The Korean Communications
in Statistics Vol. 7, No. 3, 2000
pp. 759-766

p^{n-m} Fractional Factorial Design Excluded Some Debarred Combinations[1)]

Byoung Chul Choi[2)] and Hyuk Joo Kim[3)]

Abstract

In order to design fractional factorial experiments which include some debarred combinations, we should select defining contrasts so that those combinations are to be excluded. Choi(1999) presented a method of selecting defining contrasts to construct orthogonal 3-level fractional factorial experiments which exclude some debarred combinations. In this paper, we extend Choi's method to general p-level fractional factorial experiments to select defining contrasts which could exclude some debarred combinations.

Keywords : fractional factorial experiments, debarred combinations, defining contrasts

1. 서론

Greenfield(1976)는 2수준계 요인실험에서 최소의 실험횟수로 원하는 요인효과를 추론할 수 있는 2^{n-m} 일부실시법을 위한 정의대비 찾는 방법을 제안하였고, Franklin과 Bailey(1977)는 Greenfield의 방법을 수정하여 2수준계 요인실험에서 정의대비를 선택하기 위한 알고리즘을 제안하였다. 조작상 실험할 수 없는 처리조합, 조작상 실험할 수는 있으나 경제적으로 많은 비용이 드는 처리조합 등 몇 가지 원인으로 실험할 수 없는 처리조합들이 포함된 요인실험에서는 이러한 정의대비 선택 알고리즘을 수정 보완하지 않으면 안 된다.

이를 위해 Cheng과 Li(1993)가 Franklin과 Bailey(1977)의 정의대비 선택 알고리즘을 활용하여 2수준계 요인실험에서 실험 불가능한 처리조합(debarred combination)을 배제하면서 원하는 요인효과들을 추론할 수 있는 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 제안하였다. 최병

1) The author wish to acknowledge the financial support of the Korea Research Foundation made in the program year of 1998
2) Professor, Division of Mathematics and Statistical Informatics, Chonbuk National University, Chonju, Chonbuk, 561-756, Korea
E-mail : jbcbc@stat.chonbuk.ac.kr
3) Associate Professor, Division of Mathematical Science, Wonkwang University, Iksan, Chonbuk, 570-749, Korea
E-mail : hjkim@wonnms.wonkwang.ac.kr

철과 최승현(1998)은 Cheng과 Li의 방법을 3수준계 요인실험으로 확장하여 한 개의 실험 불가능한 처리조합이 있을 때 이러한 처리조합이 배제되는 일부실시법이나 교락법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법에 대하여 논했는데 이 방법은 실험 불가능한 처리조합이 2개 이상 있을 경우에 대한 연구는 실행되지 않아 최병철(1999)이 3수준계 요인실험의 일부실시법이나 교락법을 위한 정의대비를 선택하기 위한 Franklin(1985)의 알고리즘을 Cheng과 Li(1993)의 방법으로 확장 적용하여 3수준계 요인실험에서 2개 이상의 실험 불가능한 처리조합이 있을 때 이러한 처리조합이 배제되는 일부실시법이나 교락법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 제안하였다.

본 연구에서는 최병철(1999)의 결과를 일반적인 경우로 확장하여, $p(\geq 2)$수준계 요인실험에서 실험 불가능한 처리조합이 있을 때 이러한 처리조합이 배제되는 일부실시법이나 교락법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 제안하고자 한다.

2. 교락법과 일부실시법

2수준계 요인실험이나 3수준계 요인실험에서처럼 인자의 수준이 모두 $0,1,2,\cdots,p(p\geq 2)$인 p^n 요인실험에서 인자는 영문 대문자로, k개의 인자 $F_1, \cdots, F_k,\ 1\leq k\leq n,$ 의 어떤 수준조합은 $f_1^{x_1}\cdots f_k^{x_k}$, 효과(effect)는 $F_1^{x_1}F_2^{x_2}\cdots F_n^{x_n}$ 로 나타낸다. 여기서 $x_i=0,1,2,\cdots,p-1$로 해당인자의 수준이고, $i=1,\cdots,n$ 이며, $(\text{인자})^p=1$ 로 간주한다. 또, 합동식에 관한 정리에 의해 F가 인자일 때, $1<c<p$ 이면 $F^{cd}=F$인 $d(1<d<p)$가 유일하게 존재하므로 인자 F_1과 인자 F_2 의 일반화 곱(generalized interaction)은 서로 다른 것이 $p-1$개가 있고, 첫 인자가 제곱이 아닌 것을 택하여 $F_1F_2,\ F_1F_2^2,\ \cdots,\ F_1F_2^{p-1}$등으로 표현할 수 있다. 같은 이유로 효과 X와 효과 Y와의 일반화 곱도 서로 다른 것이 $p-1$개가 있고 이들은 $XY,\ XY^2,\ \cdots,\ XY^{p-1}$ 로 표현할 수 있다.

Greenfield(1976)는 추정이 필요한 효과들의 집합을 요구집합(requirement set)이라 불렀다. p^n 요인실험에서 요구집합의 주효과의 자유도는 $p-1$이나, 2인자 교호작용효과의 자유도는 $(p-1)^2$, 3인자 교호작용효과의 자유도는 $(p-1)^3$ 등이므로 요구집합의 모든 효과들을 자유도가 각각 $p-1$이 되도록 교호작용효과 $A\times B$를 $p-1$개의 성분효과 $AB,\ AB^2,\ \cdots,\ AB^{p-1}$ 으로, 교호작용효과 $A\times B\times C$를 $(p-1)^2$개의 성분효과 $ABC,\ ABC^2,\ AB^2C,\ AB^2C^2,\ \cdots,\ AB^{p-1}C^{p-1}$ 등으로 나누어 쓰면 원하는 효과들을 추정하기 위한 정의대비를 선택하기가 편리해진다. 반복이 없는 교락법에서는 자유도가 $p-1$인 이 요구집합의 효과들이 정의대비로 선택하지만 않으면 된다. 그러나, 일부실시법에서는 별명관계 때문에 요구집합과 자유도가 $p-1$이 되는 요구집합의 모든 한 쌍씩의 일반화 곱(generalized interaction)은 어느 것도 정의대비로 선택될 수 없고, 이와 같이 정의대비로 선택될 수 없는 효과들의 집합을 선택불가집합(ineligible set)이라 부른다.

예 1. 5^5요인실험에서 인자 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$와 2인자 교호작용 $A\times B,\ B\times C$의 효과를 추정해

야할 경우 요구집합은 {A, B, C, D, E, $A\times B$, $B\times C$}인데, 모든 효과들을 자유도가 4가 되도록 다시 쓰면 요구집합과 선택불가집합이 각각 다음과 같이 된다.

$$\{ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ AB,\ AB^2,\ AB^3,\ AB^4,\ BC,\ BC^2,\ BC^3,\ BC^4\},$$

$$\{I,\ A,\ B,\ AB,\ \cdots,\ AB^4,\ C,\ AC,\ \cdots,\ AC^4,\ BC,\ \cdots,\ BC^4,\ ABC,\ ABC^2,\ \cdots,\ AB^4C^4,\ D,\ AD,\ \cdots,\ AD^4,\ BD,\ \cdots,\ BD^4,\ ABD,\ \cdots,\ AB^4D^4,\ CD,\ \cdots,\ CD^4,\ BCD,\ \cdots,\ BC^4D^4,\ E,\ AE,\ \cdots,\ AE^4,\ BE,\ \cdots,\ BE^4,\ ABE,\ \cdots,\ AB^4E^4,\ CE,\ \cdots,\ CE^4,\ BCE,\ \cdots,\ BC^4E^4,\ DE,\ \cdots,\ DE^4\}$$

일반적으로, p^n요인실험에서의 요구집합과 선택불가집합에서, 교호작용효과 $A\times B$는 $p-1$개의 성분 AB, $\cdots$, AB^{p-1}으로 분해하여 나타내고, 인자 C와 성분 AB^2 등의 일반화 곱은 자유도가 $(p-1)^2$이므로 자유도가 각각 $p-1$인 성분 AB^2C, $\cdots$, AB^2C^{p-1} 등으로 분해하여 표현한다. 따라서, 선택불가집합의 모든 성분들은 정의대비로 선택될 수 없다.

최병철(1999)은 3^5요인실험에 대해 Franklin(1985)의 선택가능 효과표 Table 2나 Table 3과 다른 선택가능 효과표를 제공했다. 본 논문에서는 다음 예 2의 5^5요인실험을 통해 최병철(1999)과 유사한 방법으로 p^n요인실험에서 최소의 실험횟수로 주어진 요구집합의 효과들을 추정하기 위한 일부실시법 또는 교락법을 선택가능 효과표를 만들어 설계하고자 한다.

***예** 2*(예 1의 연속). 예 1에서 주어진 요구집합의 효과들의 총 자유도가 52이므로 최소의 실험횟수는 5^3임을 알 수 있고, 따라서 5^{5-2} 일부실시법을 설계하면 된다. 만약 5^{5-2} 일부실시법으로 요구집합의 효과들을 추정할 수 없다면 5^{5-1} 일부실시법을 고려하는 등 실험횟수를 늘려 가면 된다. 선택불가집합의 3인자 성분효과에 있는 인자 A, B, C를 기본 인자로 D, E를 추가 인자로 하면 자유도가 모두 4이면서 기본 효과(basic effect)의 개수와 같은 $(5^3-1)/4\ +\ 1$개의 행과, 추가 인자마다 4개씩의 열을 갖는 다음 표2.1과 같은 선택가능 효과표 (eligible-effects table)를 만들 수 있다. 여기서, 추가 인자마다 4개씩의 열을 갖게 한 것은 선택가능 효과표의 모든 원소의 자유도가 모두 4가 되도록 한 것이다. 일반적으로 p^{n-m} 일부실시법의 설계를 위한 선택가능 효과표에서는 $n-m$개의 기본인자를 전개한 $(p^{n-m}-1)/(p-1)\ +\ 1$개의 행과, m개의 추가인자마다 $p-1$개씩의 열을 갖는다.

표2.1의 2원표에서 첫 번째부터 네 번째 열에 있는 선택가능 효과중 하나인 X와 다섯 번째부터 여덟 번째 열에 있는 선택가능 효과중 하나인 Y와의 일반화 곱 XY, XY^2, XY^3, XY^4이 모두 선택 가능하면 X와 Y를 정의대비로 선택한다. 예를 들어, ACD와 ACE의 일반화 곱 중에는선택불가효과 DE^4이 있어 부적당하나, ACD와 AC^2E의 일반화 곱은

$$(ACD)(AC^2E)\ =\ A^2C^3DE\ =\ (A^2C^3DE)^3\ =\ AC^4D^3E^3,$$

$$(ACD)(AC^2E)^2 = A^3DE^2 = (A^3DE^2)^2 = AD^2E^4,$$

표2.1. 선택가능 효과표

		추가인자					
		D			E		
	I	–	···	–	–	···	–
	A	–	···	–	–	···	–
	B	–	···	–	–	···	–
	AB	–	···	–	–	···	–
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	AB^4	–	···	–	–	···	–
	C	–	···	–	–	···	–
	AC	ACD	···	ACD^4	ACE	···	ACE^4
	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
기본 효과	AC^4	AC^4D	···	AC^4D^4	AC^4E	···	AC^4E^4
	BC	–	···	–	–	···	–
	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
	BC^4	–	···	–	–	···	–
	ABC	$ABCD$	···	$ABCD^4$	$ABCE$	···	$ABCE^4$
	ABC^2	ABC^2D	···	ABC^2D^4	ABC^2E	···	ABC^2E^4
	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
	AB^4C^4	AB^4C^4D	···	$AB^4C^4D^4$	AB^4C^4E	···	$AB^4C^4E^4$

– : 선택불가 효과

$$(ACD)(AC^2E) = A^4C^2DE^3 = (A^4C^2DE^3)^4 = AC^3D^4E^2,$$
$$(ACD)(AC^2E) = C^4DE^4 = (C^4DE^4)^4 = CD^4E$$

로 모두 선택 가능하다. 이렇게 선택된 효과들을 정의대비로 하면 정의관계는

$$I = ACD = AC^2E = AC^4D^3E^3 = AD^2E^4 = AD^2E^4 = CD^4E$$

가 된다. 또, ACD^2과 AC^2E의 일반화 곱은 ADE^2과 CDE로 모두 선택 가능하여 ACD^2과 AC^2E도 정의대비로 선택될 수 있다. 위의 정의관계로부터 최병철(1999)과 같은 방법으로 요구집합의 모든 효과들에 대한 별명관계를 구할 수 있다. 또 6개의 정의대비 $I = ACD$, $I = AC^2E$,

$I = AC^4D^3E^3$, $I = AD^2E^4$,$I = AD^2E^4$, $I = CD^4E$ 중에서 둘을 택하여 5^5 요인실험을 25개의 블록으로 나누어 그 중 한 블록을 선택하여 실험하여도 요구집합의 모든 효과들을 추정할 수 있음을 알 수 있다. 합동식을 이용하여 독립인 정의대비 $I=ACD$와 $I=AC^2E$ 로부터 선형 표현식

$$L_1 = x_1 + x_3 + x_4 (\bmod 5) \quad \text{과} \quad L_2 = x_1 + 2x_3 + x_5 (\bmod 5)$$

을 만들고 순서쌍 (L_1, L_2)의 값이 각각 $(0,0),(0,1),\cdots,(5,5)$가 되는 처리조합끼리 같은 군으로 묶으면 블록 크기가 각각 125인 25개의 블록을 얻을 수 있다. 처리조합(treatment combination) 00000을 포함하는 블록은 군(group)을 이루고 나머지 8개의 블록은 이 군의 잉여류(coset)가 된다. 편의상 이들 25개의 블록을 모두 잉여류라고 부르자. 이들은 모두가 동일한 별명관계를 갖고 있다는 의미에서 동치(equivalent)이다.

일반적으로 p^n요인실험의 교락법이나 p^{n-m} 일부실시법의 설계를 위해서는 2원표에서 추가인자의 열들 중에서 1개씩 모두 m개의 선택가능 효과들을 택하여 이 들의 $(p-1)m(m-1)/2$개의 모든 일반화 곱들이 모두 선택 가능하면 그 선택가능 효과들과 그 들의 일반화 곱들을 모두 포함한 $m+(p-1)m(m-1)/2$개의 효과들로 된 정의관계에서 m개의 효과들을 택한 정의대비를 이용하여 p^n 요인실험을 p^m개의 블록으로 나누고 그 중 한 블록을 선택하여 실험하면 된다. 이 때 법(mod) p의 선형표현식의 순서쌍 $(L_1, L_2, \cdots, L_m)$의 값이 각각 $(0,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $(p,p,\cdots,p)$이 되는 처리조합끼리 같은 군으로 묶으면 크기가 각각 p^{n-m}인 p^m개의 잉여류를 얻을 수 있고 이 잉여류들 중 하나를 택하여 실험하면 p^{n-m} 일부실시법이 된다. 그런데, p가 커지면 선택가능 효과표의 행의 크기가 너무 커지므로 m개의 선택가능 효과들을 택하여 이 들의 모든 일반화 곱들이 모두 선택 가능한 지 확인해 가면서 행을 추가해 가면 편리하다.

3. 실험 불가능한 수준조합이 배제되는 p^{n-m} 일부실시법

p^n요인실험에서 k개의 인자 F_1, $\cdots$, F_k의 어떤 수준조합

$$f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}, \qquad c_1, \cdots, c_k \text{는 고정된 하나의 수준},$$

을 실험 불가능한 조합(debarred combination)이라고 가정하자. 그러면, 실험 불가능한 처리조합은 p^n개의 처리조합 중 p^{n-m} 개 있으며, 이들은

$$f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k} f_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdots f_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_j = 0,\ 1,\ 2, \cdots, p-1, \quad j = k+1,\ \cdots,\ n,$$

으로 표현된다. p^{n-m}일부실시법에서 실험 불가능한 처리조합이 없을 경우에는 p^m 개의 잉여류들 모두가 동일한 별명관계를 갖고 있는 동치(equivalent)이므로 그 중 하나를 사용하면 된다. 그러나 실험 불가능한 처리조합이 있을 경우에는 어떤 잉여류는 그 처리조합을 포함하게 되어 요구집합의 효과중 일부를 추정할 수 없게 된다. 최악의 경우 어떤 잉여류는 실험 불가능한 처리조합들로만 구성되어 실험 자체를 하지 못할 수도 있을 것이다. 이런 점을 해결하기 위해서는 실험 불가능한 처리조합이 배제되는 잉여류가 생성되도록 정의대비들을 적절히 선택해야 한다.

서로 독립인 m개의 정의대비들의 집합이 어떤 실험 불가능한 처리조합이 배제되는 잉여류를 적어도 하나 생성한다면, 이러한 정의대비들의 집합은 수용 가능(acceptable)하다고 한다. 또, 어떤 효과 X 에 나타나는 인자들의 집합이 실험 불가능한 수준조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$에 나타나는 인자들의 집합 $\{F_1, \cdots, F_k\}$의 부분집합이면, $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$과 X는 양립한다(compatible)고 한다. 예를 들어, 실험 불가능한 수준조합 $a^1b^0c^2$은 효과 AB^2이나 ABC 등과는 양립하지만 $ACDE$와는 양립하지 않는다. 이와 같은 정의대비의 수용 가능성과 양립성은 본 논문에서 실험 불가능한 처리조합이 배제되는 블럭을 만들기 위한 중요한 기준이 된다. p^{n-m} 일부실시법에서 하나의 수준조합이 실험 불가능할 때, 주어진 정의대비들의 집합이 수용 가능하게 되는 필요충분조건은 다음 정리와 같다.

정리 1. p^{n-m} 일부실시법에서 하나의 수준조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$이 실험 불가능할 때, 서로 독립인 p개의 정의대비들이 수용 가능할 필요충분조건은 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$가 적어도 한 개의 정의대비와 양립하는 것이다.

증명. $X = F_{i_1}^{a_{i_1}}\cdots F_{i_l}^{a_{i_l}}$, $1\le i_1 < \cdots < i_l \le k$, 를 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$와 양립하는 정의대비라 하자. 모든 잉여류들은 Kempthorne(1952)의 선형식 $L = \alpha_{i_1}x_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_l}x_{i_l} (\bmod\ p)$, $\alpha_{i_j} = 1, 2, \cdots$ 또는 $p-1$, $x_{i_j} = 0, 1, \cdots$ 또는 $p-1$, $j = 1, 2, \cdots, l$, 에 의해 생성된다. 실험 불가능한 처리조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k} f_{k+1}^{a_{k+1}}\cdots f_n^{a_n}$ 의 선형식 값은 $L = \alpha_{i_1}x_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_l}x_{i_l} (\bmod\ p)$에 의해서만 결정되므로 $0, 1, \cdots$ 또는 $p-1$ 중 하나가 된다. 따라서 $(p-1)/p$의 잉여류들에는 실험 불가능한 처리조합이 나타나지 않아 주어진 정의대비들은 수용 가능하다.

반대로, $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$와 양립하는 정의대비가 없다고 하자. 그러면 어떤 정의대비 X도 X 에 나타나는 인자들의 집합이 실험 불가능한 수준조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$에 나타나는 인자들의 집합 $\{F_1, \cdots, F_k\}$의 부분집합이 아니므로 X 에 나타나는 인자 중 집합 $\{F_1, \cdots, F_k\}$의 인자가 아닌 것이 하나 이상 있다. 이런 인자 하나를 F_m $(k < m < n)$ 이라 하면 정의대비 X에 연관된 실험 불가능한 처리조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k} f_{k+1}^{a_{k+1}}\cdots f_n^{a_n}$의 선형식의 값은 a_m의 값에 따라 $0, 1, \cdots$ 또는 $p-1$이 되어 모든 잉여류들에 실험 불가능한 처리조합이 나타나게 된다. 따라서, 주어진 정의대비들은 수용 불가능하다. ■

정리 2. p^{n-m} 일부실시법에서 2개의 수준조합이 실험 불가능할 때, 서로 독립인 m개의 정의

대비들이 수용 가능할 필요충분조건은 실험 불가능한 두 수준조합들이 각각 적어도 한 개의 정의대비와 양립하는 것이다.

증명. (a) 2개의 실험 불가능한 수준조합들이 각각 서로 다른 한 개씩의 정의대비와 양립하는 경우; 첫 번째 실험 불가능한 수준과 양립하는 정의대비의 선형식 L_1에서 실험 불가능한 처리조합들의 값을 α(정리 1에 의해 이 값은 0, 1 또는 $p-1$중 한 값이다)라 하고 첫 번째 실험 불가능한 수준과 양립하는 정의대비의 선형식 L_2에서 실험 불가능한 처리조합들의 값을 β (0, 1, $\cdots$, $p-2$ 또는 $p-1$)라 하면 3^p개의 잉여류들 중 $L_1=\alpha$ 가 아닌 $\{(p-1)/p\}p^m$개의 잉여류들에는 첫 번째 실험 불가능한 처리조합들이 나타나지 않고 이 중 $L_2=\beta$ 가 아닌 $\{(p-1)/p\}^2p^m$개의 잉여류들에는 두 번째 실험 불가능한 처리조합들이 나타나지 않아 주어진 정의대비들이 수용 가능하다.

(b) 2개의 실험 불가능한 수준조합들이 같은 정의대비 한 개와 양립하는 경우; (a)와 같은 방법으로 첫 번째 실험 불가능한 처리조합들의 선형식 값을 $L_1=\alpha$, 두 번째 실험 불가능한 처리조합들의 선형식 값을 $L_1=\beta$ 라 하면 $L_1=\alpha$ 와 $L_1=\beta$ 가 아닌 $\{(p-1)/p\}^2p^m$개의 잉여류들에는 실험 불가능한 처리조합들이 나타나지 않고, 특히, $\alpha=\beta$ 이면 $\{(p-1)/p\}p^m$개의 잉여류들에는 실험 불가능한 처리조합들이 나타나지 않아 주어진 정의대비들이 수용 가능하게 된다.

(c) 2개의 실험 불가능한 수준조합들 중 하나라도 양립하는 정의대비가 없는 경우는 정리 1에 따라 주어진 정의대비들은 수용 불가능하다.■

정리 2와 예 4로부터 다음 따름정리가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

따름정리 2. p^{n-m} 일부실시법에서 $q(\le m)$개의 실험 불가능한 수준조합들이 각각 서로 독립인 m개의 정의대비들 중 서로 다른 정의대비와 양립하는 경우 그 정의대비들은 수용 가능하고 실험 불가능한 처리조합이 나타나지 않는 잉여류는 $\{(p-1)/p\}^qp^m$개 이상 있다.

최병철(1999)의 예3과 예4는 정리1과 정리2에서 p가 3인 경우이고 p가 3보다 큰 경우의 예도 유사하게 보일 수 있다.

정리 3. p^{n-m} 일부실시법에서 q개의 수준조합이 실험 불가능할 때, 서로 독립인 m개의 정의대비들이 수용 가능하지 않을 조건은 다음과 같다.

(1) 적어도 한 개의 실험 불가능한 수준조합이 양립하는 정의대비를 갖지 않는다.

(2) 실험 불가능한 수준조합들이 모두 동일한 한 개의 정의대비와 양립하면서 그 선형식의 값들이 다르다.

증명. (1) 실험 불가능한 어떤 수준조합과 양립하는 정의대비를 갖지 않는다면 선형식의 값으로 0, 1, $\cdots$, $p-2$ 와 $p-1$을 모두 갖게 되므로 실험 불가능한 처리조합들이 모든 잉여류들에 나타나 그 정의대비들이 수용 가능하지 않다.

(2) 정리 2의 증명 (b)와 같은 방법으로 하면 실험 불가능한 처리조합들이 모든 잉여류들에 나타나 그 정의대비들이 수용 가능하지 않음을 쉽게 알 수 있다.

참고로, $q(\geq 3)$개의 실험 불가능한 수준조합들이 각각 독립인 m개의 정의대비들과 양립하나 그 정의대비들이 서로 다르지 않는 것이 있을 경우에는 정의대비들이 수용 가능하지 않을 수도 있음을 정리 3에서 알 수 있다.

4. 요약

실험 불가능한 수준조합이 있는 경우에는 일반적인 p^{n-m} 일부실시법과는 달리 정의대비를 택할 때 선택 불가능한 효과들을 고려해야 하기 때문에 제약이 있다. 최병철(1999)은 실험 불가능한 수준조합이 있는 경우 Cheng과 Li(1993)의 2-수준계 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 3-수준계 일부실시법으로 확장 적용하여 실험 불가능한 수준조합을 배제하면서 원하는 요인효과들을 추론할 수 있는 방법을 제시하였다.

본 연구에서는 최병철(1999)의 결과를 일반적인 경우로 확장하여, $p(\geq 2)$수준계 요인실험에서 실험 불가능한 처리조합이 있을 때 이러한 처리조합이 배제되는 일부실시법이나 교락법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 제안하였다. 여기서는 Franklin(1985)의 알고리즘과는 달리 요구집합, 선택불가집합과 선택가능 효과표에서, 모든 효과를 자유도가 각각 $p-1$인 성분으로 분해하여 표현하여 정의대비를 바로 택할 수 있게 하였다. 실험 불가능한 수준조합이 배제되는 p^{n-m} 일부실시법의 단계별 설계는 최병철(1999)의 3^{n-p} 일부실시법의 경우와 같으므로 여기서는 생략한다.

참고문헌

[1] 최병철(1999). 3^{n-p} Fractional Factorial Design Excluded Some Debarred Combinations. *한국통계학회논문집.* 6권 3호, 695-705.

[2] 최병철, 최승현(1998). 실험 불가능한 처리조합이 배제되는 3^{n-p} 일부실시법. *응용통계연구.* 11권, 303-315

[3] Cheng, C. S., Li, C. C. (1993). Constructing Orthogonal Fractional Factorial Designs When Some Factor-Level Combinations Are Debarred. *Technometrics.* Vol. 35. 277-283.

[4] Franklin, M. F. (1985). Selecting Defining Contrasts and Confounded Effects in p^{n-m} Fractional Experiments. *Technometrics.* Vol. 27. 165-172.

[5] Franklin, M. F., Bailey, R. A. (1977). Selection of Defining Contrasts and Confounded Effects in Two-level Experiments. *Applied Statistics.* Vol. 26. 321-326.

[6] Greenfield, A. A (1976). Selection of Defining Contrasts in Two-level Experiments. *Applied Statistics..* Vol. 25. 64-67.