The Korean Communications
in Statistics Vol. 7, No. 3, 2000
pp. 655-665

Testing for A Change Point by Model Selection Tools in Linear Regression Models[1]

Yong-Hwa Yoon[2], Jong-Tae Kim[3]
Kil-Ho Cho[4], Kyung-A Shin[5]

Abstract

Several information criterions, Schwarz information criterion (SIC), Akaike information criterion (AIC), and the modified Akaike information criterion (AIC_c), are proposed to locate a change point in the multiple linear regression model. These methods are applied to a stock Exchange data set and compared to the results.

Keywords : Schwarz information criterion, Akaike information criterion, change point.

1. 서론

회귀분석은 많은 학문 분야에 응용성이 뛰어난 매우 중요한 통계분야이다. 만일 데이터가 어느 시점 이후에서 모형의 변환이 일어났다면, 하나의 회귀모형만을 사용하여 데이터를 분석하는 것은 잘못된 분석의 결과를 낳을 뿐 아니라, 그 데이터의 모형을 잘 적합시키지 못하게 된다. 그러므로 회귀모형에서 전환점(changing point)에 대한 분석은 관찰된 데이터에 대한 올바른 회귀모형을 구하는데 매우 중요한 역할을 한다. 회귀모형에서 전환점 문제들에 대해 많은 연구들이 다음과 같이 진행되어져 왔다.

Quandt(1958, 1960)는 한 개의 전환점을 기준으로 두 개의 회귀모형을 따르는 선형회귀 모형의 추정과 검정에 기초한 우도비(likelihood ratio)에 대한 연구를 하였다. Ferreira(1975)는 알려진 전환점을 가지는 모형에 대한 가정을 가지고, 베이지안 관점에서 전환된 회귀모형을 연구했다. Brown, Durbin과 Evans(1975)는 중회귀모형에서 전환점들을 검정하기 위한 순환 잔차(residuals)를 이용한 방법을 소개하였다. Choy와 Broemeling(1980)은 전환점에 대한 선형모형에서의 베이지안 추론을 연구하였고, Holbert(1982)는 베이지안 방법을 적용하여, 단순선형모형과 중선형모형에서 전환점을 조사했다.

---

1) This research was supported in part by the Taegu University Research Grant, 2000
2) Professor, Department of Statistics, Taegu University. (e-mail: yhyoon@taegu.ac.kr)
3) Associate Professor, Department of Statistics, Taegu University. (e-mail: jtkim@taegu.ac.kr)
4) Professor, Department of Statistics, Kyungpook National University.
5) Assistant, Department of Statistics, Kyungpook National University.

서 전환점을 조사했다.

통계적 전환점에 대한 문제는 통계 분석적인 측면에서 많은 관심의 대상이 되어 왔다. Sen과 Srivastava(1973)는 다변량 가우시안(Gaussian) 관찰 값들의 수열 평균 벡터들의 전환점 문제에 대해 연구하였다. Srivastava와 Worsley(1986)는 평균벡터에서의 다중 전환에 대한 검정통계량과 그것의 분포를 유도하였다. Chen과 Gupta(1995, 1997)는 우도함수 추정방법을 사용하여 다중 평균 벡터와 공분산 전환점들에 대한 문제를 연구했다. Hawkins(1989) 는 선형회귀모형의 전환점을 검정하기 위해 교집합과 합집합의 방법을 이용하였다. Chen(1998)은 Schwarz 정보판별함수를 사용하여 회귀모형에 대한 전환점에 대해 최근 연구하였다.

다음절에서는 정보판별함수들의 여러 가지 유형들에 대하여 조사하였다. 3절에서는 중 선형회귀모형에서의 전환점에 대해 가설 검정을 연구하였다. 4절에서는 보스톤 주식시장과 뉴욕 주식시장에 대한 데이터를 가지고 실제 예를 들어 전환점에 대한 검정의 타당성을 조사하였다. 끝으로 5절에서는 결론과 방향을 논의하였다.

2. 모형선택을 위한 정보판별함수들

Schwarz 정보판별함수와 Akaike 정보판별함수는 모형선택의 도구로서 회귀모형이나 선형모형 혹은 자기회귀 (autoregressive) 모형등에 있어서 적절한 모형을 선택하기 위해 많이 사용되고 있는 정보판별함수들이다.

Schwarz 정보판별함수(Schwarz Information Criterion, *SIC*)는 베이지안 정보판별함수(Baysian Information Criterion, *BIC*)라고도 불리워지는데, Schwarz(1978)에 의해 소개되었다. Schwarz 정보판별함수는 다음과 같이 정의된다.

$$SIC(k) = -2\log L(\ \widehat{\theta_n^k}) + p\log n$$

여기서 $\log L(\ \widehat{\theta_n^k})$는 모수 θ_n^k 에 대한 우도함수이고, p는 모형에 포함된 미지의 모수의 수를 나타낸다. Schwarz 정보판별함수에 대한 많은 문헌들은 다음과 같다. Cavanaugh 와 Neath(1999)는 *SIC*에 대해 보다 일반적인 유도과정을 연구하였다. Kass와 Rafferty(1995)와 Kass와 Wasserman(1995)은 *SIC*에 기초한 모형선택은 Bayes factors에 기초한 모형선택과 일치함을 주장하였다. 그러므로 *SIC*는 사전분포들을 정확하게 설정할 수 없는 많은 베이지안 모형 설정 문제에서 사용되었다. 그리고 Akaike 정보판별함수와는 달리 *SIC*는 일치성(Consistency Property)를 가진다는 것이 *SIC*의 장점이다.

Akaike 정보판별함수(Akaike Information Criterion, *AIC*)은 Akaike(1973, 1974)에 의해 점근적 불편 추정량이 제시되었으며 정보판별함수는 다음과 같이 정의된다.

$$AIC(k) = -2\log L(\ \widehat{\theta_n^k}) + 2p.$$

그리고, Sugiura(1978)는 쿨백-레이블러 정보함수 (Kullback-Leibler Information)의 소표본에서 편차수정추정량(Bias Corrected Estimates)를 제시하였는데 이는 수정된 Akaike 정보판별함수 (Correated Akaike Information Criterion, AIC_c) 라고 이름지었다. Hurvich와 Tsai(1989)는 변수선택문제에서 소표본에서 모형선택을 하는데 있어서 *AIC*보다는 AIC_c가 보다 훌륭한 편차의 성

질을 가지고 있고, 또한 참 모형을 올바르게 선택을 확률이 매우 높다는 사실을 제시하였다. Hurvich와 Tsai(1989)가 제시한 AIC_c는 다음과 같다.

$$AIC_c(k) = -2\log L(\ \widehat{\theta_n^k}) + n\frac{1+(p-1)/n}{1-((p-1)+2)/n}.$$

수정된 Akaike 정보판별함수에 대한 문헌으로는 Fujikoshi 와 Satoh(1997)의 중선형회귀모형에 대한 연구가 있고 Hughes 와 King (1999)은 쿨백-레이블러 정보함수에 기초한 변수 선택의 문제에서 AIC_c와 쿨백-레이블러 정보함수와의 관계를 다루었다.

다음절에서는 SIC와 AIC, 그리고 AIC_c의 정보판별함수를 이용하여 중선형회귀모형에서의 전환점을 찾는 검정문제에서 이들의 역할을 연구할 것이다.

3. 중회귀모형에서의 전환점의 선택

중선형회귀모형은 다음과 같다.

$$y_i = \underline{x}_i'\underline{\beta} + \varepsilon_i\ ,\qquad i=1,\cdots,n.$$

여기서 $\underline{x_i}' = (1, x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi})$이고, $\underline{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p)$는 $(p+1)$개의 미지의 회귀벡터이다. ε_i는 미지의 σ^2을 가지고, 각각 독립이며 $N(0, \sigma^2)$의 분포를 가지는 확률오차이다. 그러므로 y_i은 $N(x_i'\beta, \sigma^2)$로 분포되어져 있는 확률변수이다. 이러한 중선형회귀모형에서 임의의 k에서 전환점에 대한 검정을 생각하자. 전환점에 대한 귀무가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \mu_{yi} = \underline{x}_i'\underline{\beta}\ ,\qquad i = 1,\cdots,n\ .$$

위의 귀무가설에 대한 대립가설은 다음과 같다.

$$H_1 : \mu_{yi} = \underline{x}_i'\underline{\beta}_1\ ,\qquad i = 1,\cdots,k \ \text{와}$$

$$\mu_{yi} = \underline{x}_i'\underline{\beta}_2\ ,\qquad i = k+1,\cdots,n\ .$$

여기서, $k=2,\cdots,n-2$이고 $k+1$은 전환점의 위치이다. $\underline{\beta}$, $\underline{\beta}_1$과 $\underline{\beta}_2$는 미지의 회귀모수이다.

중회귀모형에서의 모수들에 대한 최우도 추정값을 얻기 위해 다음의 절차들을 고려하자.

$$\underline{y}=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix},\qquad \underline{\beta}=\begin{bmatrix} \beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{p1}\\ 1 & x_{12} & \cdots & x_{p2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{1n} & \cdots & x_{pn}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} \underline{x}_1\\ \underline{x}_2\\ \vdots\\ \underline{x}_n\end{bmatrix}.$$

그러면 귀무가설 H_0의 모형은 다음과 같다.

$$H_0:\ \underline{\mu}_y = X\underline{\beta}\ .$$

여기서 $\underline{\mu}_y = (\mu_{y1}, \mu_{y2}, \cdots, \mu_{yn})'$ 이다. 귀무가설 H_0하에서, $\underline{\beta}$와 σ^2에 대한 최우도 추정치는 각각 다음과 같다.

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}X'y,\quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\underline{y}-X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{y}-X\hat{\underline{\beta}}).$$

그러므로 H_0 하에서의 Schwarz 정보판별함수와 Akaike 정보판별함수와 수정된 Akaike 정보판

별함수는 아래와 같이 구해진다.

Schwarz 정보판별함수 :

$$\begin{aligned} SIC(n) &= -2\log L_0(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) + (p+2)\log n \\ &= n\log[(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})] + n(1+\log 2\pi) + (p+2-n)\log n \end{aligned}$$

Akaike 정보판별함수 :

$$\begin{aligned} AIC(n) &= -2\log L_0(\hat{\beta}, \hat{\sigma}) + 2(p+2) \\ &= n\log[(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})] + n(1+\log 2\pi) + 2(p+2) \end{aligned}$$

수정된 Akaike 정보판별함수 :

$$\begin{aligned} AIC_c(n) &= -2\log L_0(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) + n\left(\frac{(1+p)/n}{1-(p+2)/n}\right) \\ &= n\log[(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})] + n\left(\frac{(1+p)/n}{1-(p+2)/n} + \log 2\pi - \log n\right) \end{aligned}$$

여기서, $L_0(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$은 귀무가설 H_0 에서의 최우도 함수이다.

대립가설 H_1에서의 최우도 추정량을 구하기 위해서 다음의 절차를 고려하자.

$$y_1 = [\, y_1\ y_2 \ldots y_k]', \quad y_2 = [\, y_{k+1}\ y_{k+2} \ldots y_n]',$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & x_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1k} & \cdots & x_{pk} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \\ \vdots \\ \underline{x_k} \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_{1(k+1)} & \cdots & x_{p(k+1)} \\ 1 & x_{1(k+2)} & \cdots & x_{p(k+2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 = [\, \beta_0^1\ \beta_1^1 \ldots \beta_p^1]', \quad \beta_2 = [\, \beta_0^2\ \beta_1^2 \ldots \beta_p^2]', \quad \beta = [\, \beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_p]'.$$

대립가설 H_1을 벡터와 행렬의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$H_1:\ \mu_{ya} = X_1\beta_1\ ,\ \text{그리고}\ \ \mu_{yb} = X_2\beta_2\ ,\ \ k = 2, \cdots, n-2.$$

여기서 $\mu_{ya} = [\ \mu_{y1}\ \ \mu_{y2} \ldots\ \mu_{yk}]'$이고 $\mu_{yb} = [\ \mu_{y(k+1)}\ \ \mu_{y(k+2)} \ldots\ \mu_{yn}]'$ 이다.

모수 β_1, β_2 와 σ^2에 대한 최우도 추정량은 각각 다음과 같다.

$$\hat{\beta}_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'\ y_1, \quad \hat{\beta}_2 = (X_2'X_2)^{-1}X_2'\ y_2,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}[(\ y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'(\ y_1 - X_1\hat{\beta}_1) + (\ y_2 - X_2\hat{\beta}_2)'(\ y_2 - X_2\hat{\beta}_2)]$$

위의 추정량을 이용하여 대립가설 H_1에서의 Schwarz 정보판별함수와 Akaike 정보판별함수, 수정된 Akaike 정보판별함수는 다음과 같이 표현된다.

Schwarz 정보판별함수 :

$$\begin{aligned} SIC(k) &= -\log 2L_1(\hat{\beta}_1\,\hat{\beta}_2, \hat{\sigma}^2) + (p+3)\log n \\ &= n\log[(\ y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'(\ y_1 - X_1\hat{\beta}_1) + (\ y_2 - X_2\hat{\beta}_2)'(\ y_2 - X_2\hat{\beta}_2)] \\ &\quad + n(1+\log 2\pi - \log n) + (p+3)\log n \end{aligned}$$

Akaike 정보판별함수 :

$$\begin{aligned} AIC(k) &= -\log 2L_1(\widehat{\beta}_1 \widehat{\beta}_2,\ \widehat{\sigma}^2) + 2(p+3) \\ &= n\log[(y_1 - X_1\widehat{\beta}_1)'(y_1 - X_1\widehat{\beta}_1) + (y_2 - X_2\widehat{\beta}_2)'(y_2 - X_2\widehat{\beta}_2)] \\ &\quad + n(1 + \log 2\pi - \log n) + 2(p+3) \end{aligned}$$

수정된 Akaike 정보판별함수 :

$$\begin{aligned} AIC_c(k) &= -\log 2L_1(\widehat{\beta}_1 \widehat{\beta}_2,\ \widehat{\sigma}^2) + n\left(\frac{(p+3)/n}{1-(p+3)/n}\right) \\ &= n\log[(y_1 - X_1\widehat{\beta}_1)'(y_1 - X_1\widehat{\beta}_1) + (y_2 - X_2\widehat{\beta}_2)'(y_2 - X_2\widehat{\beta}_2)] \\ &\quad + n\left(\frac{(p+3)/n}{1-(p+3)/n} + \log 2\pi - \log n\right) \end{aligned}$$

이다. 여기서 $L_1(\widehat{\beta}_1 \widehat{\beta}_2,\ \widehat{\sigma}^2)$은 대립가설 H_1에서 최우도함수이다.

모형 선택론에서의 정보판별함수의 절차에 따라서 다음과 같은 가설검정의 기각역을 설정하자.
Schwarz 정보판별함수를 이용하는 경우:

$SIC(n) \le \min\{SIC(k) : 2 \le k \le n-2\}$이면 H_0 모형을 채택하고, 아닌 경우에는 전환점 $\hat{k} = k+1$을 가지는 H_1의 모형을 채택한다.

Akaike 정보판별함수를 이용하는 경우:

$AIC(n) \le \min\{AIC(k) : 2 \le k \le n-2\}$이면 H_0 모형을 채택하고, 아닌 경우에는 전환점 $\hat{k} = k+1$을 가지는 H_1의 모형을 채택한다.

수정된 Akaike 정보판별함수를 이용하는 경우;

$AIC_c(n) \le \min\{AIC_c(k) : 2 \le k \le n-2\}$ 이면 H_0 모형을 채택하고, 이와 반대로 이면 전환점 $\hat{k} = k+1$을 가지는 H_1의 모형을 채택한다.

4. 실제 사례의 적용

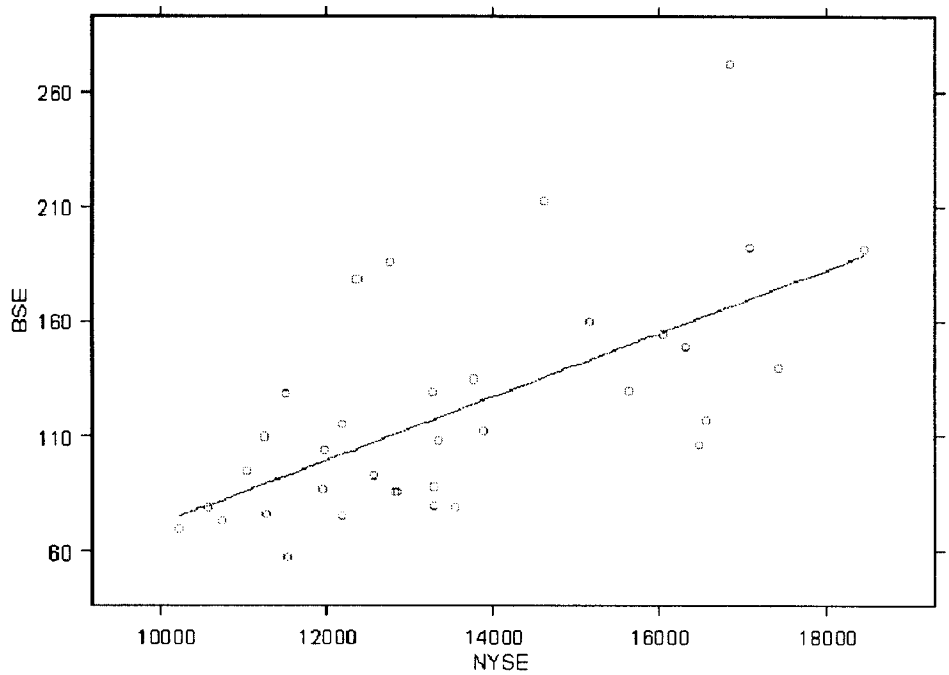
Holbert(1982)는 베이지안 관점으로부터 단순회귀모형과 중선형회귀모형에 대한 전환점을 연구했다. 그는 미지의 전환점과, 미지의 모수들에 대한 vague 사전 밀도함수를 할당하고 전환점에 대한 사후 밀도함수를 구하였다. 그리고, 전환점에 대한 사후 밀도함수의 계산에 의해 두 개의 다른 회귀함수에서 전환의 추정을 보이기 위해, 주식시장의 판매량에 대한 데이터 집합을 연구했다. 그는 최대 사후 밀도함수가 24번째 데이터에서 일어남을 발견했고, 이는 1968년 12월에 관계한 데이터였다. 그러므로 1968년 12월에 주식 수수료 할당제도의 폐지에 의해 전환점이 야기되었다는 결론을 내렸다.

본 연구에서는 선형 회귀모형에서의 전환점의 위치를 찾기 위해 Holbert와 같은 데이터를 가지고, 모형 선택에서의 정보판별함수 방법을 사용하였다. 보스톤 증권 회사(Boston Stock Exchange, BSE)의 매월 미화의 판매량을 반응변수로 두었고, 뉴욕 아메리칸 증권회사(New York American Stock Exchange, NYAMSE)의 매월 미화의 판매량을 설명변수로 두었다.

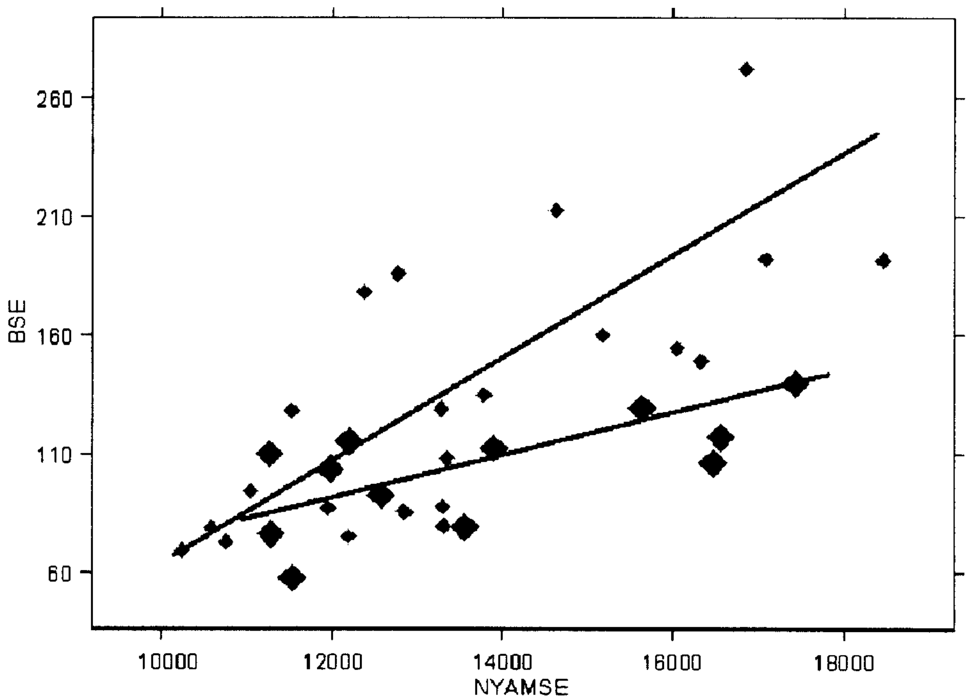
Holbert (1982)가 제시한 BSE와 NYAMSE의 본래의 값들과 정보판별함수에 의해 구해진 값들을 <표1>에 제시하였다. <표1>에서 정보판별함수들의 가장 작은 값들 즉, $\min SIC$, $\min AIC$, minAIC_c 의 값들을 별표★로 표시하였다. minSIC, minAIC, minAIC_c의 값은 23번째에서 나타났고, 이는 24번째 '1968년 12월'에서 회귀모형의 전환점이 시작된다는 것을 의미한다.

< 표1 > ***NYAMSE과 BSE에 대한 SIC, AIC, AICc의 값들***

point	Month/year		NYAMSE	BSE	*SIC*(*k*)	*AIC*(*k*)	*AICc*(*k*)
1	Jan.	1967	10581.6	78.8			
2	Feb.	1967	10234.3	69.1	269.2482	261.4715	266.4715
3	Mar.	1967	13299.5	87.6	268.556	260.7793	265.7793
4	Apr.	1967	10746.5	72.8	268.45	260.6732	265.6732
5	May.	1967	13310.7	79.4	267.1723	259.3955	264.3955
6	Jun.	1967	12835.5	85.6	266.469	258.6922	263.6922
7	Jul.	1967	12194.2	75.0	265.5538	257.777	262.777
8	Aug.	1967	12860.4	85.3	264.6153	256.8385	261.8385
9	Set.	1967	11955.6	86.9	264.2318	256.455♠	261.455
10	Oct.	1967	13351.5	107.8	264.2562	256.4794	261.4794
11	Nov.	1967	13285.9	128.7	265.335	257.5583	262.5583
12	Dec.	1967	13784.4	134.5	266.0905	258.3138	263.3138
13	Jan.	1968	16336.7	148.7	265.982	258.2053	263.2053
14	Feb.	1968	11040.5	94.2	266.2413	258.4645	263.4645
15	Mar.	1968	11525.3	128.1	267.327	259.5502	264.5502
16	Apr.	1968	16056.4	154.1	267.4751	259.6984	264.6984
17	May.	1968	18464.3	191.3	267.6568	259.8801	264.8801
18	Jun.	1968	17092.2	191.9	267.892	260.1153	265.1153
19	Jul.	1968	15178.8	159.6	268.0458	260.269	265.269
20	Aug.	1968	12774.8	185.5	269.084	261.3072	266.3072
21	Set.	1968	12377.8	178.0	268.9773	261.2005	266.2005
22	Oct.	1968	16856.3	271.8	264.1899	256.4132	261.4132
23	Nov.	1968	14635.3	212.3	258.859★	251.0823★	256.0823★
24	Dec.	1968	17436.9	139.4	261.7882	254.0114	259.0114
25	Jan.	1969	16482.2	106.0	265.5659	257.7892	262.7892
26	Feb.	1969	13905.4	112.1	265.831	258.0543	263.0543
27	Mar.	1969	11973.7	103.5	265.6829	257.9062	262.9062
28	Apr.	1969	12573.6	92.5	265.9755	258.1988	263.1988
29	May.	1969	16566.8	116.9	267.9815	260.2047	265.2047
30	Jun.	1969	13558.7	78.9	268.9211	261.1444	266.1444
31	Jul.	1969	11530.9	57.4	268.8978	261.1211	266.1211
32	Aug.	1969	11278.0	75.9	268.4428	260.6661	265.6661
33	Sep.	1969	11263.7	109.8	268.8093	261.0326	266.0326
34	Oct.	1969	15649.5	129.2	268.9033	261.1322	266.3234
35	Nov.	1969	12197.1	115.1			
					262.1699	257.5039	260.8372
					SIC(*n*)	*AIC*(*n*)	*AICc*(*n*)



<그림 1> NYAMSE과 BSE에 대한 귀무가설에서의 적합된 선형회귀모형



<그림 2> NYAMSE과 BSE에 대한 대립가설에서의 적합된 선형회귀모형

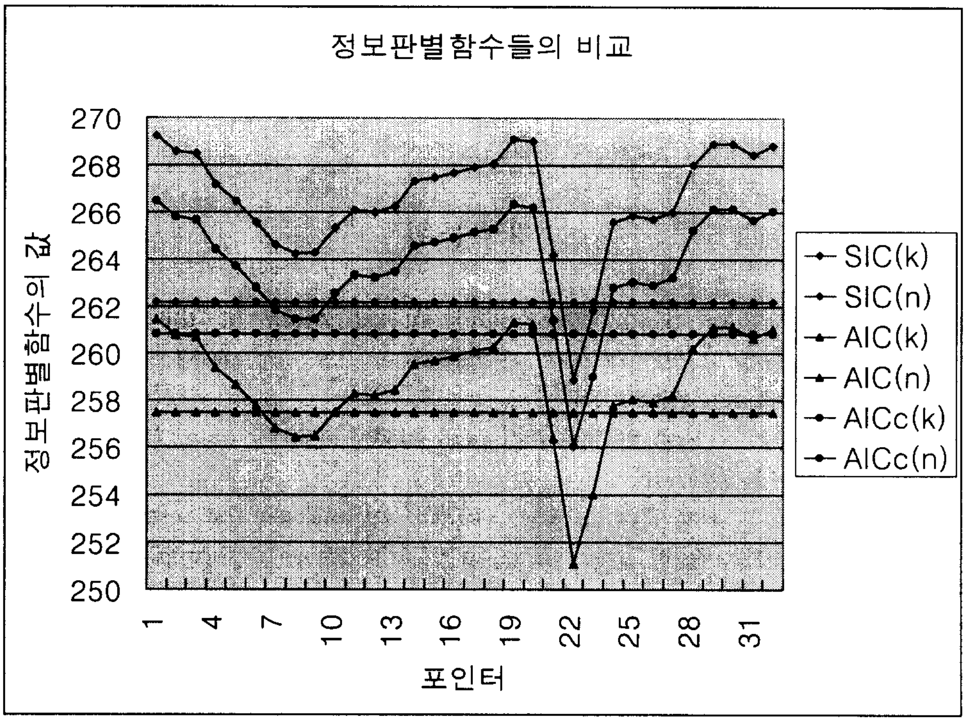
<그림1>은 BSE와 NYAMSE의 산점도와 전체 데이터에 대하여 추정된 회귀 직선을 보였다. <그림 1>에서 보듯이 하나의 적합된 회귀직선으로 데이터를 설명하기엔 잘못된 결론을 내릴 수 있다. 전환점에 대한 검정의 결과를 중심으로 두 개의 회귀 직선에 대한 추정을 <그림 2>에서 나타내었다. <그림 2>에서 1968년 12월 이후의 (BSE 와 NYAMSE)의 위치는 이전의 위치에 비해 굵은 다이아몬드 형태로 표시하였다. <그림 2>에서 보듯이 전환점인 1968년 12월 이전과 이후의 데이터들을 분리하여 회귀모형을 분리하는 것이 보다 바람직함을 알 수 있다. 또한 Schwarz 정보판별함수(SIC), Akaike 정보판별함수(AIC), 수정된 Akaike 정보판별함수(AIC_c)들의 결과가 동일하게 나타나는 것이 매우 흥미 있는 결과이다.

5. 다중전환점 검정을 위한 고찰과 결론

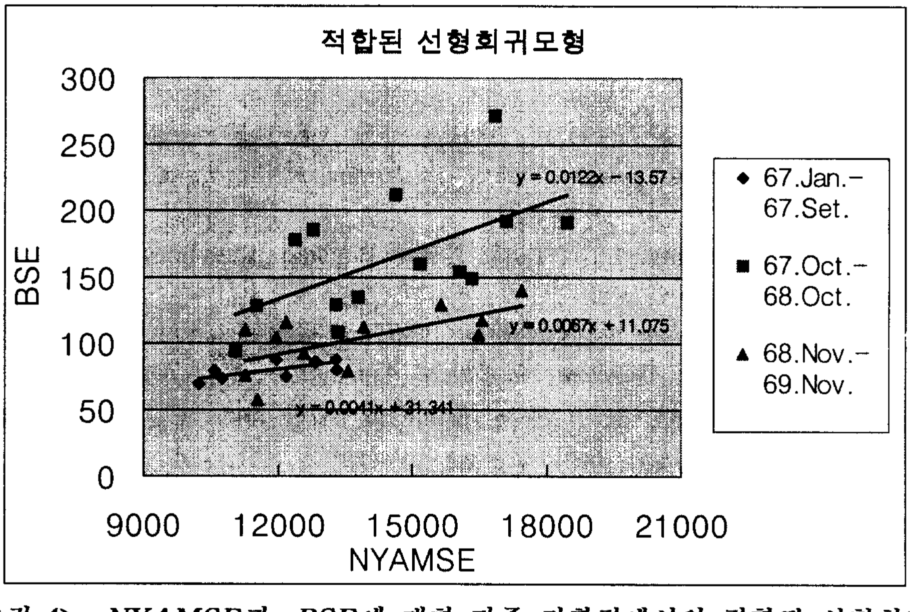
4절에서의 분석의 결과는 Chen (1998)의 SIC 기법을 적용한 가설을 AIC와 AIC_c의 기법에 의한 전환점의 검정으로 확장하였다. 본 연구의 심사위원이 지적한 것과 같이 <표 1>에서 나타난 결과는 각 정보판별함수는 로그우도함수와 동일한 미지의 개수의 합으로 표현된 것으로 전환점에 대한 결과가 동일하게 나타나는 것은 당연한 결과일 것이다.

그러나 다중 전환점을 찾기 위한 실험적 방법으로서 다음과 같은 가설을 생각하여 보자. 예를 들어 Akaike 정보판별함수를 이용하는 경우에 $\{AIC(k): 2 \le k \le n-2\}$의 값들 중 단조 감소하다가 단조 증가하는 경우의 $AIC(k)$의 값들이 얼마나 존재하는지를 조사하고 그 경우의 $AIC(\hat{k})$의 값이 $AIC(n)$보다 작다면 $\hat{k} = k+1$을 전환점으로 간주할 수 있을 것이다. 이러한 가설의 타당성을 조사하기 위해 4장에서 제시한 BSE와 NYAMSE의 값들에 대한 정보판별함수를 <그림 3>과 같이 제시하였다. <그림 3>에서 보는 것과 같이 SIC나 AIC_c는 $SIC(n)$나 $AIC_c(n)$ 보다 작은 값들로서 단조 감소하다가 단조 증가하는 경우의 $SIC(k)$나 $AIC_c(k)$가 $k=23$에서 하나만 나타남을 볼 수 있다. 그러나 AIC인 경우에 있어서는 $AIC(n)$ 보다 작은 값들로서 단조 감소하다가 단조 증가하는 경우의 $AIC(k)$의 값이 $\hat{k}=11$과 24의 두 곳에서 발생함을 알 수 있다. (<표 1>의 ♠값 참조). 즉 SIC나 AIC_c의 정보판별함수의 기준에서는 전환점으로 가정하기 어렵지만 AIC의 입장에서 본다면 판별정보함수의 판정절차에 따라서 충분히 전환점으로 간주할 수 있는 근거가 된다.

이러한 주장을 뒷받침하기 위해 BSE와 NYAMSE의 데이터는 <그림 2>에서 제시한 두 가지 모형 대신에 전환점 $\hat{k}=10$과 24을 가지는 3가지 선형회귀모형을 가진다는 것이 더 타당함을 <그림 4>와 <그림 2>를 비교함으로 알 수 있다. 1967년 1월부터 1967년 9월 사이의 데이터의 회귀모형과 1968년 10월부터 1968년 10월까지의 데이터의 회귀모형은 매우 유사함을 지니고 있다. 그러나 이 두 데이터의 모형은 분산의 값이 다른 차별성을 지니고 있고, 또한 이 두 데이터의 모형은 시간의 흐름에 따라1967년 10월에서 1968년 9월까지의 데이터의 모형과는 확실히 다른 선형회귀모형을 가짐을 알 수 있다. 그러므로 Akaike의 AIC를 적용한 전환점을 찾는 문제가 SIC나 AIC_c의 적용방법과는 차별성을 부여할 수 있다. 즉 SIC나 AIC_c의 방법으로는 찾지 못하는 전환점을 AIC를 적용하여 다중 전환점의 검정이 가능함을 알 수 있다.



< 그림 3 > *NYAMSE과 BSE에 대한 정보판별함수의 비교*



<그림 4> *NYAMSE과 BSE에 대한 다중 전환점에서의 적합된 선형회귀모형*

그러므로 Chen(1998)에 <그림 2>에서 주장한 두 개의 모형의 타당성 보다는 *AIC*의 검정 결과에 따르는 3개의 모형이 더 타당성이 있다. 다중전환점의 연구문헌으로 Vostrikova(1981)의 이항분할 절차의 응용과 Gupta와 Chen(1996), Chen과 Gupta(1997)의 방법이 있다. 이 절에서 주장한 것과 같이 *AIC* 방법은 다중전환점을 찾는 새로운 도구로서의 가능성이 있다. 이에 대한 보다 이론적인 연구는 앞으로 해야할 과제일 것이다.

참고문헌

[1] Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, *Second International Symposium on Information Theory.* Budapest, Hungary: Akademia Kiado, 267-281.

[2] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Automat. Control.* Vol. 19, 716-714.

[3] Brown, R.L. Durbin, J., and Evans, J.M. (1975). Techniques for testing the constancy of regression relationships over time (with discussion), *Journal of Royal Statistical Socirty* B, 149-192.

[4] Cavanaugh, J.E. and Neath, A.A. (1999). Generalizing the derivation of the Schwarz information criterion, *Communications in statistics - Theory and Method,* Vol. 28, 49-66.

[5] Chen, J. (1998). Testing for a change point in linear regression models, *Communications in statistics - Theory and Method,* Vol. 27, 2481-2493.

[6] Chen, J. and Gupta, A.K. (1995). Likelihood procedure for testing change points hypothesis for multivariate Gaussian model, *Random Operators and Stochastic Equations,* Vol. 3, 235-244.

[7] Chen, J. and Gupta, A.K. (1997). Testing and locating variance changepoints with application to stock price, *Journal of American Statistical Association,* Vol. 92, 739-747.

[8] Choy, J. H. and Broemeling, L.D. (1980). Some Baysian inferences for a changing linear model, *Technometrics*, Vol. 22, 71-78.

[9] Ferreira, P.E. (1975). Baysian analysis of a switching regression model: Known number of regimes, *Journal of American Statistical Association,* Vol. 70, 370-374.

[10] Fujikoshi, Y. and Satoh, K. (1997). Modified *AIC* and C_p in multivariate linear regression, *Biometrika* (1997), Vol. 84, 707-716

[11] Gupta, A.K. and Chen, J. (1996). Detecting changes of mean in multidensional normal sequences with applications to literature and geology, *Computational Statistics,* Vol. 11, 211-221.

[12] Hawkins, D.L. (1989). A U-I approach to retrospective testing for shifting parameters in a linear model, *Communications in Statistics,* 18, 3117-3134.

[13] Holbert, D. (1982). A Baysian analysis of a switching linear model, *Journal of*

Econometrics, Vol. 19, 77-87.

[14] Hughes, A.W. and King, M.L. (1999). An iterative Approach to variable selection based on the Kullback-Leibler information, *Communications in statistics - Theory and Method,* Vol. 28, 1043~1057.

[15] Hurvich, C.M. and Tsai, C.L. (1989). Regression and time series model selection in small samples, *Biometrika,* Vol. 76. 297-307.

[16] Kass, R.E. and Rafferty, A.E. (1995). Bayes factor, *Journal of American Statistical Association,* Vol. 90, 773-779.

[17] Kass, R.E. and Wasserman, L. (1995). A reference Bayesian test for nested hypotheses and its relationship to the Schwarz criterion, *Journal of American Statistical Association,* Vol. 90, 928-934.

[18] Quandt, R.E. (1958). The estimation of the parameters of a linear regression system obeys two separate regimes, *Journal of American Statistical Association,* Vol. 53, 873-880.

[19] Quandt, R.E. (1960). Tests of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes, *Journal of American Statistical Association,* Vol. 55, 324-330.

[20] Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model, *Annals of Statistics,* 6, 461-464.

[21] Sen, A.K. and Srivastava, M.S. (1975). On test for detecting change in mean, *The Annals of Statistics,* Vol. 3, 461-464.

[22] Srivastava, M.S. and Worsley, K.J. (1986). Likelihood ratio tests for a change in the multivariate nomal mean, *Journal of American Statistical Association*, 81, 199-204.

[23] Sugiura, N. (1978). Further analysis of the data by Akaike's information criterion and the finite corrections, *Communications in statistics - Theory and Method,* A7, 13-26.

[24] Vorsley, K.J. (1979). On the likelihood ratio test for a shift in location of normal populations, *Journal of American Statistical Association,* Vol. 74, 365-367.