The Korean Communications
in Statistics Vol. 7, No. 3, 2000
pp. 871-884

Comparison of Perturbation Analysis Estimate and Forward Difference Estimate in a Markov Renewal Process

Heung-sik Park[1)]

Abstract

Using simulation, we compare the perturbation analysis estimate and the forward difference estimate for the first and second derivatives of performance measures in a Markov renewal process. We find the perturbation analysis estimate has much less mean squared error than the traditional forward difference estimate.

Keywords : perturbation analysis, forward difference estimate, simulation

1. 서론

확률과정상에서 최적화 혹은 그 외의 다른 목적을 위해 평균 수행측도(performance measure) E[L(θ)]의 주어진 모수 θ에 대한 도함수를 구하려 한다 하자. 이를 위한 재래의 방법은 우선 주어진 모수 θ에 대해 N개의 서로 독립적인 시뮬레이션 수행 $L_k(\theta)$; k=1, 2, $\cdots$, N을 행하고 이와는 독립적으로 $\theta+\Delta\theta$에 대해 다른 N개의 서로 독립적인 시뮬레이션 수행 $L_k(\theta+\Delta\theta)$; k=1, 2, $\cdots$, N을 행하여 dE[L(θ)]/dθ의 추정값 $\left(\frac{dE[L(\theta)]}{d\theta}\right)_{FD}$을 다음 공식에 의해 구한다.

$$\left(\frac{dE[L(\theta)]}{d\theta}\right)_{FD} = \frac{\sum_{k=1}^{N} L_k(\theta+\Delta\theta) - \sum_{k=1}^{N} L_k(\theta)}{N\Delta\theta}. \qquad (1)$$

위에서 소개된 재래의 방법이 θ와 $\theta+\Delta\theta$ 두 곳에서의 시뮬레이션 수행을 통하여 추정 값을 구한 반면 새로 개발된 Perturbation Analysis(PA)방법은 θ 한 곳에서의 시뮬레이션 수행만으로도 dE[L(θ)]/dθ의 추정값을 구할 수 있다. 즉, N개의 서로 독립인 시뮬레이션 수행 $Y_k(\theta)$; k=1, 2, $\cdots$, N을 행하여 dE[L(θ)]/dθ의 추정값 $\left(\frac{dE[L(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA}$을 다음과 같이 구한다.

1) Professor, Department of Applied Mathematics, Sejong University, 98 Kunja-dong, Kwangjin-ku, Seoul 143-747. E-mail : Parkhs@kunja.sejong.ac.kr

$$\left(\frac{dE[L(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA} = \frac{\sum_{k=1}^{N} Y_k(\theta)}{N}. \tag{2}$$

한편 E[L(θ)]의 θ에 대한 2계 도함수에 대해서도 위의 1계 도함수와 유사하게 추정값들 $\left(\frac{d^2E[L(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{FD}$ 와 $\left(\frac{d^2E[L(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{PA}$ 을 구할 수 있다. 즉, 재래의 방법은 서로 독립인 시뮬레이션 수행 $L_k(\theta)$, $L_k(\theta+\Delta\theta)$, 및 $L_k(\theta-\Delta\theta)$ 들을 행하여 아래의 공식

$$\left(\frac{d^2E[L(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{FD} = \frac{\sum_{k=1}^{N} L_k(\theta+\Delta\theta) - 2\sum_{k=1}^{N} L_k(\theta) + \sum_{k=1}^{N} L_k(\theta-\Delta\theta)}{N(\Delta\theta)^2} \tag{3}$$

에 의하여 $d^2E[L(\theta)]/d\theta^2$ 의 추정값을 구하며 이에 대응하는 PA방법은 N개의 서로 독립인 시뮬레이션 수행 $Z_k(\theta)$; k=1, 2, …, N을 행하여 $\frac{d^2E[L(\theta)]}{d\theta^2}$의 추정값 $\left(\frac{d^2E[L(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{PA}$ 을 다음 공식을 통하여 얻는다.

$$\left(\frac{d^2E[L(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{PA} = \frac{\sum_{k=1}^{N} Z_k(\theta)}{N}. \tag{4}$$

위의 식들 (1)-(4)에서 볼 수 있듯이 PA추정값을 얻기 위해서 N번의 시뮬레이션 수행을 필요로 하는 반면 재래의 방법으로 추정값을 구하기 위해서는 최소한 2N번, 2계 도함수의 경우 3N번의 시뮬레이션 수행을 필요로 한다.

PA방법은 재래의 방법에 비해 시뮬레이션 수행 횟수에서 우수할 뿐 아니라 정확도에서도 더 우수하다는 것이 보여져 왔다. Suri와 Zazanis(1988) 및 Zazanis와 Suri(1994)는 대기행렬들 M/G/1과 GI/G/1에서 평균 시스템 시간의 평균 서비스 시간에 대한 도함수를 구함에 있어 PA방법의 우수함을 보였으며 Fu와 Hu(1992)는 일반화된 Semi-Markov 과정에서 유한사상동안 수행측도들의 주어진 모수에 대한 도함수를 구하는 법을 설명하고 간단한 Queueing network의 예를 들어 PA방법의 우수함을 보였다. Fu와 Hu(1993)는 GI/G/m Queue에서 평균 시스템 시간의 평균 서비스 시간에 대한 1계 및 2계 도함수를 구할 때 재래의 방법보다 PA방법이 우수함을 보였다. 한편 위에 소개된 확률과정들은 시뮬레이션 수행에서 한번 생성된 서비스 시간은 그것이 소진될 때까지 유지되는 반면, 이와는 별도로 서비스 시간동안 도착이 있을 시 서비스 시간이 그것의 영향을 받는(interrupted) 마코프 재생과정에 대해 Park(1996, 1997)은 PA방법을 이용하여 수행측도들의 도함수를 구하는 방안을 연구하였다. 그러나 이러한 연구결과에도 불구하고 마코프 재생과정에서 PA방법을 이용하여 구한 추정통계량이 재래의 방법으로 구한 추정통계량보다 우수함을 보인 것은 박홍식(1997, 1999)의 연구에서 M/M/l Queue를 대상으로 보인것이 전부이다. 한편 Zazanis와 Suri(1993)는 PA추정통계량이 unbiased인 경우, 즉 식(1)에서 $E[Y_k(\theta)]$=dE[L(θ)]/dθ인 경

우 PA 추정통계량이 재래의 Forward Difference(FD) 추정통계량보다 더 우수하다는 것을 이론적으로 보였다. 그러나 Park(1996, 1997)이 구한 PA 추정통계량들은 이러한 unbiased의 조건을 만족시키지 않는 고로 위의 이론을 적용할 수는 없다. 이 논문의 나머지 부분에서는 Park(1996, 1997)이 구한 PA 추정통계량들이 재래의 FD 추정통계량보다 우수함을 시뮬레이션을 통하여 보일 것이다.

2. 평균 busy cycle의 도함수들에 대한 추정

스케일 모수(scale parameter) θ를 가진 누적분포함수 F(x, θ)에 의해 i번째 생성되는 확률변수를 X_i로 표시하고 누적분포함수 G(y, μ)에 의해 i번째 생성되는 확률변수를 Y_i로 표시할 때 X_i와 Y_i에 의해 Park(1966)에서와 같이 생성되는 마코프 재생과정을 생각하자. 즉, 상태(state)가 0일 경우 F(x, θ)에 의해 얻어지는 X들을 항상 sojourn time으로 취한다. 여기서 소개되는 마코프 재생과정은 상태 0에서 시작하므로 X_1이 sojourn time이 되고 X_1의 끝에서 상태는 한 단계 증가하여 1이 된다. 다음으로 X_2와 Y_2를 비교하여 $X_2 \le Y_2$이면 X_2가 sojourn time이 되고 X_2의 끝에서 상태는 한 단계 증가하며, $X_2 > Y_2$라면 Y_2가 sojourn time이 되고 Y_2의 끝에서 상태는 한 단계 감소하게 된다. 이러한 과정을 계속하여 생성된 마코프 재생과정은 상태의 하나 증가나 혹은 하나 감소만을 허락하는 특수한 형태의 마코프 재생과정이다. Park(1996, 1997)은 이러한 마코프 재생과정에서 여러 수행측도들의 주어진 모수에 대한 1계 혹은 2계 도함수를 PA방법에 의해 구하는 연구를 수행하였다. 여기서는 이들중 특히 수행측도들 E[$C_{0,0}(\theta)$] 및 $E[N_{0,0}(\theta)]$의 평균 도착간격시간 θ에 대한 1계 혹은 2계 도함수에 대해 PA추정통계량들을 구하고 이들을 재래의 방법과 비교하기 위해 이들에 대응하는 재래의 통계량도 명시한다. 확률분포들 F(x, θ)와 G(y, μ) 모두가 지수분포를 따를 경우 이 마코프 재생과정은 M/M/1 대기행렬이 되고 이 경우 $E[C_{0,0}(\theta)]$ 및 $E[N_{0,0}(\theta)]$의 θ에 대한 1계 혹은 2계 도함수의 경우 실제의 값을 얻을 수 있으므로 추정 값의 정확도를 비교하는데 도움이 될 것이다.

Park(1996)에서 정의된 바와 같이 $C_{n,0}(\theta)$는 마코프 재생과정에서 상태가 n이 된 순간부터 그후 처음으로 상태가 0이 되는 순간까지의 길이를 표시하며 $N_{n,0}(\theta)$는 그 동안 상태가 감소된 수를 나타낸다 하자. 대기행열에서 사용하는 용어를 준용하면 $C_{0,0}(\theta)$는 busy cycle의 길이를 나타내고 $N_{0,0}(\theta)$는 busy cycle동안 서비스를 받은 고객의 수라고 말할 수 있을 것이다. U는 busy cycle 동안 확률과정이 증가한 경우에 해당하는 X의 지수들의 집합을 표시하며 f(x, θ)는 X의 확률밀도함수를, g(y, μ)는 Y의 확률밀도함수를 표시한다. 나머지 부호에 대하여는 Park(1996)을 참조하기 바라며 먼저 평균 busy cycle의 평균 도착간격시간 θ에 대한 1계도함수의 PA 추정량부터 소개한다. Park(1996)에서 유도된 바와 같이,

$$\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta} = \frac{1}{\theta} E[\sum_{i \in U} X_i] - \frac{E[f(Y)Y]}{\theta P(Y < X)} E[N_{0,0}(\theta)] E[C_{2,0}(\theta)] \qquad (5)$$

이 된다. 한편

$$E[C_{2,0}(\theta)]=2E[C_{1,0}(\theta)]=2\{E[C_{0,0}(\theta)]-E[X_1]\}.$$

그리고

$$E[\sum_{i\in U}X_i]=E[X_1]+E[X|X<Y]E[N_{0,0}(\theta)-1]$$

이 되며, 또한 Park(1997)으로부터

$$\frac{E[f(Y)Y]}{P(Y<X)}=E[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X] \tag{6}$$

인고로 이들을 (5)에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}&=\frac{1}{\theta}E[X_1]+\frac{1}{\theta}E[X|X<Y]E[N_{0,0}(\theta)-1]\\&-\frac{2}{\theta}E[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]E[N_{0,0}(\theta)]\{E[C_{0,0}(\theta)]-E[X_1]\}\end{aligned} \tag{7}$$

을 얻는다. Park(1996)을 참조하면

$$\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}=\frac{E[F(Y)Y]}{\theta P(Y<X)}E[N_{0,0}(\theta)]\{1-2E[N_{0,0}(\theta)]\}$$

이 되므로, 위의 식(6)을 이 식에 대입하면

$$\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}=\frac{1}{\theta}E[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]E[N_{0,0}(\theta)]\{1-2E[N_{0,0}(\theta)]\} \tag{8}$$

을 얻게 된다. 식 (7)과 (8)에 의해 주어진 1계 도함수들의 추정통계량을 구하기 위해 먼저 몇 가지 부호의 정의를 한다.

$X_1(K)$는 K번째 busy cycle의 첫 번째 X값을 의미한다.

$\sum_{X<Y,K}K$ 은 K번째 busy cycle에서 $X<Y$인 X들의 합계를 의미한다.

$\sum_{Y<X,K}\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}$ 는 K번째 busy cycle에서 $Y<X$인 Y들에 대응하는 $\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}$ 들의 합계를 의미한다.

TNX는 N busy cycle 동안 일어난 X들의 총수에의 X_1들의 총수를 제외한 수. 즉, N busy cycle동안 $X < Y$가 일어난 총수를 의미한다.

TNY는 N busy cycle 동안 일어난 Y들의 총수를 의미한다. 즉, N busy cycle동안 $Y < X$가 일어난 총수를 말한다.

$N_{0,0}(\theta, K)$은 K번째 busy cycle에 해당하는 $N_{0,0}(\theta)$를 의미한다

$C_{0,0}(\theta, K)$은 K번째 busy cycle에 해당하는 $C_{0,0}(\theta)$를 의미한다

위에 정의한 부호들을 사용하여 식(7)과 (8)의 PA 추정통계량을 구하면

$$\left(\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA} = \frac{1}{\theta}\frac{\sum_{K=1}^{N} X_1(K)}{N} + \frac{1}{\theta}\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{X<Y,K} X}{TNX}\left\{\frac{\sum_{K=1}^{N} N_{0,0}(\theta, K)}{N} - 1\right\}$$
$$-\frac{2}{\theta}\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{Y<X,K}\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}}{TNY}\right)\left(\frac{\sum_{K=1}^{N} N_{0,0}(\theta, K)}{N}\right)\left\{\frac{\sum_{K=1}^{N} C_{0,0}(\theta, K)}{N} - \frac{\sum_{K=1}^{N} X_1(K)}{N}\right\} \tag{9}$$

와

$$\left(\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{Y<X,K}\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}}{TNY}\right)\times$$
$$\left(\frac{\sum_{K=1}^{N} N_{0,0}(\theta, K)}{N}\right)\left\{1 - 2\frac{\sum_{K=1}^{N} N_{0,0}(\theta, K)}{N}\right\} \tag{10}$$

을 얻게 된다. 다음으로 식 (7)과 (8)의 양변을 θ에 관해 미분함으로서 수행측도들 $E[C_{0,0}(\theta)]$와 $E[N_{0,0}(\theta)]$의 2계 도함수들을 구해본다.

$$\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2} = -\frac{1}{\theta}\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta} + \frac{1}{\theta^2}E[X_1]$$
$$+\frac{1}{\theta}\frac{dE[X|X<Y]}{d\theta}E[N_{0,0}(\theta) - 1] + \frac{1}{\theta}E[X|X<Y]\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{\theta}\frac{dE[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]}{d\theta}E[N_{0,0}(\theta)]\{E[C_{0,0}(\theta)]-E[X_1]\}\\
&-\frac{2}{\theta}E[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]E[N_{0,0}(\theta)]\{\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}-\frac{1}{\theta}E[X_1]\}\\
-&\frac{2}{\theta}E[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\{E[C_{0,0}(\theta)]-E[X_1]\}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

한편 Park(1997)으로부터

$$
\frac{dE[X|X<Y]}{d\theta}=\frac{1}{\theta}E[X|X<Y]\{1+E[\frac{Xg(X)}{1-G(X)}|X<Y]\}-\frac{1}{\theta}E[\frac{X^2g(X)}{1-G(X)}|X<Y]. \tag{12}
$$

그리고

$$
\begin{aligned}
\frac{dE[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]}{d\theta}&=E[\frac{df(Y)Y/d\theta}{1-F(Y)}|Y<X]\\
&+E[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]E[\frac{dF(Y)/d\theta}{1-F(Y)}|Y<X].
\end{aligned} \tag{13}
$$

또한

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2E[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2}&=-\frac{1}{\theta}\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\\
&+\frac{1}{\theta}\frac{dE[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]}{d\theta}E[N_{0,0}(\theta)]\{1-2E[N_{0,0}(\theta)]\}\\
&+\frac{1}{\theta}E[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\{1-4E[N_{0,0}(\theta)]\}
\end{aligned} \tag{14}
$$

을 얻는다.

다음으로 이들 2계 도함수들의 추정통계량을 구한다. 먼저

$$
\begin{aligned}
(\frac{dE[X|X<Y]}{d\theta})_{PA}&=\frac{1}{\theta}\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{X<Y,K}X}{TNX}\{1+\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{X<Y,K}\frac{Xg(X)}{1-G(X)}}{TNX}\}\\
&-\frac{1}{\theta}\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{X<Y,K}\frac{X^2g(X)}{1-G(X)}}{TNX}
\end{aligned} \tag{15}
$$

그리고

$$\left(\frac{dE[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}\,|Y<X]}{d\theta}\right)_{PA}=\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{Y<X,K}\frac{df(Y)Y/d\theta}{1-F(Y)}}{TNY}$$

$$+\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{Y<X,K}\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}}{TNY}\right)\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{Y<X,K}\frac{dF(Y)/d\theta}{1-F(Y)}}{TNY}\right) \quad (16)$$

인고로, 이로부터

$$\left(\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{PA}=-\frac{1}{\theta}\left(\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA}+\frac{1}{\theta^2}\frac{\sum_{K=1}^{N}X_1(K)}{N}$$

$$+\frac{1}{\theta}\left(\frac{dE[X|X<Y]}{d\theta}\right)_{PA}\left\{\frac{\sum_{K=1}^{N}N_{0,0}(\theta,K)}{N}-1\right\}+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{X<Y,K}X}{TNX}\right)\left(\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA}$$

$$-\frac{2}{\theta}\left(\frac{dE[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}\,|Y<X]}{d\theta}\right)_{PA}\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}N_{0,0}(\theta,K)}{N}\right)\left\{\frac{\sum_{K=1}^{N}C_{0,0}(\theta,K)}{N}-\frac{\sum_{K=1}^{N}X_1(K)}{N}\right\}$$

$$-\frac{2}{\theta}\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{Y<X,K}\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}}{TNY}\right)\left(\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA}\left\{\frac{\sum_{K=1}^{N}C_{0,0}(\theta,K)}{N}-\frac{\sum_{K=1}^{N}X_1(K)}{N}\right\}$$

$$-\frac{2}{\theta}\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{Y<X,K}\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}}{TNY}\right)\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}N_{0,0}(\theta,K)}{N}\right)\left\{\left(\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA}-\frac{1}{\theta}\frac{\sum_{K=1}^{N}X_1(K)}{N}\right\}. \quad (17)$$

그리고

$$\left(\frac{d^2E[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{PA}=-\frac{1}{\theta}\left(\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA}$$

$$+\frac{1}{\theta}\left(\frac{dE[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}\,|Y<X]}{d\theta}\right)_{PA}\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}N_{0,0}(\theta,K)}{N}\right)\left\{1-2\frac{\sum_{K=1}^{N}N_{0,0}(\theta,K)}{N}\right\}$$

$$+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\sum_{K=1}^{N}\sum_{Y<X,K}\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}}{TNY}\right)\left(\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{PA}\left\{1-4\frac{\sum_{K=1}^{N}N_{0,0}(\theta,K)}{N}\right\} \quad (18)$$

을 얻는다. 한편 (1)과 (3)에서 주어진 재래의 방법으로 수행측도 $E[C_{0,0}(\theta)]$의 1계 및 2계 도함

수에 대한 추정통계량을 구하는 공식은

$$\left(\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{FD}=\frac{\sum_{K=1}^{N} C_{0,0}(\theta+\Delta\theta,K)-\sum_{K=1}^{N} C_{0,0}(\theta,K)}{N\Delta\theta} \tag{19}$$

$$\left(\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{FD}=\frac{\sum_{K=1}^{N} C_{0,0}(\theta+\Delta\theta,K)-2\sum_{K=1}^{N} C_{0,0}(\theta,K)+\sum_{K=1}^{N} C_{0,0}(\theta-\Delta\theta,K)}{N(\Delta\theta)^2} \tag{20}$$

으로 주어진다.

3. PA추정값과 FD추정값의 비교

여기에서는 마코프 재생과정을 생성하는 두 누적분포함수들 중 $F(x,\theta)$는 평균 θ인 지수분포를 따르고 $G(y,\mu)$는 평균 μ인 지수분포 혹은 일양분포를 따르는 경우에 시뮬레이션을 행하여 식 (9),(10),(17) 그리고 (18)로 부터 $E[C_{0,0}(\theta)]$ 혹은 $E[N_{0,0}(\theta)]$의 θ에 대한 도함수들의 PA추정값을 구하고, 또한 식 (19)및 (20)으로부터 FD추정값을 구하여 이들을 비교한다. 비교의 방법은 MSE(Mean Squared error)를 사용할 것이다. 지수함수와 일양함수는 모두 Park(1996)에서 주어진 가정을 만족시키므로 식 (9),(10),(17) 그리고 식 (18)을 사용하는데 아무런 문제가 없을 것이다. 재래의 FD방법의 경우$\Delta\theta$의 값에 따라 MSE가 변할 수 있고 수행측도들의 1계 도함수를 재래의 FD방법으로 구할 경우 MSE를 최소화하는 $\Delta\theta$가 Zazanis와 Suri(1993)에서 주어지므로 이러한 $\Delta\theta$를 구하여 FD방법에 의한 추정값을 구할 것이다.

3.1 도착간격시간 및 서비스시간 모두 지수분포를 따를 경우

이 경우 마코프 재생과정은 M/M/l Queue에 해당되며 $F(x,\theta)=1-\exp(-\frac{1}{\theta}x)$ $G(y,\mu)=1-\exp(-\frac{1}{\mu}y)$ 으로 주어질 때, $E[C_{0,0}(\theta)]=\theta^2/(\theta-\mu)$임이 알려져 있다. 양변을 θ에 관해 미분하여

$$dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta=\theta(\theta-2\mu)/(\theta-\mu)^2 \tag{21}$$

그리고

$$d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2=2\mu^2/(\theta-\mu)^3 \tag{22}$$

을 얻는다. 또한 $E[N_{0,0}(\theta)] = \theta/(\mu-\theta)$ 에 의해

$$dE[N_{0,0}(\theta)]/d\theta = \mu/(\mu-\theta)^2 \tag{23}$$

그리고

$$d^2E[N_{0,0}(\theta)]/d\theta^2 = 2\mu/(\mu-\theta)^3 \tag{24}$$

을 얻을 수 있다. 한편

$$\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)} = \frac{Y}{\theta} \tag{25}$$

을 사용하면 식 (9)에 의해 $(\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta})_{PA}$ 을 그리고 식 (10)으로부터 $(\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta})_{PA}$ 을 얻는다. 또한

$$\frac{Xg(X)}{1-G(X)} = \frac{X}{\mu} \tag{26}$$

및

$$\frac{X^2g(X)}{1-G(X)} = \frac{X^2}{\mu} \tag{27}$$

을 사용하면 식 (15)에 의해 $(\frac{dE[X|X<Y]}{d\theta})_{PA}$을 얻고, 역시

$$\frac{df(Y)Y/d\theta}{1-F(Y)} = \frac{Y}{\theta^2}(\frac{Y}{\theta}-1) \tag{28}$$

및

$$\frac{dF(Y)Y/d\theta}{1-F(Y)} = -\frac{Y}{\theta^2} \tag{29}$$

을 사용하면 식 (16)으로부터 $(\frac{dE[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]}{d\theta})_{PA}$을 얻는다.

이들을 모두 종합하면 식 (17)에 의해 $\left(\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{PA}$을 얻고 식 (18)에 의해 $\left(\frac{d^2E[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2}\right)_{PA}$을 얻게 된다.

한편 식 (1)에 의해 주어진 재래의 추정량 $\left(\frac{dE[L(\theta)]}{d\theta}\right)_{FD}$ 의 MSE를 최소로 하는 $\Delta\theta$의 값은 Zazanis와 Suri(1993)에서 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta\theta opt=\left(\frac{8V(L(\theta))}{(d^2E[L(\theta)]/d\theta^2)^2N}\right)^{\frac{1}{4}}+0\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{4}}}\right) \tag{30}$$

M/M/1 Queue의 경우

$$V(C_{0,0}(\theta))=\theta^2+\frac{(\theta\mu)^2(\theta+\mu)}{(\theta-\mu)^3}$$

인고로 식 (22) 및 위의 식 (30)을 이용하여 $\left(\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}\right)_{FD}$의 MSE를 최소로 하는 $\Delta\theta_C$ 값을 구할 수 있다. 또한 수행측도 $E[N_{0,0}(\theta)]$에 관해서도

$$V(N_{0,0}(\theta))=\frac{\mu\theta(\theta+\mu)}{(\theta-\mu)^3}$$

및 식 (24)와 식 (30)으로부터 MSE를 최소로 하는 $\Delta\theta_N$의 값을 구할 수 있다. 이렇게 구한 $\Delta\theta_C$ 및 $\Delta\theta_N$을 사용하여 식 (19) 및 (20)을 통하여 재래의 FD추정값들을 구하고 또한 식 (17) 및 (18)을 통하여 PA추정값들을 구하여 이들의 결과를 아래 표에 적는다. Traffic intensity ρ=0.2, 0.5 그리고 0.75의 각각에 대해 10,000 busy cycle의 시뮬레이션 수행을 50회 행하여 MSE를 구하였으며 시뮬레이션을 위한 전산언어는 MS FORTRAN을 사용하였다.

표 1. 1계 도함수에 대한 MSE

ρ \ MSE	$dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta$ 의 추정값			$dE[N_{0,0}(\theta)]/d\theta$ 의 추정값		
	PA	FD	FD/PA	PA	FD	FD/PA
0.2	0.1179594E-03	0.2354024E-02	20	0.2657627E-08	0.5898455E-06	222
0.5	0.1398028E-02	0.8140597E-01	58	0.3524741E-06	0.2075606E-04	59
0.75	0.2274234E+00	0.6388545E+01	28	0.3555464E-04	0,9230344E-03	26

표 2. 2계 도함수에 대한 MSE

MSE \ ρ	$d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$ 의 추정값			$d^2E[N_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$ 의 추정값		
	PA	FD	FD/PA	PA	FD	FD/PA
0.2	0.2551354E-08	0.2496415E-05	978	0.2177155E-11	0.4274690E-08	1963
0.5	0.3274636E-05	0.1255758E-02	383	0.9613884E-09	0.4966390E-06	517
0.75	0.2775193E-02	0.4571093E+00	165	0.4505106E-06	0.6995206E-04	155

표 3. ρ=0.75 에 대한 결과

도함수 \ 구분	$dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta$			$d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$		
	10000b.s.	100000b.s.	1000000b.s.	10000b.s.	100000b.s	1000000b.s.
MSE	0.190649032 E+00	0.271192130 E-01	0.197556112 E-02	0.236792189 E-02	0.331543545 E-03	0.238961786 E-04
추정값	-0.804274029 E+01	-0.798132619 E+01	-0.799741761 E+01	0.725370699 E+00	0.717974321 E+00	0.719706260 E+00
추정값 -실제값	-0.427402883 E-01	0.186738083 E-01	0.258238671 E-02	0.537069942 E-02	-0.202567948 E-02	-0.293740394 E-03

위의 표 1과 2에서 볼 수 있듯이 모든 경우에 있어 재래의 FD방법보다 PA방법을 사용한 경우 월등히 작은 MSE를 갖는다. 또한 모든 경우에 있어 traffic intensity ρ의 값이 증가 할수록 MSE의 값이 증가함을 볼 수 있으며 일반적으로 ρ의 값이 적을 때 그리고 1계 도함수일 때보다는 2계 도함수일 때 PA방법이 FD방법에 비해 상대적으로 더 우수함을 알 수 있다. 한편 위의 예는 수행측도에 따라서도 MSE의 값이 많은 차이가 날 수 있음을 보이고 있다. 표 3은 시뮬레이션을 사용하여 $dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta$ 및 $d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$의 PA추정 값을 구할 시 busy cycle의 수를 증가시키면 PA추정값 및 그들의 MSE가 어떻게 변하는가를 보여준다. 시뮬레이션시 가장 불안정했던 ρ=0.75에 대한 결과임에도, busy cycle의 수를 증가시킬 때 MSE의 값은 예상했던 대로 감소하며 표 3의 마지막 줄에서 보듯이 도함수들의 PA추정치가 실제의 값에 매우 근접함을 알 수 있다.

3.2 도착간격시간이 지수분포, 서비스시간이 일양분포를 따를 경우

F(x, θ)가 평균 θ인 지수분포를, G(y, μ)가 [0, 2μ]위의 일양분포를 따를 때 이들에 의해 정의되는 마코프 재생과정을 생각한다. 3.1에서와 마찬가지로 식 (25), (9) 및 (10)으로부터 1계 도함수들에 대한 PA 추정값을 얻을 수 있다. 한편 여기에서는 식 (26)과 (27) 대신에

$$\frac{Xg(X)}{1-G(X)}=\frac{X}{2\mu - X} \tag{31}$$

그리고

$$\frac{X^2 g(X)}{1-G(X)}=\frac{X^2}{2\mu - X} \tag{32}$$

이 성립하므로 이들과 식 (15)에 의해 $(\frac{dE[X|X<Y]}{d\theta})_{PA}$을 얻고 역시 식 (28), (29) 및 (16)으로부터 $(\frac{dE[\frac{f(Y)Y}{1-F(Y)}|Y<X]}{d\theta})_{PA}$을 얻는다. 결국 이들을 모두 종합하면 식 (17)에 의해 $(\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2})_{PA}$을 얻고 식 (18)에 의해 $(\frac{d^2E[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2})_{PA}$을 얻게 된다.

한편 여기서도 $(\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2})_{FD}$의 MSE를 최소로 하는 $\Delta\theta_C$ 및 $(\frac{d^2E[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2})_{FD}$의 MSE를 최소로 하는 $\Delta\theta_N$을 구하기 위해 식 (30)을 사용하였다. 이 경우 $V(C_{0,0}(\theta))$ 및 $V(N_{0,0}(\theta))$의 값이 알려져 있지 않으므로 대신 시뮬레이션을 통해 얻은 표본분산을 사용하였다. 여기서는 M/M/1 대기행렬에서와 달리 $dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta$, $d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$, $dE[N_{0,0}(\theta)]/d\theta$ 및 $d^2E[N_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$의 값이 주어지지 않는다. 그러나 busy cycle의 수 N이 증가할수록 이들의 PA 추정값들이 이들의 값에 수렴함을 아므로, 매우 큰 N에 대한 이들의 PA 추정값들을 근사값으로 사용할 수 있다. 위 3.1절의 표 3에서 N이 클 경우 시뮬레이션을 통해 얻은 PA 추정값이 실제 값에 매우 가까움을 볼 수 있다. 여기서도 100만 busy cycle의 시뮬레이션을 행하여 구한 PA 추정값들을 $dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta$, $d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$, $dE[N_{0,0}(\theta)]/d\theta$ 그리고 $d^2E[N_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$ 의 실제값으로 가정하더라도 무리가 없어 보인다. 이러한 가정 하에 위 3.1의 표 1과 2에서와 같이 10000 busy cycle의 시뮬레이션을 50번 행하여 MSE들은 구한 결과가 아래 표 2와 3에 주어진다.

표 1. 1,000,000 busy cycle에 대한 결과

도함수 \ ρ	1계 도함수의 PA 추정값		2계 도함수의 PA 추정값		$\Delta\theta_C$	$\Delta\theta_N$
	$\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}$	$\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta}$	$\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2}$	$\frac{d^2E[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2}$		
0.2	0.9050556E+00	-0.3660775E-02	0.2533661E-02	0.9854388E-04	33.99614	14.4355
0.5	-0.1391340E+01	-0.3782862E-01	0.1283016E+00	0.2039409E-02	7.754351	7.024177
0.75	-0.2151668E+03	-0.2296389E+01	0.7356470E+02	0.7816185E+00	1.639453	1.626074

표 2. 1계 도함수에 대한 MSE

MSE / ρ	$dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta$ 의 추정값			$dE[N_{0,0}(\theta)]/d\theta$ 의 추정값		
	PA	FD	FD/PA	PA	FD	FD/PA
0.2	0.8938102E-04	0.3622886E-02	41	0.3719296E-08	0.7943751E-06	214
0.5	0.6563398E-02	0.458474E+00	53	0.1627675E-05	0.7595756E-04	47
0.75	0.5452016E+03	0.5132668E+04	9	0.5970851E-01	0.5805988E+00	10

표 3. 2계 도함수에 대한 MSE

MSE / ρ	$d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$ 의 추정값			$d^2E[N_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$ 의 추정값		
	PA	FD	FD/PA	PA	FD	FD/PA
0.2	0.3646764E-08	0.563485E-05	1537	0.361432E-11	0.7474555E-08	2075
0.5	0.3381392E-04	0.1205435E-01	356	0.8444245E-08	0.3161707E-05	374
0.75	0.1392041E+03	0.522802E+04	38	0.1545804E-01	0.5438089E+00	35

위의 표들 2와 3에서 보듯이 서비스 시간이 일양분포를 따르는 마코프 재생과정에서의 결과가 위 3.1절의 표 1과 2에서 주어진 M/M/1 대기행렬에서의 결과와 모든 면에서 유사함을 알 수 있다. 즉, 위의 예는 M/M/1 대기행렬 이외의 마코프 재생과정에서도, MSE를 기준으로 생각할 때, PA 추정통계량이 FD 추정통계량보다 휠씬 우수함을 보이고 있다.

4. 결론

이 논문에서 우리는 마코프 재생과정에서 수행측도들의 주어진 모수에 대한 1계 및 2계 도함수를 구함에 있어 재래의 방법에 의한 FD 추정통계량이 새로운 방법으로 얻은 PA 추정통계량보다 휠씬 큰 MSE를 가짐을 시뮬레이션의 예를 통해 보였다. 여기서 사용된 마코프 재생과정은 두 개의 확률변수, 즉 지수분포를 따르는 하나의 확률변수와 지수분포 혹은 일양분포를 따르는 다른 하나의 확률변수로 정의되는 특수한 형태의 확률과정이다. 앞으로 좀더 일반적인 마코프 재생과정에 대해 이론적으로 혹은 수치적으로 PA 추정값의 우수성을 보이는 것이 필요할 것이다. 한편 여기서 사용된 $\Delta\theta_{opt}$는 1계 도함수의 FD 추정통계량의 MSE를 최소화하는 $\Delta\theta$이다. 2계 도함수의 경우 이러한 $\Delta\theta_{opt}$는 아직까지 알려져 있지 않다. 이 논문에서 2계 도함수의 FD 추정값을 구할 때 1계 도함수에 대응하는 $\Delta\theta_{opt}$을 사용하였다. 앞으로 2계 도함수에 대한 FD 추정통계량의 MSE를 최소로 하는 $\Delta\theta_{opt}$을 알아내어 사용할 경우 2계 도함수 FD 추정통계량의 MSE는 이 논문의 3장에서 주어진 값들 보다 더 줄어들 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 박홍식. (1997). 시뮬레이션을 통한 SPA 추정치와 SD 추정치의 비교. 『한국통계학회 추계학술발표회 논문집』
[2] 박홍식. (1999). 마코프 리뉴얼 과정에서 평균 busy cycle의 2계도함수에 대한 시뮬레이션. 『한국 시뮬레이션 학회 '99 추계학술대회 논문집』
[3] Fu,M.C. and Hu,J.Q. (1992). Extensions and Generalizations of Smoothed Perturbation Analysis in a Gerneralized Semi-Markov Process Framwork. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, 1483-1500.
[4] Fu,M.C. and Hu,J.Q. (1993) Second Derivative Sample Path Estimators for the GI/G/m Queue. *Management Science*, 39, 359-383.
[5] Park,H.S. (1996). Smoothed Perturbation Analysis for Performance Measures in a Markov Renewal Process. *Journal of the Korean Statistical Society*, 25, 445-456.
[6] Park,H.S. (1997). Second Derivative Estimation for Performance Measures in a Markov Renewal Process, *The Korean Communications in Statistics* Vol. 4, No 2, 515-522
[7] Suri,R. and Zazanis,M.A. (1988). Perturbation Analysis Gives Strongly Consistent Sensitivity Estimates for the M/G/1 Queue. *Management Science*, 34, 39-64.
[8] Zazanis,M.A. and Suri,R. (1993). Convergence Rates of Finite Difference Sensitivity Estimates for Stochastic Systems, *Operations Research* Vol 41, No 4, 694-703
[9] Zazanis, M.A. and Suri, R. (1994). Perturbation Analysis of the GI/G/1 Queue. *Queueing Systems*, 18, 199-248.