설계영역전체에 물질이 완만하게 분포되도록 하기 위해서 합성물질의 도입이 필요하게 된다. 즉 연속성이 있는 최적위상을 도출하기 위해서는 연속성을 가지는 밀도 함수  $\xi(x)$ 를 도입하여 탄성텐서를 다음과 같이 수정해야 한다.

$$E_{ijkl}(x) = \xi(x) \bar{E}_{ijkl}(x) \quad (4)$$

여기서  $0 \leq \xi(x) \leq 1$  이고  $x \in \Omega$ 이다. 이때 물질의 부피는 다음과 같다.

$$V_s = \xi(x) d\Omega \quad (5)$$

여기서  $V_s$ 는 초기에 정의된 물질의 부피이며 최적화과정 중 일정하게 유지된다.

밀도함수  $\xi(x)$ 를 도입함으로써 최적값이 연속성을 가질 수 있게 되나 위상최적화 결과는 뚜렷한 위상을 나타내지 않는다. 따라서 밀도함수를

적절한 형태로 조정할 필요가 있다. Rosvany<sup>2)</sup>는 밀도함수에 지수  $\gamma$ 를 도입하여 밀도함수를 수정하였으며 이는 위상최적화의 결과를 뚜렷하게 한다.

$$E_{ijkl}(x) = \xi^\gamma(x) \bar{E}_{ijkl}(x) \quad (6)$$

여기서  $\gamma$ 는 일반적으로  $\gamma \geq 1$ 으로 가정되며 주로 3에서 9사이의 값이 사용된다. 이때  $\gamma$ 의 값이 커질수록 최적화로부터 구해진 위상이 뚜렷하게 나타난다.

임의의 밀도함수  $\xi(x)$ 는 임의의 미소구조를 만드는 기하학적 형태와 관계가 있다. 그림 2에서와 같이 사각형 빈 공간을 포함하고 있는 단위셀의 경우 밀도함수  $\xi(x)$ 는  $\xi(x) = 1 - a(x) b(x)$ 로 나타낼 수 있으며 빈공간의 크기는 다음범위  $0 \leq a(x) \leq 1, 0 \leq b(x) \leq 1$ 를 가진다.

미소 구조체의 물체를 채우고 있는 부분이 등방성 물질이라고 가정하면  $D$ 행렬은  $a$ 와  $b$ 의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D := D^h(a, b) \quad (7)$$

여기서 요소내의 빈 공간의 크기를 결정하는 변수가  $a, b$ 이므로,  $D^h(a, b)$ 는 요소내부에 존재하는 빈 공간의 크기로 인한 영향이 고려된 탄성계수 행렬이며 다음과 같이 정의된다.

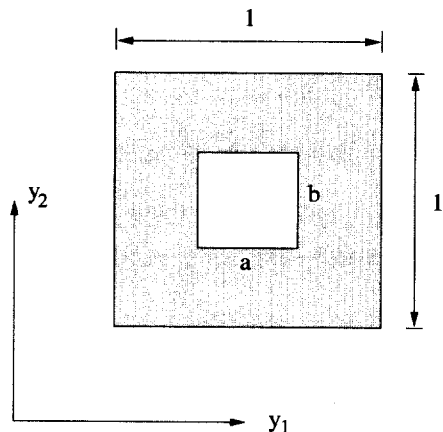


그림 2 Unit cell with rectangular hole in microscopic coordinate

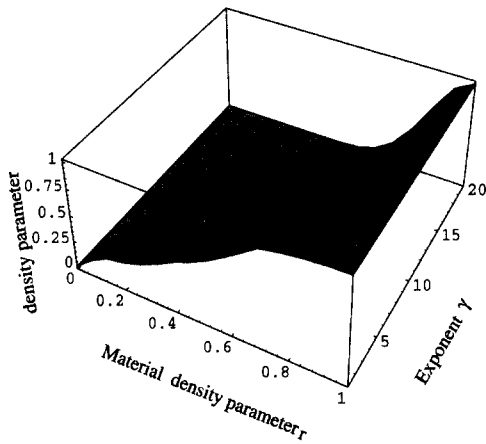


그림 3 Representation of density function

$$D^h(a, b) = (1 - ab)^\gamma D = \rho(a, b)^\gamma D \quad (8)$$

여기서  $D$  행렬은

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (8)에서 정의된 가 등질화된 물질은 구조체의 차원에 관계없이 쉽게 적용될 수 있는 장점이 있다. 그리고 밀도함수  $\rho(a, b)^\gamma$ 는 그림 3에 도시하였다.

미소 구조체를 채우고 있는 물질이 등방성이 아닐 경우, 물질의 이방성에 대한 각도  $\theta$  또한 설계변수가 된다. 따라서  $D^h$ 는  $a, b$  그리고  $\theta$ 의 함수로 표현되며 회전행렬을 사용하면  $D^h$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D^h(a, b, \theta) = R^T(\theta) D^h(a, b) R(\theta) \quad (10)$$

식 (10)은 설계변수  $\theta$ 를 도입함으로써 등가강성행렬이 재료축에 대한 값으로 표현되었다.

### 3.2 Rank- $\alpha$ 재료모델

무한히 작고 많은 수의 빈 공간이 물질 전체에 주기성을 갖고 분포되어 있다고 가정하면 등질화법을 이용하여 이 물질의 평균탄성계수를  $D^h$ 를

구할 수 있다.

등질화법의 수학적 이론에 따르면 주기성을 갖는 셀의 지배방정식<sup>4)</sup>은 다음과 같다.

$$\int_Y E_{ijk}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial \eta_i}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijk}(x, y) \frac{\partial \eta_i}{\partial y_j} dY \quad \forall \eta \in U_Y \quad (11)$$

여기서  $U_Y$ 는  $Y$ 방향으로 주기성을 갖는 가상변위장이고  $\eta \in U_Y$ 이다.

식 (11)의 지배방정식을 풀면 주기성을 갖는 탄성 텐서는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_{ijk}^h(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y [E_{ijk}(x, y) - E_{ijk}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q}] dY \quad (12)$$

미소 변위장  $\chi$ 가  $Y$ 방향으로 주기성을 가진다고 가정하면 위의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

식 (12)의  $k, l$  값을 조정하면 여러 가지의 탄성계수 값을 구할 수 있다. 2차원 문제의 경우  $k=l=1, k=l=2$  그리고  $k=1, l=2$ 의 세 경우로 나누어 탄성계수 값을 구할 수 있다.

예를 들면, 그림 4(a)에서 도시된 바와 같이 물질이 한 방향에 대한 주기성을 가질 경우 식 (12)의 등질화 방정식을 이용하여 Rank-1물질의  $D^h$ 를 구할 수 있다. 그리고 이렇게 생성된 Rank-1 물질을 반복함으로써 Rank-2에 대한  $D^h$ 를 구할 수 있다. 이렇게 생성된 Rank-2물질의 강성행렬은 다음과 같다.

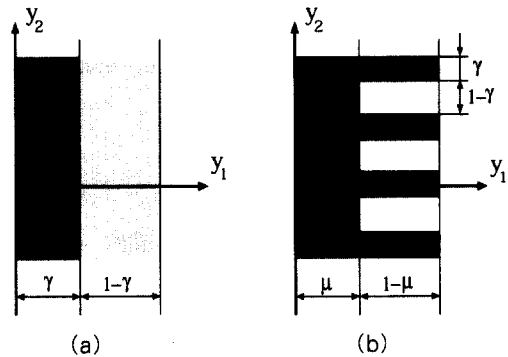


그림 4 (a) Rank-1 and (b) Rank-2 material

$$D^h = \frac{E}{(1-\mu) + \gamma\mu(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \gamma & \mu\gamma\nu & 0 \\ \mu\gamma\nu & \mu(1-\mu+\mu\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Rank-2물질은 식 (13)에서 표현된 바와 같이 전단강성을 가지지 않으므로 유한요소해석시 해의 특이성을 피하기 위하여 실제로는 식 (13)의 대각성분에 나타나는 영 값을 아주 작은 값으로 대체한다.

### 3.3 함수로 표현된 재료모델

단위셀이 일정한 모양을 가지는 경우 그 물질의 강성은 유한요소법을 사용하여 구할 수 있다. 유한요소내부에 존재하는 물질이 직교이방성이고,  $i=j=1$ 인 경우에 대해서는 식 (12)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\int_Y \boldsymbol{\epsilon}^T(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\eta}) dY = \int_Y \boldsymbol{\epsilon}^T(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{d}_1 dY \quad (14)$$

여기서  $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3]$ 는 강성행렬을 나타내며 벡터  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ 는  $\mathbf{d}_1 = \{D_{11}, D_{12}, 0\}^T$ ,  $\mathbf{d}_2 = \{D_{12}, D_{22}, 0\}^T$ ,  $\mathbf{d}_3 = \{0, 0, D_{66}\}^T$ 을 나타낸다. 이때 기호를 간략화하기 위하여  $E_{1111} = D_{11}$ ,  $E_{2222} = D_{22}$ ,  $E_{1122} = D_{12}$ ,  $E_{1212} = D_{66}$ ,  $\chi_1^{11} = \Phi_1$ ,  $\chi_2^{11} = \Phi_2$ 로 가정하면 식 (12)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$D_{11}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y (D_{11} - \mathbf{d}_1^T \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\eta})) dY \quad (15)$$

유한요소의 개념을 이용하여 위의 식을 정의할 경우 식 (14)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dY \boldsymbol{\phi} = \int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{d}_1 dY \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{B}$ 는 변형도-변위행렬을 나타낸다. 위의 식은 아래와 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (17)$$

여기서 임의의 질점 하중 벡터  $\mathbf{f}_i$ 는 변형도 값

$\epsilon_x^0 = 1$  그리고  $\epsilon_y^0 = \epsilon_{xy}^0 = 0$ 을 적용했을 때 다음과 같이 정의된다.

$$f_i = \int_Y \mathbf{B}_i^T \mathbf{d}_1 dY \quad (18)$$

따라서 내부에 크기가  $a \times b$ 인 빈 공간을 갖는 단위셀의 강성을 각 초기 변형도 값에 따라 유한요소 해석을 이용하여 구할 수 있다.

이렇게 임의의  $a, b$ 값에 따라 구해진 강성 값을 최소자승법을 이용하여 변수  $a, b$ 의 함수로 정의된  $\mathbf{D}^h$  행렬을 구할 수 있다. 구해진 행렬 중 변수  $a, b$ 에 대한 함수로 표현된 물질은 다음과 같다.

$$\mathbf{D}^h = \begin{bmatrix} D_{11}^h & D_{12}^h & 0 \\ D_{21}^h & D_{22}^h & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^h \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서 함수로 표현된 등가 재료모델의 강성행렬 성분은 다음과 같다.

$$D_{11}^h = 1.0347 - 0.19057a - 0.44815b + 0.17949a^2 - 0.83233ab - 0.46682b^2 - 0.08561a^3 + 0.19546a^{2b} + 0.68235ab^2 - 0.04131b^3$$

$$D_{12}^h = 0.31345 - 0.11080a - 0.12080b + 0.17639a^2 - 0.26954ab - 0.17639b^2 - 0.00835a^3 + 0.27454a^2b + 0.27454ab^2 - 0.00835b^3$$

$$D_{22}^h = 1.03470 - 0.44815a - 0.19507b + 0.46682a^2 - 0.83233ab - 0.17949b^2 - 0.04131a^3 + 0.68235a^2b + 0.19546ab^2 - 0.08561b^3$$

$$D_{66}^h = 0.37940 - 0.17684a - 0.17684b + 0.12103a^2 - 1.03828ab - 0.12103b^2 - 0.24676a^3 + 0.65449a^2b + 0.65449ab^2 - 0.24676b^3$$

식 (20)에서 구한 값들은 프와송 비가  $\nu=0.3$  일 경우의 값이다. 위의 강성행렬의 성분은 빈 공간의 크기  $a, b$ 에 따라서 그 값이 달라지게 되며 변수  $a, b$ 는 그 범위가  $0 \leq a, b \leq 1$ 이다.

변수  $a, b$ 의 함수로 정의된 강성행렬의 성분  $D_{11}^h, D_{12}^h, D_{22}^h, D_{66}^h$ 를 그림 5에 도시하였다.

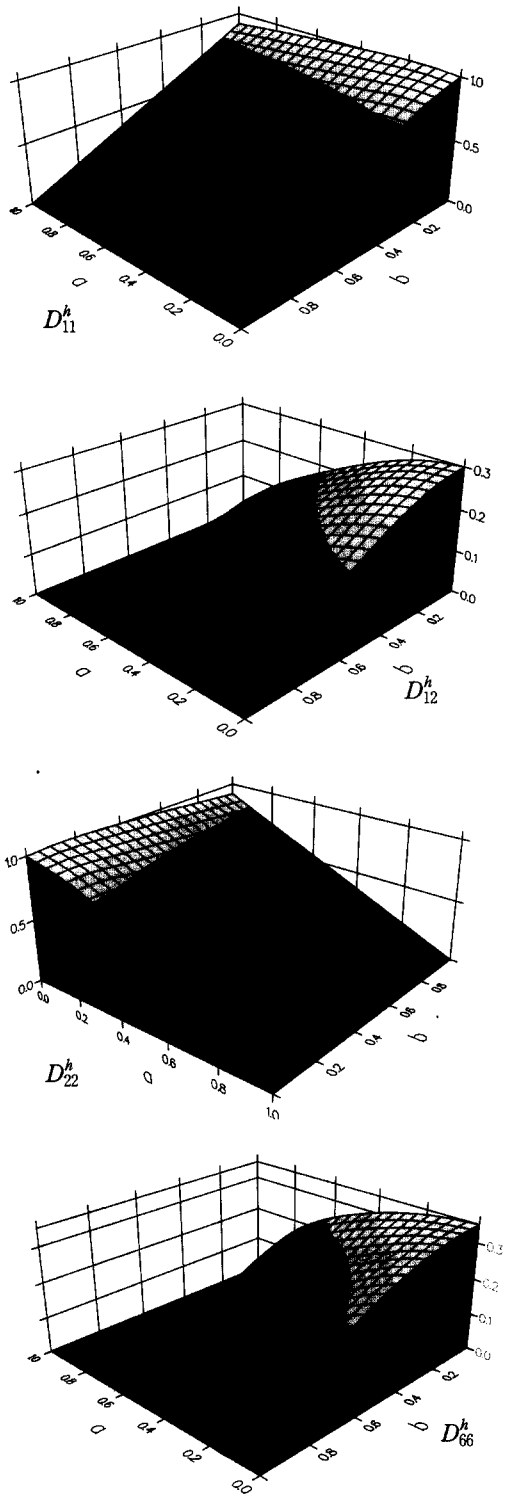


그림 5 Elasticity constants

#### 4. 크기조절 알고리즘(Resizing algorithm)

##### 4.1 최적기준(Optimality Criteria)

설계영역  $\Omega$ 내에서 합성물질을 재분배하는 위상 최적화의 문제는 전통적으로 변형에너지를 최소화하기 위한 최적기준을 유도함으로써 해결된다. 이때 설계변수로는 단위셀내의 빈 공간의 크기와 물질의 회전을 위한 회전각이 쓰인다. 이때 빈 공간의 크기로 나타나는 변수는 물질의 부피를 계산하는데 사용되어지므로 구속조건과 직접적인 관계가 있고, 회전각으로 나타나는 설계변수는 이방성물질의 재료축 회전을 위해서 도입되나 구속조건과 무관하며 등방성 물질이 최적화에 사용될 경우 설계변수로 작용하지 않는다.

본 절에서는 위상최적화에 사용된 재료를 등방성 물질로 가정하여 밀도에 대한 최적조건만 고려하도록 한다. 유한요소법을 사용하면 요소  $e$ 내에 빈 공간의 크기가  $a_e \times a_e$ 인 물질 반복적으로 분포되어 있는 이산화된 영역에서는 식 (1)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } U &= \sum_{e=1}^{nel} \left[ \frac{1}{2} \int \epsilon_e^T \sigma_e dV \right] \\ \text{subject to } V_s &= \sum_{e=1}^{nel} (1 - a_e^2) V_e \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 아래첨자  $e$ 는  $e$ 번째 유한요소를 나타낸다. 그리고  $V_s$ 는 설계영역  $\Omega$ 내에 물질이 존재하는 부분의 부피를 말하며  $a_e$ 는 요소내에 존재하는 정사각형 형태의 빈 공간의 크기를 나타낸다. 단위 셀의 크기를 1이라고 가정하면 요소  $e$ 에 대한 재료 밀도 매개변수  $r_e$ 를 다음과 같이 도입할 수 있다.

$$r_e = 1 - a_e \quad (22)$$

따라서 설계변수  $a_e$ 를 사용하면 식 (21)에서 정의된 최적화문제는 재료밀도변수  $r_e$ 로 다시 정의된다. 즉  $nel$ 개의 유한요소로 이산화된 설계영역의 설계변수는 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_{nel}]^T \quad (23)$$

식 (21)에 정의된 최적화문제는 라그랑지 승수를 이용하여 구속조건을 목적함수에 첨가함으로써 라그랑지함수  $L$ 로 다시 정리 할수 있다.

$$L(r_e) = \sum_{e=1}^{nel} U_e - \Lambda \left( \sum_{e=1}^{nel} (2r_e - r_e^2) - V_s \right) - \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^+ (r_e - 1) + \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^- r_e \quad (24)$$

여기서  $U_e$ 는 요소  $e$ 의 변형에너지를 나타내고  $\Lambda, \lambda_{r_e}^+ = [\lambda_{r_1}^+, \lambda_{r_2}^+, \dots, \lambda_{r_{mi}}^+], \lambda_{r_e}^- = [\lambda_{r_1}^-, \lambda_{r_2}^-, \dots, \lambda_{r_{mi}}^-]$ 는 라그랑지 승수이다. 식 (24)의 라그랑지 승수중  $\lambda_{r_e}^+, \lambda_{r_e}^-$ 는 항상 만족 되므로 라그랑지함수  $L(r_e)$ 의 정상조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_{r_e} = \frac{1}{2\Lambda(1-r_e)} \frac{\partial U_e}{\partial r_e} = 1 \quad (25)$$

식 (25)는 재료밀도함수와 변형에너지의 관계를 나타내는데 이를 이용하여 Bendsope는 다음과 같은 크기조절 알고리즘<sup>4)</sup>을 제시하였다.

$$\begin{aligned} r_e^{k+1} &= MAX \quad \text{if } r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq MAX \\ &= r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \quad \text{if } MAX \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq MIN \\ &= MIN \quad \text{if } MIN \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \end{aligned} \quad (26)$$

여기서  $MAX = \max\{(1-\zeta)r_e, 0\}$ 이고  $MIN = \min\{(1+\zeta)r_e, 1\}$ 이며  $\eta$ 는 조절변수,  $\zeta$ 는 이동변수이고  $B_{r_e}^k$ 는  $k$ 번째 반복계산에서  $B_{r_e}$ 값이다.

#### 4.2 강제제거법(Kill method)

등질화법에 바탕을 둔 최적기준을 사용하는 방법 이외에 전응력설계법(Fully stressed design technique)에 기초한 강제제거법도 위상최적화에 널리 쓰이고 있다. 강제제거법의 기본개념은 낮은 응력 수준을 가지는 물질은 구조물에 비효율적으로 이용되었다고 가정하고 이를 계속적으로 제거하는 것이다. 제거방법에는 경질제거법<sup>5)</sup>, 연질제거법<sup>6)</sup> 그리고 페널티제거법등이 있는데 이러한 방법은 그림 6에 도시된 바와 같이 물질을 제거하는 수준에 따라 결정된다. 강제제거법과 유사한 방법으

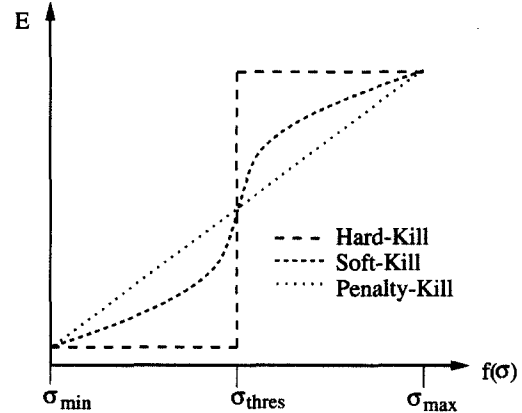


그림 6 Different functions of elastic modulus versus a function of stress

로는 Xie와 Steven<sup>7)</sup>에 의해서 많이 사용된 진화 설계법(Evolutionary design method)이 있다. 유한요소법을 사용한 이산화된 영역에서는 각 요소 내의 적분점에서 계산된 응력의 수준을 바탕으로 요소의 내의 물질을 제거한다 이때 경질제거법은 임의의 유한요소에서 계산된 응력의 수준이 정해진 값에 미치지 못 할 경우 요소의 탄성계수값을 영에 가까운 값으로 조정하여 그 요소의 물질을 제거하게 된다. 이러한 급격한 물질의 변화는 최적화결과로서 바라직하지 않을 수 있다. 경질제거법과는 달리 기준응력치( $\sigma_{thres}$ )를 바탕으로 물질의 변화를 선형으로 변화시키는 것이 연질제거법이다.

이러한 강제제거법은 비교적 그 절차가 간단하며 전절에서 설명한 다공성물질을 사용하지 않고 일반 탄성물질을 사용할 수 있다.

#### 4.3 수학적 프로그래밍기법

식 (1)에서 정의된 최적화 문제는 수학적 프로그래밍기법을 이용하여 물질내에 존재하는 빈공간의 크기를 조절할 수도 있다. 수학적인 프로그래밍 기법은 식 (24)에 정의된 것과 같은 라그랑지함수  $L$ 을 사용한다. 목적함수와 구속함수의 설계변수에 대한 민감도(Sensitivity)를 계산한뒤 그값을 이용하여 최적값을 찾아 내고 최적의 물질분포를 만족하기 위하여 Kuhn-Tucker조건<sup>8)</sup>을 사용한다. 이때 형상과 크기 최적화에서의 동일한 최

적화 알고리즘을 사용하게 된다. 하지만 정의된 최적화문제의 설계변수와 목적함수의 종류가 다르며, 위상최적화의 경우 크기최적화나 형상최적화에 비해 설계변수가 매우 많기 때문에 이를 효율적으로 처리하는 방법이 필요하다. 하지만 문헌상<sup>9)</sup>으로는 수천개의 설계변수를 가지는 위상최적화를 수학적 프로그래밍기법을 이용하여 수행한 바 있다.

### 5. 위상최적화의 예

전절에서 설명한 위상최적화의 개념을 이용하여 갈고리모양을 도출하기 위한 최적화 예를 기술하였다. 갈고리는 크레인으로 물건을 들어 올리거나 내릴 때 필요한 구조물이다. 본 연구에서는 이 문제를 평면응력으로 가정하였으며 갈고리의 위상을 도출하기 위하여 그림 7에 도시된 것과 같은 유한요소망을 사용하여 위상최적화를 실시하였다. 설계영역에 사용된 재료의 탄성계수와 프와송비는  $E=2.1 \times 10^8 N/m^2$ 와  $\nu=0.3$ 이다. 그리고 갈고리모양의 구조물을 도출하기 쉽게 설계영역중 일부분의 탄성계수를  $E=10 \times 10^{-8} N/m$ 의 값으로 저하시켰다. 즉 본 최적화문제에는 설계영역내에 두 가지의 재료가 사용되어 위상최적화를 실행되었다. 그리고 설계영역 아래에 있는 반지름이  $r$ 인 반원부분에는 포물선 형태의 하중을 가하였다.

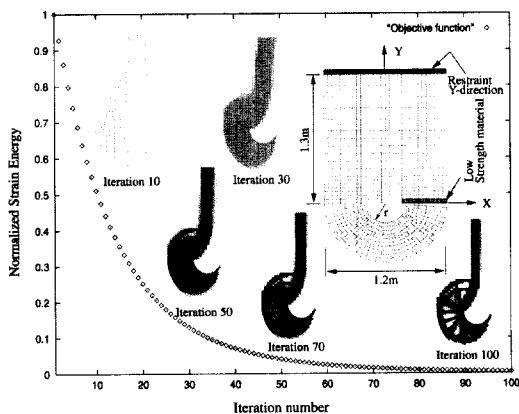


그림 7 The iteration history of a topology optimization which leads to a hook-like structure

가해진 하중의 형태는  $p \int_r^r (X^2 - r^2) dX$ 로 가정하였고  $p$ 의 값으로는  $100N/m$ 을 사용하였다. 구조물의 두께는  $1m$ 로 가정하였고 구속조건으로는 구조물의 부피가 전체설계영역의 20%를 유지하도록 하였다. 조절변수  $\eta$ 와 이동변수  $\zeta$ 는 각각 0.8과 0.02로 가정하였다. 위상최적화에 사용된 프로그램은 저자등에 의해서 개발된 LIBRA-OT<sup>10)</sup>이다. 최적화에 사용된 물질은 3.1절에 기술된 가동질화된 물질을 사용하였으며 밀도함수의 지수값  $\gamma$ 는 3.2를 택하였다. 그림 7에 도시된 결과를 살펴보면 위상최적화를 실시하여 물질을 재분배함으로써 재료의 효율성을 극대화할 수 있음을 알 수 있다.

### 6. 결 론

본 고에서는 위상최적화의 기본개념과 위상최적화에 사용되는 물질의 종류, 그리고 물질내의 빈공간의 크기를 조절하는 알고리즘에 대하여 설명하였다. 그리고 이러한 요소들을 이용하여 위상최적화를 실행하였을 때 효율적으로 물질이 재분배 될 수 있음을 갈고리의 예를 통하여 증명하였다. 위상최적화의 도입은 고정된 위상을 최적화함으로써 물질의 효율을 극대화할 수 있어 다양한 구조물의 설계 전단계에 매우 유용한 도구로 사용되어 질수 있을 것으로 사료된다.

### 참 고 문 헌

1. Zienkiewicz, O.C. and Campbell, J.S., "Shape optimization and sequential linear programming", in *Optimum structural design*, edited by R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz, Chapter 7, John Wiley, Chichester, 1973
2. 이상진, "스윙프 기하학적 모델을 사용한 프리즘 쉘의 최적화", 한국전산구조공학회 논문집, 제13권 제2호, 2000, pp.221~230
3. Lee, S.J., "Schematic concept of fully integrated design optimization for shells", in *the Proceeding of the 6th Asian Pacific Conference on Shell and Spartial Structures*, Seoul, 2000 (in press)



4. Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N., "Generating optimum topologies in structural design using a homogenization method", *Comp. Meth Appl. Mech. Engng.* 71 (2), 1988, pp.197~224
5. Hinton, M.P. and Siens, J., "Fully stressed topological design of structures using an evolutionary approach", *Engineering Computations*, 12, 1995, pp.229~244
6. Walther, F. and Mattheck, C., "Local stiffening and sustaining of shell structures by SKO and CAO", in *Proceeding of International Conference on structural optimization*, edited by C.A. Brebbia and S. Hernandez, Southampton, UK, 1993
7. Xie, Y.M. and Steven, G.P., "A simple evolutionary procedure for structural optimization", *Comput. Struct.* 49, 5, 1993, pp.885~896
8. Vanderplaats, G.N., *Numerical optimization techniques for engineering design*, McGraw-Hill, Boston, 1984
9. Yang, R.J. and Chen, C.J., "Stress-based topology optimization", *Structural Optimization*, 12, 1996. pp.98~105
10. Lee, S.J., Bae, J.E. and Hinton, E., "Shell topology optimization using layered artificial material model", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 47, 2000. pp.843~867 