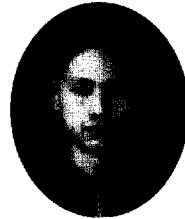


콘크리트 미소면 모델 (Micro-Plane Model for Concrete)



박 홍 근*



김 학 중**

1. 콘크리트 재료 모델

컴퓨터로 콘크리트 구조물을 해석하기 위해서는 콘크리트에 분포된 균열이나, 균열 면에서의 전단 미끄러짐 같은 여러 형태의 변형을 연화 파괴(strain-softening damage)를 표현할 수 있는 일반적이고도 강력한 재료 모델이 필요하다. 즉, 재료 모델은 매우 다양한 상태의 응력과 변형률 관계를 나타낼 수 있어야 한다. 그러나 그러한 조건을 모두 만족하는 일반적인 응력과 변형률의 구성관계(constitutive relation)를 모델화하는 것은 상당히 어려운 문제이다. 지난 20여년간 소성모델, 파괴이론 등 다양한 이론을 사용하여 이에 대한 수많은 연구가 수행되어 왔다. 그 결과 이 분야에 대해 많은 가치있는 발전이 있어왔는데, 그중 가장 현실적이고 강력하며 유용한 모델 중의 하나가 미소면 모델이다.

2. 미소면 모델의 개념

미소면 모델(Bazant 1984)은 컴퓨터에 의한 수

치계산량을 증가시키는 대신 이론의 개념을 단순화한 모델이다. 이 모델은 최초로 G.I. Taylor(1938)가 개발한 것으로서, 그는 다결정 금속재의 거동이 그 물질 내의 모든 가능한 방향으로의 면(미소면)에 작용하는 응력과 변형률 벡터 사이의 관계에 의하여 결정되며, 그 재료의 응력 또는 변형률을 나타내는 대표응력이나 대표변형률은 대표(macro)와 미소(micro) 간의 정적(static) 혹은 운동학적 조건(kinematic constraint)을 만족시킨다는 가정하에 모든 미소면에서의 미소응력 또는 미소변형률들의 합 또는 합력으로써 구할 수 있다고 제안하였다.

이러한 Taylor의 생각은 금속재의 소성(plasticity)을 기술하기에 가장 현실적인 방법으로 인식되었으나 그 시대 컴퓨터의 능력부족으로 실제적인 적용은 어려웠다. 금속재에 대한 미소면 모델은 후에 많은 연구자들에 의해 수정, 개선되었으며, 토질과 석재에도 이용되었다.

앞서 기술한 초기의 모든 연구에서는 미끄러짐면(slip plane)이라 불리는, 재료내의 다양한 방향의 면에 작용하는 미소응력은 대표응력의 응력변환

* 정회원 · 서울대학교 건축학과, 교수
** 서울대학교 건축학과, 대학원생

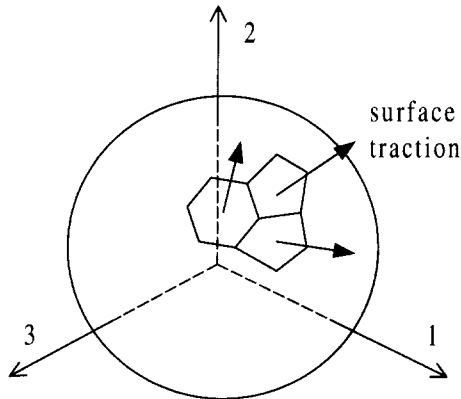


Fig. 1 미소면 모델의 개념

으로 가정되었으며 이것을 정적 제약(static constraint)이라 부른다. 그러나 이 정적 제약조건은 최대강도 이후 변형을 연화 거동(postpeak strain softening behavior)이나 손상(damage)을 나타내는데 문제가 있었다. 따라서 Bazant(1984)는 콘크리트를 모델화하는 과정에서 콘크리트 파괴에까지 확장시키기 위해서는 정적 제약조건(static constraint) 대신에 운동학적 제약조건(kinematic constraint)을 사용해야 한다는 것을 밝혔다. 이 조건에서는 응력 대신에 변형률에 대한 조건을 부여하는 것으로서, 재료내의 모든 경사면에서의 변형률 벡터는 대표변형률 벡터의 변환으로 구할 수 있다는 것이다. 이 운동학적 제약조건은 모든 변형률 연화(strain softening)가 한 방향의 면에서만 국한되는 현상을 피할 수 있게 해 준다.

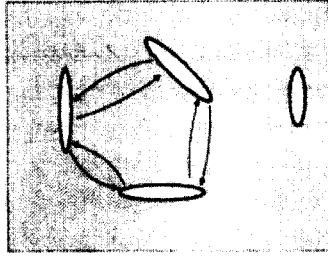
Taylor의 생각에 바탕을 둔 이론은 금속재에 대해서는 소성 슬립 이론(slip theory of plasticity)이라 불렀고, 석재에 대한 응용에서는 다층상 모델(multi-laminate model)로 명명되었다. 그러나 이러한 용어는 준취성 재료에서 파괴를 기술하는데 부적합하였다. 예를 들어, 콘크리트의 두드러진 비선형 거동은 체적 응력(volumetric stress)이 극히 클 경우를 제외하고는 소성 슬립(plastic slip)이라기 보다 미세균열을 나타낸다. 이러한 이유로 어떠한 형태의 물리적 비선형 거동에라도 적용할 수 있는 중립적 용어인 '미소면 모델'이란 용어가 만들어졌다(Bazant 1984). '미소면'이라는 용어는 재료의 성질이 재료의 미세구조 내의 다

양한 방향을 가진 면에서 응력-변형률 성분 사이의 관계에 의하여 독립적으로 결정된다는 기본적인 특성을 반영하는 것이다.

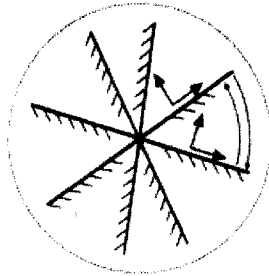
콘크리트에 대한 미소면 모델은 인장파괴에 대해 최초로 자세히 연구되었고(Bazant, Oh 1983, 1985; Bazant, Gambarova 1984), 후에 압축과 전단에서 비선형 삼차원 거동에 대해 연구되었다(Bazant, Prat 1988). Bazant와 Prat(1988)의 미소면 모델에 대한 명백한 공식화와 효율적인 수치계산 알고리즘은 최근 Carol, Prat, Bazant(1992)에 의해 소개되었다. 또한, 운동학적 제약조건을 사용한 미소면 모델은 continuum damage mechanics의 형태로 이용될 수 있다는 것이 보여졌다(Carol, Bazant, Prat 1991; Carol, Bazant 1997).

초기에는 Bazant와 Prat(1988)의 미소면 모델이 압축과 인장에서 최대강도 이후 연화 손상(post-peak softening damage)에도 잘 맞으리라 생각되었지만, Jirasek(1993)은 최대강도 이후 일축 인장(postpeak uniaxial tension)에서 큰 인장 변형률이 생길 때 큰 수평 변형률이 발생한다는 것을 발견했다. 그는 이것이 변형률 연화가 일어나는 미소면에서 비체적 변형률은 줄어드는 반면에 인장 변형률 연화는 체적 변형률에만 나타나기 때문에 발생한다는 것을 보였다. 인장 연화 손상이 두 수직 변형률 요소 중 하나인 체적 변형률에만 국한되는 것은 수직 변형률을 체적과 비체적 부분으로 분리시킨데 따른 불가피한 결과로 인식되었다. 하지만 이러한 분리는 이전에 정확한 탄성 프와송비를 구하거나 압축에서 삼차원 거동을 정확히 모델링하기 위해서 필요한 것으로 밝혀졌다(Bazant, Prat 1988). 이 문제는 응력-변형률 한계라는 새로운 개념을 도입함으로써 해결되었다(Bazant 1993c; Bazant, Jirasek et al. 1994; Bazant, Xiang, Prat 1996).

미소면 모델의 기본적 이론은 유한요소 이론과 잘 어울린다. 유한요소는 공간 또는 거리에 대한 분리는 나타내는 반면 미소면 모델은 방향에 대한 분리를 나타낸다. 둘다 가상일의 원리가 유사한 방법으로 사용된다. 즉, 유한요소의 형상함수나 미소면 모델에서 방향들 간의 운동학적 제약조건에 의해 평형 관계나 강성이 유도된다. 이러한 유사한



(a) 미소면간의 상호작용 (비국부손상 개념)



(b) 방향간의 상호작용 (미소면 모델 개념)

Fig. 2

구조 때문에 이 둘을 사용하여 유용한 컴퓨터 해석 프로그램을 만들 수 있다. 다른 면에서 볼 때, 미소면 모델은 비국부손상 개념과 상호보완적이라고 할 수 있다. 비국부손상 개념이 거리에 대한 상호작용을 다루는 반면, 미소면 모델은 방향에 대한 상호작용을 다룬다(Fig. 2). 비국부손상 개념은 공간에서 국부손상을 방지하는 반면 미소면 모델의 운동학적 제약조건은 방향들 간의 국부손상을 막아준다.

3. 대표-미소 관계

전통적인 구성 관계(constitutive relation)에 대한 연구에서는 응력 또는 변형을 텐서의 불변성(invariant)에 기초하여 응력 텐서 σ 와 변형을 텐서 ϵ 간의 관계에 의해 정의되었다. 그러나 미소면 모델에서 구성 관계는 재료의 임의적 방향의 면에 작용하는 응력과 변형을 벡터 사이의 관계로 정의된다. 미소면으로 불리는 이 면의 방향은 단위 벡터 n 으로 나타낼 수 있다. 변형을 연화(Bazant 1984)를 기술할 수 있게 하는 기본 가정은 미소면 상의 변형을 벡터인 ϵ_N 이 대표변형을 벡터 ϵ 의 변환으로 구할 수 있다는 것이다. 즉,

$$\epsilon_N = \epsilon n \tag{1}$$

반면에 대표응력과 미소면에 작용하는 응력 사이의 관계는 정적 평형조건에 의하여 구할 수 있다. 이 평형조건은 어떤 변화율 $\delta\epsilon$ 에 대해 단위 구에서 대표응력에 의한 가상 일은 구의 표면 요소에서 표면 응력에 의한 가상 일과 같다는 가상일의 법칙에 의하여 구할 수 있다(Bazant 1984). 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{2\pi}{3} \sigma \cdot \delta\epsilon = \int_{\Omega} \sigma_N \cdot \delta \epsilon_N d\Omega \tag{2}$$

식(1)을 식(2)의 적분 속으로 대입하고 $\delta\epsilon$ 를 인수분해하면 다음을 얻는다.

$$\left[\frac{2\pi}{3} \sigma - \int_{\Omega} (\sigma_N \otimes n)^S d\Omega \right] \cdot \delta\epsilon = 0 \tag{3}$$

여기서, \otimes 는 텐서 곱을 나타내며 텐서에 대한 머리첨자 S는 그 텐서의 대칭행렬을 뜻한다. 즉, $T^S = (T + T^T)/2$ 이다. 가상일의 법칙에서 식(3)은 어떠한 미소변화량 $\delta\epsilon$ 에 대해서도 만족해야 하므로, 괄호로 둘러싸인 부분은 0이 되어야 한다. 따라서 다음의 기본적 관계가 도출되는데, 여기서 대표응력 텐서는 다음과 같다.

$$\sigma = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} (\sigma_N \otimes n)^S d\Omega \tag{4}$$

단위 구에 대한 적분을 하기 위해 가우스 적분(Fig. 3(b))을 이용하면 직교좌표계 응력 성분인 σ_{ij} 는 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} s_{ij} d\Omega \approx \sum_{\mu=1}^N \omega_{\mu} s_{ij}^{\mu} \tag{5}$$

여기서,

$$\begin{aligned} s_{ij} &= [(\sigma_N \otimes n)^S]_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{N_i} n_j + \sigma_{N_j} n_i) \end{aligned} \tag{6}$$

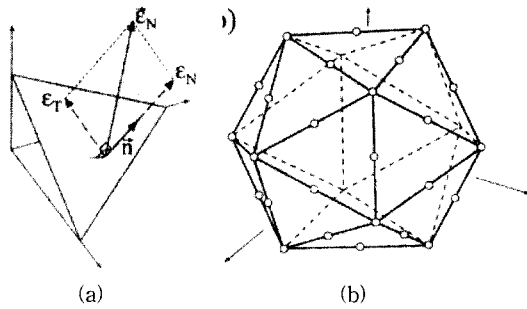


Fig. 3 (a) 미소면 수직 벡터와 미소 변형률 벡터, 미소 변형률 벡터의 수직, 전단 요소 (b) 반구상 21개 미소면 구조에 대한 미소면의 방향(등근 점) (Bazant, Oh 1986 이후 Bazant, Xiang, Prat 1996에 적용됨)

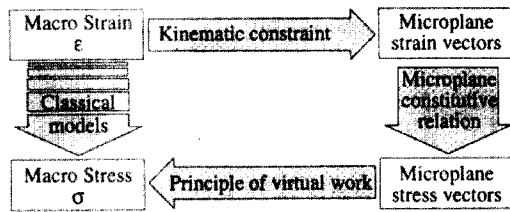


Fig. 4 대표와 미소 차원 사이의 계산의 흐름도 (Bazant, Xiang, Prat 1996)

이고, 식(5)의 마지막 식은 반구에 대한 적분의 근사적 수치 계산법(가우스 적분)을 나타낸다. 아래 쓰인 μ 는 단위 벡터 n_μ 로 정의되는, 각각의 미소면의 방향을 나타내는 선택된 적분점들(Fig. 3(b)에서 등근 점)을 나타낸다. ω_μ 는 이러한 미소면에 관련된 적분 가중치를 나타내며, $\sum_\mu \omega_\mu = 1$ 이 되도록 단위화 된다. Ω 에 대한 적분은 무한히 많은 미소면에 대한 적분을 나타내지만, 수치적 근사식은 알맞게 선택된 유한개의 각 미소면에 대한 합을 나타낸다. 대표와 미소 차원 사이의 계산 흐름은 Fig. 4에 설명되었다.

반구상의 면에 대해 적합한 수치적 적분법을 공식화하는 것은 쉬운 일이 아니다. 이 문제는 수학자들에 의해서 연구되었으며, 다양한 차원의 근사적 가우스 적분법이 개발되었다.

충분한 정확도를 가지는 적분식 중 반구가 28개의 미소면(즉, 28개의 적분점)으로 구성된 것은 Stroud(1971)에 의하여 개발되었다. 더 효율적이고

단지 약간의 정확도 손실이 있는, 21개의 미소면으로 된 적분식은 Bazant와 Oh(1986)에 의해 도출되었다. 이 21점적 적분식은 다항식을 9차까지 정확하게 적분한다. 이 식에서 미소면에 수직인 방향은 Fig. 3(b)에서처럼 정20면체에서 꼭지점이나 면의 중점에 이르는 방사상의 방향을 나타낸다. 21개보다 작은 수의 미소면으로는 충분한 정확도를 가질 수 없다(Bazant, Oh 1985).

4. 미소변형률과 미소응력 벡터의 체적, 비체적 분리

변형률 텐서를 체적, 비체적 부분으로 나누는 것이 여러 가지로 유용하다는 것은 continuum mechanics에서 잘 알려져 있다. 즉, $\epsilon = (1/3)tr \epsilon I + \epsilon'$ 인데 여기서 I 은 단위 텐서이고 ϵ' 는 비체적 변형률 텐서이다. 이를 식(1)에 적용시키면 미소변형률 벡터는 다음과 같이 분리된다.

$$\epsilon_N = \epsilon_V n + \epsilon_D \tag{7}$$

여기서, ϵ_V 는 체적 변형률이며 ϵ_D 는 비체적 변형률이다. 이들은 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_V = \frac{1}{3} tr \epsilon, \quad \epsilon_D = \epsilon' n \tag{8}$$

또한 비체적 변형률 벡터는 짧게 비체적 변형률이라 불리는, 면에 수직요소인 ϵ_D 와 미소면에 대해 접선요소인 전단 변형률 벡터 ϵ_T 로 나뉘어진다.

$$\begin{aligned} \epsilon_D &= \epsilon_D \cdot n = \epsilon' n \cdot n, \\ \epsilon_T &= \epsilon_D - \epsilon_D n \end{aligned} \tag{9}$$

따라서 미소면 변형률 벡터는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\epsilon_N = \epsilon_V n + \epsilon_D n + \epsilon_T \tag{10}$$

미소 응력 벡터에 대해서도 변형률과 마찬가지로 $\sigma_V, \sigma_D, \sigma_T$ 가 정의되고, 이는 다음과 같이 나

타낼 수 있다.

$$\sigma_N = \sigma_V \epsilon_V + \sigma_D \epsilon_D + \sigma_T \epsilon_T \quad (11)$$

체적과 비체적 요소는 모두 미소면에서 수직방향 요소이므로, 총 수직 미소 변형을 ϵ_N 과 미소 응력 σ_N 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon_N = \epsilon_V + \epsilon_D, \quad \sigma_N = \sigma_V + \sigma_D \quad (12)$$

이제 미소 응력 요소 $\sigma_V, \sigma_D, \sigma_T$ 가 각각 $\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_T$ 의 함수로서 어떻게 정의되는가에 따라서 미소면 구성 법칙이 만들어진다. 가장 간단한 경우는 선형 탄성인 경우이다.

Bazant(1984)는 체적응력, 비체적응력, 전단응력에 대하여 다음과 같은 응력-변형을 관계를 제안하였다.

$$\sigma_V = C_V \epsilon_V \quad (13a)$$

$$\sigma_D = C_D \epsilon_D \quad (13b)$$

$$\sigma_T = C_T \epsilon_T \quad (13c)$$

Bazant는 미소면 모델에 대하여 식(13)의 손상계수 $C_V(\epsilon_V), C_D(\epsilon_D), C_T(\epsilon_T)$ 를 제안하였다.

$$C_V(\epsilon_V) = C_V^0 \exp\left(-\left|\frac{\epsilon_V}{e_V}\right|^m\right); \quad \epsilon_V \geq 0$$

$$C_V(\epsilon_V) = C_V^0 \left[\left(1 + \left|\frac{\epsilon_V}{a}\right|\right)^{-p} + \left|\frac{\epsilon_V}{b}\right|^q \right]; \quad \epsilon_V < 0 \quad (14a)$$

$$C_D(\epsilon_D) = C_D^0 \exp\left(-\left|\frac{\epsilon_D}{e_1}\right|^m\right); \quad \epsilon_D \geq 0$$

$$C_D(\epsilon_D) = C_D^0 \exp\left(-\left|\frac{\epsilon_D}{e_2}\right|^n\right); \quad \epsilon_D < 0 \quad (14b)$$

$$C_T(\epsilon_T) = C_T^0 \exp\left(-\left|\frac{\epsilon_T}{e_T}\right|^k\right) \quad (14c)$$

이 체적, 비체적, 접선 응력-변형을 곡선은 Fig. 5에 나타나 있다.

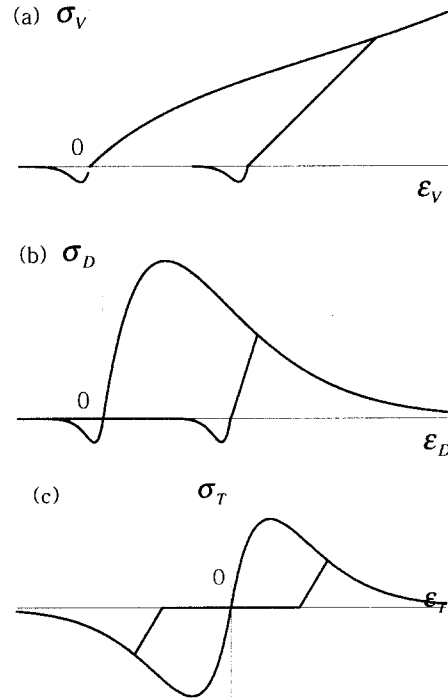


Fig. 5 미소면 모델의 (a) 체적 (b) 비체적 (c) 전단 응력-변형을 관계(Bazant 1984)

5. 미소면 모델과 실험의 비교

앞서 기술된 미소면 모델은 매개변수들을 조절하여 여러 문헌에 나와있는 일반적인 실험 자료와 비교하였다(Bazant, Xiang et al. 1996). 몇몇을 요약하면 Fig. 6, Fig. 7과 같다.

그림에서 보듯이, 미소면 모델을 이용하여 여러 가지 응력 상태에서의 실험과 잘 맞는 결과를 얻을 수 있다. Fig. 6(a)에서 일축압축 응력-변형을 그림은 $l=5, 10, 20\text{cm}$ 인 세가지 시험체 길이에 대해서 나타내고 있다. Fig. 6(d)를 통해 체적 응력-변형을 한계를 조절할 수 있으며 2GPa에 까지 이르는 다양한 압축 응력에 대해 잘 맞는 결과를 보여준다. Fig. 6(f)는 표준 삼축실험에서 횡압력이 큰 영향을 미치는 것을 나타내고 있다.

Fig. 6(g)에서 연화영역에 이르는 반복하중에서 응력 곡선의 상한값이 매우 정확하게 모델화 되었고, 하중 제하시 초기 기울기도 그러하다. 그러나,

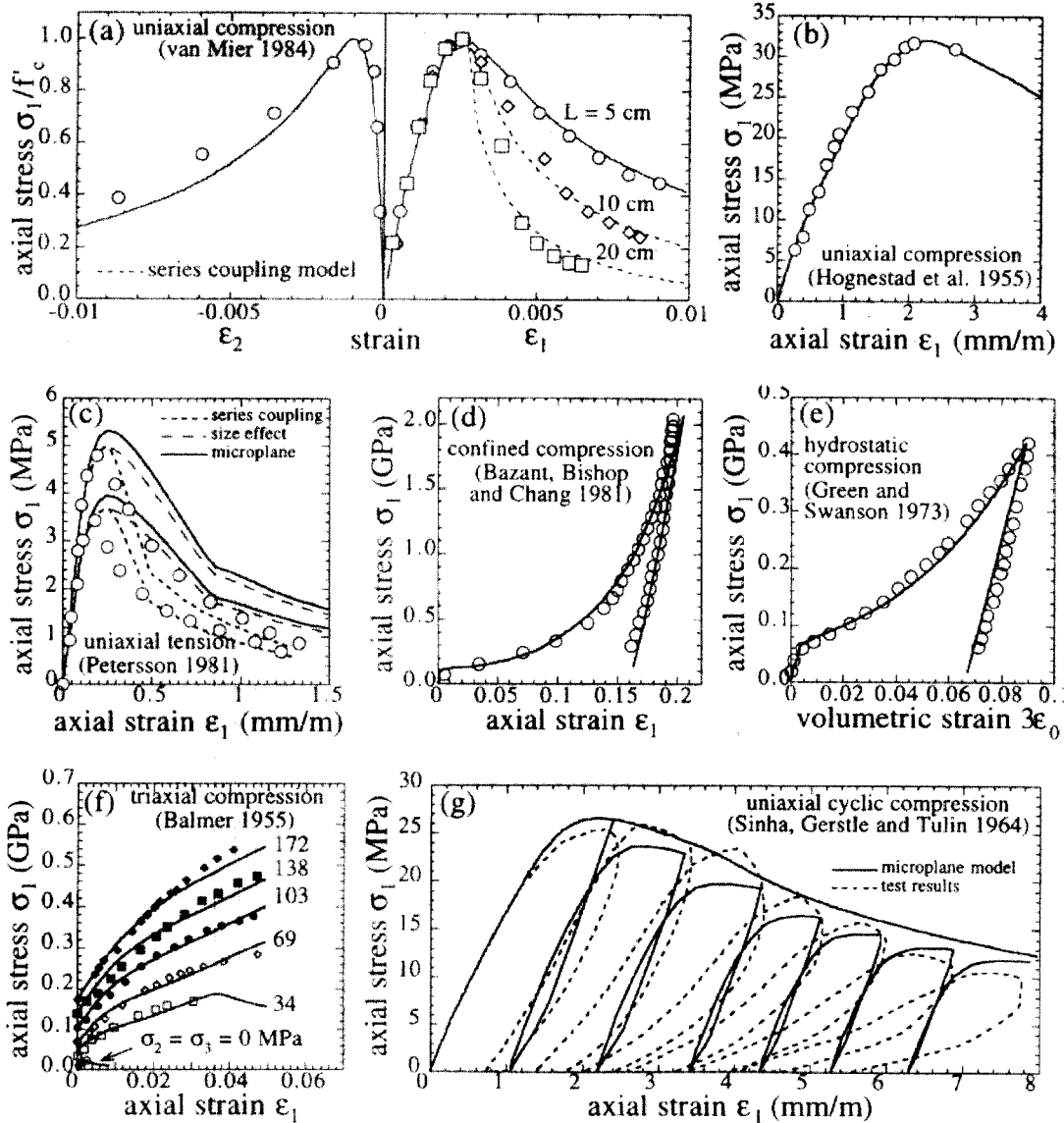


Fig. 6 여러 가지 실험 결과와 미소면 모델의 비교(Bazant, Xiang et al. 1996 이후) (a) van Mier(1984)의 일축압축실험 (b) Hognestad, Hanson, McHenry(1995)의 일축압축실험 (c) Petersson(1981)의 일축인장실험 (d) Bazant, Bishop, Chang(1986)의 일축압축실험 (e) Green, Swanson(1973)의 삼축압축실험 (f) Balmer(1949)의 삼축압축실험 (g) Sinha, Gerstle, Tulin(1964)의 일축반복압축실험

응력이 0에 가까워지는 부분에서 기울기가 큰 차이를 나타내는데, 이는 현 모델에서 응력 제한 기울기가 일정하게 모델링되어 있기 때문이다.

Fig. 7은 미소면 모델과 다양한 응력상태의 파괴면을 비교하고 있다. 이 그림에 나타난 바와 같이 미소면 모델은 이축, 삼축압축상태의 파괴면을

잘 나타내고 있다.

이 그림들에서 모든 실선은 미소면 모델에 의해 예측된 곡선이며, Fig. 6에서 점선은 series coupling 모델에 따라 수정한 후의 결과이다. Fig. 6(c)에서 단축선은 부피효과(size effect) 법칙에 따라 수정한 후의 결과이고, 점선은 그것을 series coupling

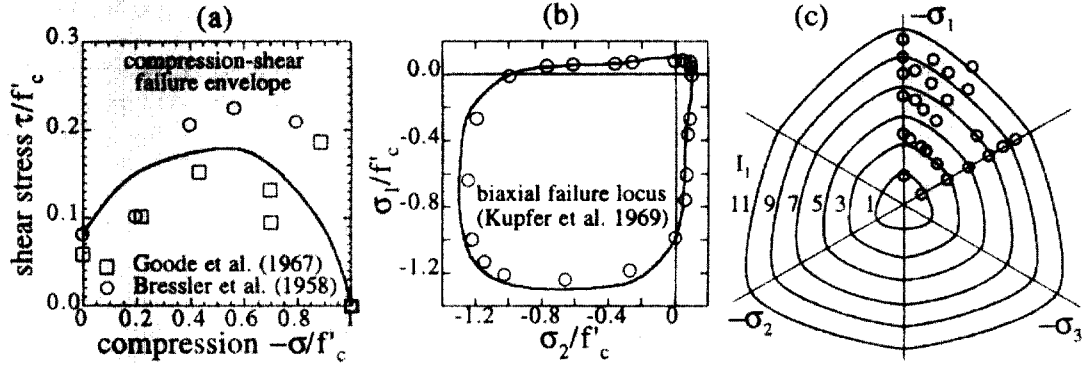


Fig. 7 (a) Bresler, Pister(1958)의 전단압축 파괴면 실험 (b) Kupfer, Hilsdorf, Rusch(1969)의 이축 파괴면 실험 (c) Launay, Gachon(1971)의 π 면에서의 삼축 파괴면 실험

모델에 따라 수정한 후의 결과이다.

실험에 따라 응력 상태가 매우 다양해지면 미소면 모델에서는 단지 여섯 개의 매개변수만 조절하면 되고, 이 중 두 개는 각각 체적압축 실험자료로부터 따로 결정될 수 있다. 자료가 제한적일 때는 조절하여야 할 매개변수가 더 적을 수 있다. 매개변수를 정할 때, 두 개의 매개변수를 유사변형(affinity transformation)을 사용하여 조절하여 정하는 방법을 쓰는데, 보통 매개변수 중 두 개만 조절하면 된다. 그러므로, 미소면 모델은 콘크리트의 다양한 응력 상태를 나타내는데 효과적으로 사용될 수 있다.

6. 결 론

미소면 모델은 단순화된 응력-변형률 곡선의 조합으로써 콘크리트와 같이 다양하고 복잡한 거동을 나타낼 수 있다는 데 큰 장점을 가지고 있다. 또한 강도축면에서 재료의 거동을 나타내는데 치중하는 소성모델 등 기타 재료 모델에 대하여 응력, 변형율을 적절히 나타낼 수 있는 길을 열어주고 있다. 그러나 다음과 같은 면에서 보다 발전적인 연구가 필요하다.

- 1) 현재까지 연구결과는 대부분 무근콘크리트에 대한 것으로서 철근콘크리트의 거동에 보다 연구가 필요하다.
- 2) 미소면 모델에서는 매개변수 조절에 의하여 강

도 및 변형율을 나타내는데 이러한 매개변수가 강도 및 변형율과 어떠한 관계에 있는가를 정립하기는 쉽지 않으므로 실험결과와 일치시키기 위해서는 매우 많은 시도가 필요하며, 이러한 단점을 방지할 수 있는 방안이 필요하다.

- 3) 미소면 모델에서는 응력이 존재하지 않는 방향에서도 체적 및 비체적 응력이 존재하는 것으로 나타나는데 이러한 구성관계상의 이론적 뒷받침이 연구될 필요가 있다.

참 고 문 헌

1. American Concrete Institute., "Building Code Requirements for Structural Concrete.", ACI 318-95, Detroit, 1995, pp.118~121, 227~230
2. Bazant, Z. P., and Oh, B. H., "Microplane Model for Progressive Fracture of Concrete and Rock.", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 111, No. 4, pp.559~582., 1985
3. Bazant, Z. P., and Ozbolt, J., "Nonlocal Microplane Model for Fracture, Damage, and Size Effect in Structures.", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 116, No. 11, 1990, pp.2484~2504
4. Bazant, Z. P., and Prat, P. C., "Microplane Model for Brittle Plastic Material. I: Theory.", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 114, No. 10, 1988, pp.1672~1688
5. Bazant, Z. P., and Prat, P. C., "Microplane

- Model for Brittle Plastic Material. II: Verification.", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 114, No. 10, 1988, pp.1689~1702
6. Bazant, Z. P., Xiang, Y., Adley, M. D., Prat, P. C., and Akers, S. A., "Microplane Model for Concrete. II: Data Delocalization and Verification.", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 122, No. 3, 1996, pp.255~262
 7. Bazant, Z. P., Xiang, Y., and Prat, P. C., "Microplane Model for Concrete. I: Stress-strain Boundaries and Finite Strain.", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 122, No. 3, 1996, pp.245~254
 8. Carol, I., Prat, P. C., and Bazant, Z. P., "New Explicit Microplane Model for Concrete: Theoretical Aspects and Numerical Implementation.", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 29, No. 9, 1992, pp.1173~1191
 9. Karan, I. D. and Jirsa, J. O., "Behavior of Concrete under Compressive Loadings", *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 95, No. 12, 1969, pp.2543~2563
 10. Ozbolt, J., and Bazant, Z. P., "Microplane Model for Cyclic Triaxial Behavior of Concrete.", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 118, No. 7, 1992, pp.1365~1386
 11. Vecchio, F. J., and Collins, M. P., "The Modified Compression-field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear.", *Structural Journal*, ACI, Vol. 86, No. 2, 1986, pp.219~231 