

# 다단계 수리체계의 성능평가를 위한 폐쇄형 대기행렬 네트워크 모형\*

박찬우\*\* · 김창곤\*\* · 이효성\*\*

## A Closed Queueing Network Model for the Performance Evaluation of the Multi-Echelon Repair System\*

Chan-Woo Park\*\* · Changkon Kim\*\* · Hyo-Seong Lee\*\*

### ■ Abstract ■

In this study we consider a spares provisioning problem for repairable items in which a parts inventory system is incorporated. If a machine fails, a replacement part must be obtained at the parts inventory system before the failed machine enters the repair center. The inventory policy adopted at the parts inventory system is the (S, Q) policy. Operating times of the machine before failure, ordering lead times and repair times are assumed to follow a two-stage Coxian distribution. For this system, we develop an approximation method to obtain the performance measures such as steady state probabilities of the number of machines at each station and the probability that a part will wait at the parts inventory system. For the analysis of the proposed system, we model the system as a closed queueing network and analyze it using a product-form approximation method. A recursive technique as well as an iterative procedure is used to analyze the sub-network. Numerical tests show that the approximation method provides fairly good estimation of the performance measures of interest.

## 1. 서 론

비행기, 생산설비 등 수리 가능한 고가 장비의

경우에는 주요부품의 고장이 발생할 경우에 수리하여 재 사용하는 것이 경제적이므로 이를 위한 수리시설을 설치하여 운영하고 있다. 특히 비행기 등

\* 이 논문은 1999년도 한국 학술진흥재단의 연구비에 의하여 연구되었음(KRF-99-E00119)

\*\* 경희대학교 기계·산업 시스템 공학부

과 같이 높은 수준의 가용도(availability)를 요구하는 장비의 경우에는 목표수준의 가용도를 유지하기 위하여 고장난 장비를 대체할 예비장비를 일정 수준 보유할 필요가 있다. 일반적으로 예비장비와 수리시설에 대한 투자는 막대한 것으로 알려져 있어 일정한 수준의 가용도를 유지하기 위한 예비장비의 보유대수 결정과 수리시설의 용량결정은 매우 중요한 문제로 대두되고 있다.

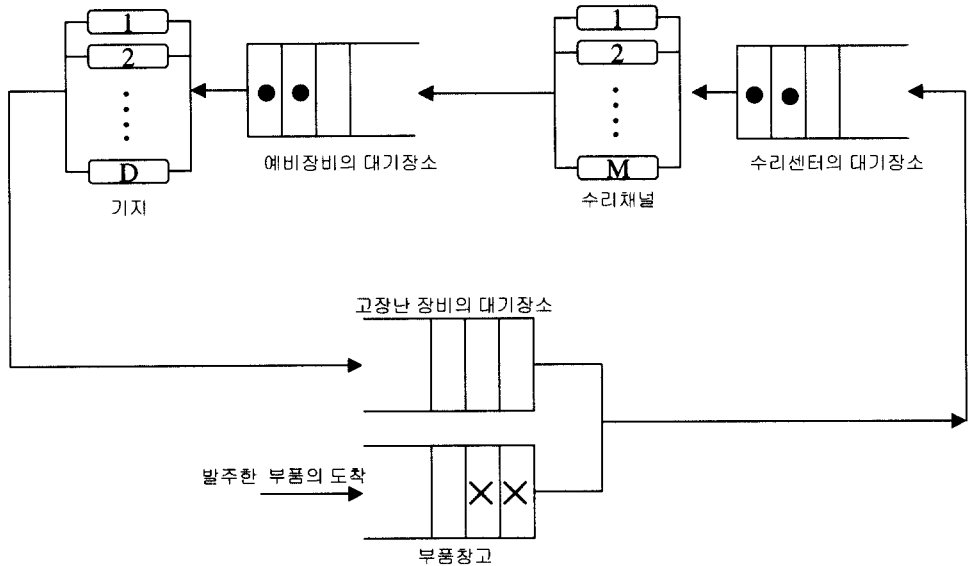
수리 가능한 장비의 다단계 수리모형은 60년대 중반의 Sherbrooke의 METRIC 모형[11]을 필두로 Muckstadt[10], Graves[5], Gross, Miller와 Soland[6], Madu[8], Albright와 Gupta[2] 등에 의해 많은 연구가 이루어졌다. 대부분의 기존연구는 Markov 모형을 이용하여 성능평가를 수행하였으며 수리소의 용량이 무한하다는 가정 하에 분석이 이루어졌다. 수리용량이 유한한 경우에 대해서는 Gross, Miller와 Soland[6] 및 Madu[8] 등이 폐쇄형 대기행렬 네트워크를 이용한 수리적모형을 제안하였다. 이들은 기지가 하나이며 이 단계 수리소가 존재하는 경우에 요구되는 가용도를 만족시키면서 총 투자액을 최소화하는 예비부품의 수와 수리소의 용량을 결정하는 발견적 기법(heuristic method)을 제시하였다. 이상의 연구에서는 장비가 고장났을 때 고장난 장비는 별도의 부품을 필요로 하지 않고 바로 수리소에 보내져 수리를 받을 수 있다는 가정 하에서 연구가 수행되었다. 그러나 경우에 따라서는 고장난 장비의 수리에는 반드시 부품이 필요할 수 있다. 최근 Abboud와 Daigle[1]은 이와 같이 고장난 장비의 수리를 위해 부품이 먼저 확보되어야 할 경우의 분석을 시도하였다. 즉, 장비의 고장이 발생하였을 때 고장난 장비는 부품창고에서 부품을 조달 받은 후 수리소로 이동하여 수리를 받는 경우의 모형을 분석하였다. 이 연구에서는 재고를 보유하지 않고 필요할 때마다 부품을 한 개씩 주문할 경우의 스테이션 별 안정상태확률을 신속하게 구하기 위한 근사적기법을 Little의 정리를 이용하여 개발하였다. Abboud와 Daigle은 고장난 장비는

부품이 확보되어야만 수리를 받을 수 있다고 가정함으로써 기존의 연구를 확장하였으나, 부품창고에서의 재고정책이 비현실적이라는 점과 장비의 고장이 발생할 때까지의 소요 시간과 수리소에서의 수리시간이 모두 지수분포를 따른다는 지나치게 단순화된 가정이 문제점으로 지적될 수 있다. 본 연구에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위하여 Abboud와 Daigle의 가정을 완화하여 보다 현실적인 부품 재고정책의 사용을 가정하고, 장비의 고장이 발생할 때까지의 소요 시간과 수리소에서의 수리시간이 Coxian 분포를 따를 경우의 분석을 시도하고자 한다.

## 2. 연구내용, 범위 및 방법

### 2.1 연구내용 및 범위

본 연구에서 분석하고자 하는 수리 시스템은 다음과 같다([그림 1] 참조). 기지(base)에서 보유하고 있는 장비의 수는  $N$ 이고 이중 가동을 요하는 장비의 수는  $D$ 이며, 장비의 고장에 대비하여 보유하고 있는 예비장비의 수는  $N-D$ 이다. 장비의 고장이 발생하면 즉시 예비장비로 교체되고, 고장난 장비는 수리에 필요한 부품을 부품창고에서 조달 받은 후 수리소로 가 수리를 받는다. 만일 장비의 고장이 발생했을 때 부품창고에 재고가 존재하면 고장난 장비는 즉시 수리소로 이동되나 재고가 존재하지 않으면 부품이 조달될 때까지 부품창고에서 대기하여야만 한다. 수리소의 용량은 제한되어 있어  $M$ 대의 장비만이 동시에 수리를 받을 수 있으며, 수리가 끝난 장비는 즉시 기지로 복귀한다고 가정한다. 장비의 고장이 발생할 때까지의 소요 시간과 수리소에서의 수리시간은 모두 2단계 Coxian 분포를 따른다고 가정한다. 부품창고에서는 부품의 누적 수요가  $Q$ 개에 이를 때마다 부품  $Q$ 개를 일시에 발주하는 재고정책을 사용하며, 부품창고에서의 부품의 최대재고 수준은  $S$ 로 놓는다. 따라서 보유 중인 부품과 발주 중에 있는 부품의 합은 항상  $S$



[그림 1] 다 단계 수리시스템 모형

가 된다. 본 연구에서는 이를  $(S, Q)$ 정책이라 부르  
고자 하며, 부품을 발주한 후 발주한 부품이 도착  
할 때까지의 시간(부품 조달기간)은 2단계 Coxian  
분포를 따른다고 가정한다.

본 연구에서 분석하고자 하는 수리시스템에서는  
시스템내의 장비 수(가동 중인 장비 + 예비 장비 +  
고장 중인 장비)가 항상  $N$ 으로 고정되어 있으므로  
장비를 고객으로 간주하면 폐쇄형 대기네트워크로  
모델링할 수 있다. 기지를 스테이션 1, 부품 창고를  
스테이션 2, 수리소를 스테이션 3라 하면, 폐쇄형  
대기네트워크는 3개의 스테이션으로 구성된다. 부  
품 창고(스테이션 2)에서 장비의 이동이 이루어지  
기 위해서는 부품과 고장난 장비가 모두 존재하여  
야 하므로 스테이션 2는 synchronization 스테이션  
임을 알 수 있다. 또한 부품 창고에는 한 번에  $Q$ 개  
씩 발주한 부품이 도착하므로 일종의 집단 서비스  
가 이루어진다고 볼 수 있다. 스테이션 2가 집단  
서비스가 이루어지는 synchronization 스테이션이  
므로 대기네트워크는 승법형 조건을 만족하지 못  
한다. 따라서 시스템의 분석은 쉽지 않으며 근사적  
기법에 의존할 수밖에 없다.

## 2.2 연구방법

본 연구에서는 시스템 분석방법으로 Baynat와  
Dallery[3]의 승법형 근사법(product-form approx-  
imation method)을 사용하고자 한다. Baynat와  
Dallery의 승법형 근사법은 서비스 시간이 일반분  
포를 따르는 폐쇄형 대기네트워크를 분석하기 위  
한 기법으로 Marie의 기법[9]에 기초하고 있다. 승  
법형 근사법은 대기네트워크를 몇 개의 하부네트  
워크로 분해한 후, 각각의 하부네트워크를 서비스  
시간이 지수분포를 따르고 서비스율이 상태 의존  
적인 단일 서버로 치환함으로써 분석하고자 하  
는 폐쇄형 대기네트워크를 승법형 대기네트워크로  
근사화 시키는 기법이다. 승법형 근사법에서는 근  
사화 된 승법형 대기네트워크를 동등 승법형 대기  
네트워크(equivalent product form network)라 부  
르며, 동등 승법형 대기네트워크를 구성하는 단일  
서버의 상태종속 서비스율을 구하기 위하여 각  
각의 하부 네트워크를 상태종속 Poisson 도착과정  
을 갖는 개방형 대기시스템으로 가정해 분석한다.  
개방형 대기시스템의 상태종속 산출율(state de-

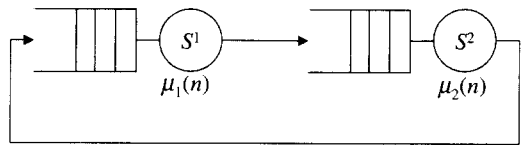
pendent throughput)이 구해지면 이 값이 곧 해당 단일 서버의 상태종속 서비스율로 사용된다. 또한 승법형 대기네트워크의 서비스율이 구해지면 승법형 네트워크를 구성하는 각 서버의 상태종속 산출율(state dependent throughput)을 구할 수 있으며, 이 값은 다시 해당 하부네트워크의 상태종속 도착율로 사용된다. 따라서 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율이 구해지면 이로부터 하부 네트워크의 상태종속 도착율을 구할 수 있고, 하부 네트워크의 상태종속 도착율이 구해지면 이로부터 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율을 구할 수 있게 된다. 그러나 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율과 하부 네트워크의 상태종속 도착율은 모두 미지의 값이므로 이를 구하는 문제는 고정점 문제(fixed point problem)가 되며, 이를 구하기 위해서는 반복적 기법을 사용하여야만 한다. 그러나, 본 연구에서 제안된 수리 시스템의 경우에는 몇 가지 가정이 완화되어 있어 승법형 근사법을 단순히 적용시킬 수 없다. 즉 하위 네트워크으로의 분해문제, 분해된 하위 네트워크의 해를 구하는 문제 등 여러 가지 해결해야만 할 세부 문제가 존재하며, 이를 해결할 수 있는 방법을 찾아야 한다.

### 3. 다단계 수리체계의 분석

#### 3.1 하부 네트워크로의 분해

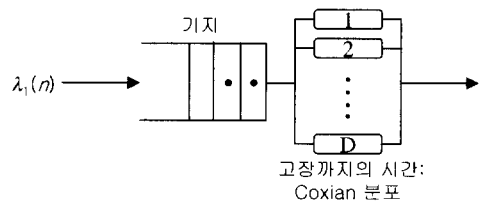
Baynat와 Dallery[3]에 따르면 승법형 근사법이 성공적으로 적용되기 위해서는 몇 가지 조건이 충족되어야만 하며, 그 중 하나는 하부 네트워크간의 고객이동이 집단으로 이루어져서는 안 된다는 조건이다. 본 연구에서는 발주한 부품이 부품 창고에 동시에  $Q$ 개씩 도착하므로 수리소에 한 순간에 도착할 수 있는 집단의 크기는 최소 1부터 최대  $Q$ 까지 확률적으로 분포되어 있다. 따라서 승법형 근사법을 성공적으로 적용시키기 위해서는 스테이션 2와 스테이션 3을 하나의 하부 네트워크에 포함

시켜야 한다. 따라서 스테이션 1을 하부 네트워크  $R^1$ 으로, 스테이션 2와 스테이션 3을 하부 네트워크  $R^2$ 로 표기하면 원 대기네트워크는 2개의 하부 네트워크로 분해된다. 하부 네트워크  $R^i$ 에 대응하는 동등 승법형 네트워크의 서버를  $S^i$ 라고 하고, 서버  $S^i$ 의 상태종속 서비스율을  $\mu_i(n)$ 이라 할 때 동등 승법형 네트워크는 [그림 2]와 같다. 동등 승법형 대기네트워크의 서비스율  $\mu_i(n)$ 이 구해지면 승법형 대기네트워크의 분석에 사용될 수 있는 임의의 알고리즘을 이용하여 동등 승법형 대기네트워크를 분석할 수 있고, 이로부터 수리 시스템의 다양한 성능척도를 계산할 수 있으므로 문제는  $S^i$ 의 상태종속 서비스율  $\mu_i(n)$ 을 구하는 것으로 귀착된다.

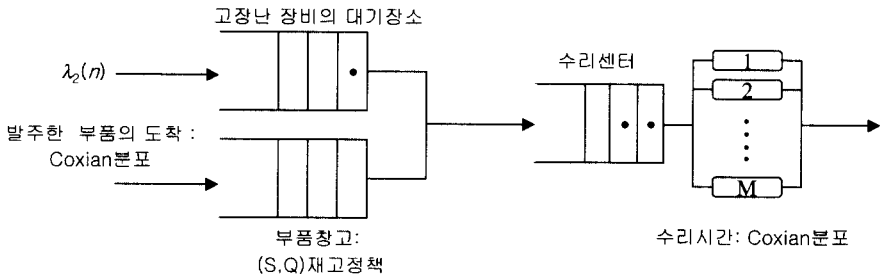


[그림 2] 동등 승법형 대기네트워크

서버  $S^i$ 의 상태종속 서비스율  $\mu_i(n)$ 은 하부 네트워크  $R^i$ 를 분석함으로써 얻어진다. 하부 네트워크  $R^i$ 는 상태종속 도착율이  $\lambda_i(n)$ 이고 도착간격이 지수분포를 따르는 개방형 대기네트워크로 간주해 분석한다. 우선 하부 네트워크  $R^i$ 의 도착율  $\lambda_i(n)$ 을 알고 있다고 가정하자. 그러면 하부 네트워크  $R^1$ 과  $R^2$ 는 [그림 3]과 [그림 4]와 같은 개방형 대기시스템으로 표현될 수 있다.



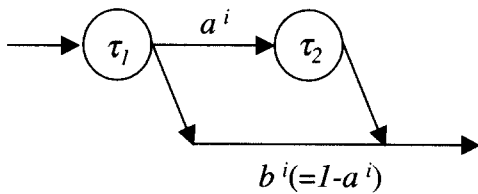
[그림 3] 하부 네트워크  $R^1$



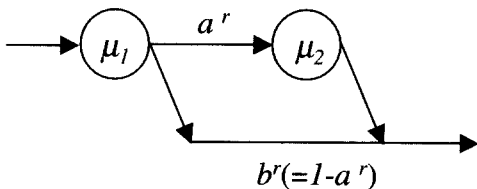
[그림 4] 하부 네트워크  $R^2$

### 3.2 하부 네트워크 $R^2$ 분석

본 절에서는 하부 네트워크  $R^2$ 의 분석방법을 살펴보고자 한다. 본 연구에서는 부품창고에서의 부품 조달기간과 수리소에서 각 수리공의 수리시간은 [그림 5]와 같은 2단계 Coxian분포를 따른다고 가정한다.



(a) 부품 조달 기간의 2단계 Coxian 분포



(b) 수리시간의 2단계 Coxian 분포

[그림 5] 부품 조달기간과 수리시간의 2단계 Coxian 분포

부품 조달기간과 수리시간이 모두 2단계 Coxian 분포를 따르므로, 하부 네트워크  $R^2$ 는 상태의 수가 유한한 연속시간 마코브 체인(continuous time Markov Chain)으로 모델링이 가능하다. 시스템의

상태를 정의하기 위하여  $i$ 를 부품창고의 재고수준 (만약  $i < 0$ 이면,  $|i|$  대의 고장난 장비가 부품을 기다리고 있음을 의미한다.),  $j$ 를 Coxian분포의 1 단계에 있는 인도 중인 주문 수,  $k$ 를 수리소에 존재하는 장비 수, 그리고  $l$ 를 Coxian분포의 1단계 수리 중에 있는 장비의 수를 나타낸다고 하면, 시스템의 상태는  $(i, j, k, l)$ 로 표현된다. 그러나 상태공간이 4차원이므로 상태의 수가 지나치게 많아, 극히 작은 규모의 문제를 제외하면 해를 구하기가 실질적으로 불가능하다. 따라서 본 연구에서는 상태공간의 크기를 줄이기 위하여 4차원 상태공간을 갖는 마코브체인을 3차원 상태공간을 갖는 마코브체인으로 근사화 하였다. 이를 위하여 수리소에  $k$ 대의 장비가 존재할 때의 상태종속 서비스율을  $\mu^r(k)$ 로 나타내자. 만약  $\mu^r(k)$ 를 알고 있다면, 수리소를 서비스율이 상태의존적인 지수분포 서비스 시간을 갖는 시스템으로 근사화할 수 있다. 즉,  $i, j, k$ 가 4차원 상태공간에서와 같은 의미를 갖는다고 할 때 하부 네트워크  $R^2$ 의 상태공간,  $S^{ir}$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S^{ir} = \{(i, j, k) \mid -N \leq i \leq S, \beta_i \leq j \leq \alpha_i, 0 \leq k \leq N + \gamma_i\} \quad (1)$$

식 (1)에서  $\alpha_i$ 는 재고 시스템에  $i$ 개의 부품이 존재하는 경우 발주 중에 있는 총 주문 수이며,  $x$ 를 초과하지 않는 최대 정수를  $\lfloor x \rfloor$ 라 나타내면  $\alpha_i = \lfloor (S - i) / Q \rfloor$ 로 표현된다. 또한  $\beta_i$ 와  $\gamma_i$ 는 다음

과 같이 표현된다.

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & , a^i > 0 \\ \alpha_i & , a^i = 0 \text{ (지수 분포일 경우)}, \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0 & , i \geq 0 \\ i & , i < 0. \end{cases}$$

이와 같이 4차원 마코브 체인을 3차원 마코브 체인으로 근사화하면 상태공간의 크기가 크게 줄어들어 마코브 체인의 분석이 가능해진다. 예를 들면  $S=5, Q=2, N=20, M=15, a^i > 0, a^r > 0$ 인 경우, 4차원 상태공간과 3차원 상태공간의 총 상태의 수는 각각 11,968개와 1,707개로 상태의 수가 크게 감소하는 것을 알 수 있다.

3차원 마코브 체인으로 근사화된 하부 네트워크  $R^2$ 의 안정상태확률을  $P^{ir}(i, j, k)$ 이라 정의하자  $\mu^r(k)$ 가 주어졌을 때  $P^{ir}(i, j, k)$ 을 구하는 과정은 복잡하므로 이에 대한 세부 설명은 3.2.1 절로 미루고, 본 절에서는  $\mu^r(k)$ 의 값이 주어지면  $P^{ir}(i, j, k)$ 을 계산할 수 있다고 가정한다.

그러나  $P^{ir}(i, j, k)$ 을 계산하기 위해서는  $\mu^r(k)$ 의 값이 결정되어야만 하며, 본 연구에서는  $\mu^r(k)$ 을 구하기 위해 다음과 같은 방법을 고안하였다.

$\lambda^r_q(k)$ 를 수리소에  $k$ 대의 장비가 존재할 때  $q$ 개의 고장난 장비가 동시에 수리소에 도착하는 도착율(크기가  $q$ 인 집단의 도착율)이라고 하자.  $\lambda^r_q(k)$ 는 안정상태확률  $P^{ir}(i, j, k)$ 가 주어지면 이를 이용하여 구할 수 있다.  $\lambda^r_q(k)$ 가 구해지면 수리소를 부품창고와 분리하여 상태종속 Poisson 도착과정을 갖고 서비스시간이 Coxian분포를 따르는 별개의 개방형 대기 시스템으로 분석할 수 있다. 따라서  $\lambda^r_q(k)$ 가 주어지면 수리소의 안정상태확률을 구할 수 있고, 수리소의 안정상태확률로부터  $\mu^r(k)$ 를 구할 수 있다.  $\lambda^r_q(k)$ 가 주어졌을 때 수리소의 안정상태확률을 구하는 과정도 복잡하므로 이에 대한 세부 설명은 3.2.3절로 미루고, 여기에서는  $\lambda^r_q(k)$ 의 값이 주어지면 수리소의 안정상태확률을 계산할 수 있다고 가정한다. 요약하면  $\mu^r(k)$

의 값을 알면,  $\lambda^r_q(k)$ 를 계산할 수 있고, 역으로  $\lambda^r_q(k)$ 의 값을 알면,  $\mu^r(k)$ 를 계산할 수 있다. 그러나  $\mu^r(k)$ 와  $\lambda^r_q(k)$ 가 모두 미지수이므로 이를 구하는 문제는 고정점 문제가 되며, 이를 구하기 위해서는 반복적 기법을 사용하여야 한다.  $P^{ir}(i, j, k)$ 로부터  $\lambda^r_q(k)$ 를 구하는 과정과 수리소의 안정상태확률로부터  $\mu^r(k)$ 를 구하는 과정은 각각 3.2.2절과 3.2.4절에서 상세히 설명된다.

### 3.2.1 $R^2$ 의 안정상태 확률

하부 네트워크  $R^2$ 의 상태종속 도착율  $\lambda_1(n)$ 과 수리소의 상태종속 서비스율  $\mu^r(k)$ 을 알고 있다고 가정하면, 하부 네트워크  $R^2$ 는 앞에서 설명한 바와 같이 3차원 마코브 체인으로 모델링될 수 있다.  $S=2, Q=2, N=2$ 인 경우의  $R^2$ 의 상태전이율 다이어그램(state transition rate diagram)은 [그림 6]와 같다.

하부 네트워크  $R^2$ 의 상태전이율 다이어그램으로부터 얻어지는 상태  $(i, j, k) (\in S^{ir})$ 에 대한 시스템 평형방정식(balance equation)은 다음과 같다.

$$O^{ir}(i, j, k)P^{ir}(i, j, k) = \sum_{e=1}^5 I^{ir}_e(i, j, k) \quad (2)$$

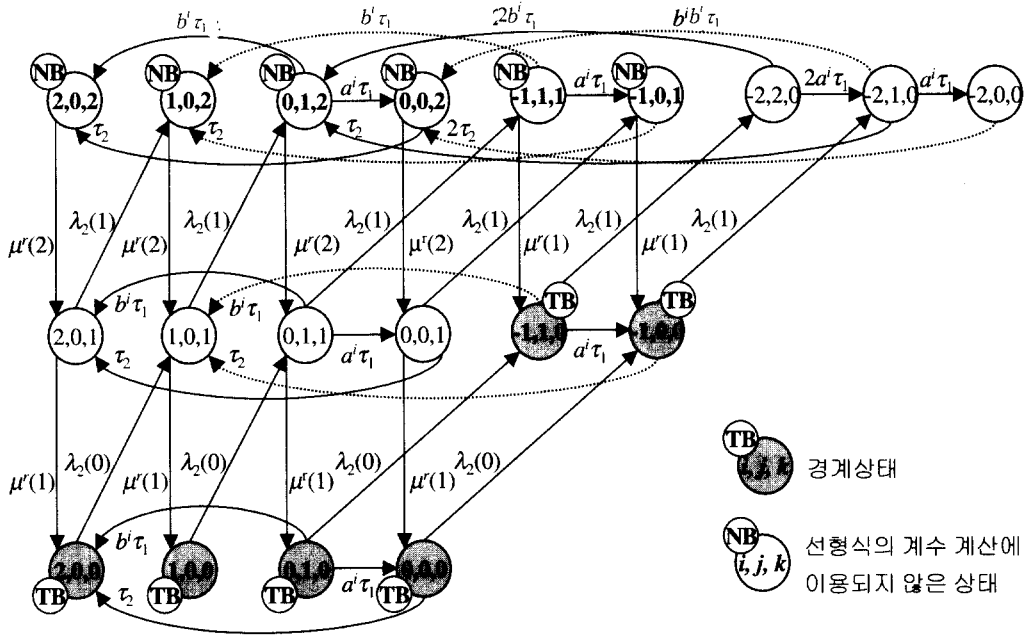
식 (2) 좌변의  $O^{ir}(i, j, k)$ 은 상태  $(i, j, k)$ 로부터의 이탈율로서 다음과 같이 표현된다.

$$O^{ir}(i, j, k) = \lambda_2(|\gamma_i| + k) + \mu^r(k) + j\tau_1 + (\alpha_i - j)\tau_2 \quad (3)$$

식 (2) 우변의  $I^{ir}_e(i, j, k)$ 는 상태  $(i, j, k)$ 로의 평균 입력율로서 다음과 같이 5가지 경우로 분류된다.

i)  $I^{ir}_1(i, j, k)$ : 수리완료에 의한 상태  $(i, j, k)$ 로의 평균 입력율,

$$I^{ir}_1(i, j, k) = \begin{cases} \mu^r(k+1)P^{ir}(i, j, k+1), & k \leq N-1 + \gamma_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$



[그림 6] 하부 네트워크  $R^2$ 의 상태전이율 다이어그램( $S=2, Q=2, N=2, a^i > 0$ 인 경우)

ii)  $I^{ir}_2(i, j, k)$  : 고장 장비의 도착에 의한 상태  $(i, j, k)$ 로의 평균 입력율,

부품 조달 완료에 의한 상태  $(i, j, k)$ 로의 평균 입력율,

$$I^{ir}_2(i, j, k) = \begin{cases} \lambda_2(k-1)P^{ir}(i+1, j-1, k-1), & i=S-a_iQ, 0 \leq i \leq S-1, j \geq 1, k \geq 1, \\ \lambda_2(k-1)P^{ir}(i+1, j, k-1), & i \neq S-a_iQ, 0 \leq i \leq S-1, k \geq 1, \\ \lambda_2(|i+1|+k)P^{ir}(i+1, j-1, k), & i=S-a_iQ, -N \leq i \leq -1, j \geq 1, \\ \lambda_2(|i+1|+k)P^{ir}(i+1, j, k), & i \neq S-a_iQ, -N \leq i \leq -1, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \quad (5)$$

$$I^{ir}_4(i, j, k) = \begin{cases} b^i(j+1)\tau_1 P^{ir}(i-Q, j+1, k), & i \geq Q, \\ b^i(j+1)\tau_1 P^{ir}(i-Q, j+1, k-Q+i), & 1 \leq i \leq Q-1, k \geq Q-i, \\ b^i(j+1)\tau_1 P^{ir}(i-Q, j+1, k-Q), & Q-N \leq i \leq 0, k \geq Q, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \quad (7)$$

iii)  $I^{ir}_3(i, j, k)$  : Coxian 분포의 2단계 진입에 의한 상태  $(i, j, k)$ 로의 평균 입력율,

v)  $I^{ir}_5(i, j, k)$  : Coxian 분포의 2단계 부품 조달기간 완료에 의한 상태  $(i, j, k)$ 로의 평균 입력율,

$$I^{ir}_3(i, j, k) = \begin{cases} a^i(j+1)\tau_1 P^{ir}(i, j+1, k), & j < a_i-1, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \quad (6)$$

$$I^{ir}_5(i, j, k) = \begin{cases} (a_{i-Q}-j)\tau_2 P^{ir}(i-Q, j, k), & i \geq Q, \\ (a_{i-Q}-j)\tau_2 P^{ir}(i-Q, j, k-Q+i), & 1 \leq i \leq Q-1, k \geq Q-i, \\ (a_{i-Q}-j)\tau_2 P^{ir}(i-Q, j, k-Q), & Q-N \leq i \leq 0, k \geq Q, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \quad (8)$$

iv)  $I^{ir}_4(i, j, k)$  : Coxian 분포의 1단계 경과 후,

본 모형의 안정상태확률은 시스템 평형방정식을 풀면 구할 수 있다. 그러나 재고수준과 장비의 수가 증가하면  $S^{ir}$ 의 상태 수 또한 증가하여, 시스템 평형방정식을 푸는데 소요되는 노력도 증가한다. 따라서 마코프 체인의 특수한 구조를 이용하여 안정상태확률을 얻기 위한 효율적인 방법을 필요로 한다. 본 연구에서는 순환적 기법(recursive technique)을 이용하여 하부 네트워크  $R^2$ 의 안정상태확률을 얻고자 한다. 순환적 기법은 모든 상태의 안정상태확률이 일부 경계상태(boundary states)의 안정상태확률의 선형식(linear combination)으로 표시될 수 있을 때 적용 가능한 기법으로, Herzog 외[7]의 연구를 시작으로 Buzacott와 Kostalski[4] 등 연구에서 사용되어 왔다. 순환적 기법은 경계상태의 안정상태확률만 구하면 모든 상태의 안정상태확률을 구할 수 있기 때문에 연립방정식을 구성하는 식의 수는 경계상태의 수로 축소된다. 따라서 경계상태의 수가 작을 수록 순환적 기법의 효율성은 증가한다.

보다 구체적으로 본 모형의 경계상태의 집합  $TB^{ir}$ 을 다음과 같이 정의하면, 총 경계상태의 수는  $|TB^{ir}| = \sum_{n=-N+1}^S (a_n - \beta_n + 1)$ 개가 되며,  $S=5, Q=3, N=10, a^i > 0$ 인 경우에는 연립방정식을 구성하는 식의 수가 303개에서 45개로 크게 줄어든다.

$$TB^{ir} = \{(n, m, 0) \mid -N+1 \leq n \leq S, \beta_n \leq m \leq a_n\}$$

상태  $(i, j, k)$ 의 안정상태확률은 다음과 같이 경계상태의 일차결합으로 표현된다( $(i, j, k) \in S^{ir}$ ).

$$P^{ir}(i, j, k) = \sum_{n=-N+1}^S \sum_{m=\beta_n}^{a_n} C^{ir}(n, m) (i, j, k)P^{ir}(n, m, 0) \quad (9)$$

여기서,  $C^{ir}(n, m)(i, j, k)$ 은 경계상  $(n, m, 0)$ 의 상태  $(i, j, k)$ 에 대한 선형식의 계수이다.

경계상태  $(n, m, 0)$ 에 대해 다음의 반복계획을 실행하여 선형식의 계수의 값을 구한 ( $\forall (n, m, 0) \in TB^{ir}$ ).

### 하부 네트워크 $R^2$ 의 분석 방법

1 단계:  $P^{ir}(n, m, 0)$ 의 확률을 1로 하고 다른 경계상태의 확률을 0으로 놓는다. 그러면 식 (9)에 의해서 다음의 관계가 성립한다.

$$C^{ir}(n, m)(i, j, k) = P^{ir}(i, j, k), \quad \forall (i, j, k) \in S^{ir} \quad (10)$$

2 단계:  $i=-N, k=0$ 에 대해  $j$ 를  $a_{-N}$ 부터  $\beta_{-N}$ 까지 1씩 감소시켜 상태  $(-N, j, 0)$ 의 평형방정식을 변형한 식 (11)을 적용하고, 식 (10)을 이용하면 선형식의 계수  $C^{ir}(n, m)(-N, j, 0)$ 을 얻을 수 있다.

$$P^{ir}(-N, j, 0) = \frac{\sum_{e=1}^5 I^{ir}_e(-N, j, 0)}{O^{ir}(-N, j, 0)} \quad (11)$$

3 단계:  $0 \leq k \leq N-1, k-N+1 \leq i \leq S, \beta_i \leq j \leq a_i$ 의 상태  $(i, j, k)$ 의 평형방정식을 변형한 식 (12)을 순차적으로 적용하고, 식 (10)을 이용하면 선형식의 계수  $C^{ir}(n, m)(i, j, k+1)$ 을 구할 수 있다.

$$P^{ir}(i, j, k+1) = \frac{1}{\mu^r(k+1)} \left\{ O^{ir}(i, j, k) P^{ir}(i, j, k) - \sum_{e=2}^5 I^{ir}_e(i, j, k) \right\} \quad (12) \blacksquare$$

선형식의 계수 계산에 이용되지 않은 상태의 집합,  $NB^{ir}$ 을 다음과 같이 정의하자( $K=|NB^{ir}|$ ).

$$NB^{ir} = \{(i, j, k) \mid -N+1 \leq i \leq S, \beta_i \leq j \leq a_i, k = N + \gamma_i\}$$

집합  $NB^{ir}$ 의  $x$ 번째 원소  $(i, j, k)$ 를  $\bar{x}$ 라하고,



집합  $TB^{ir}$ 의  $y$ 번째 원소  $(n, m, 0)$ 를  $\bar{y}$ 라 하자. 그리고  $CI^{ir}_{e, (n, m)}(i, j, k)$ 을 식 (4)~식 (8)에서  $P^{ir}(i, j, k)$ 의 표현을  $C^{ir}_{(n, m)}(i, j, k)$ 로 변화시킨 수식이라 정의하자( $e=1, \dots, 5$ ).

$(K-1)$ 개의 상태  $(i, j, k) \in NB^{ir}$ 의 시스템 평형방정식과 모든 상태의 확률의 합을 1로 하는 정규화 방정식으로 구성된 다음의 연립 방정식을 풀면 경계상태의 안정상태확률을 구할 수 있으며, 이를 이용하여 식 (9)를 적용하면 다른 상태의 안정상태확률을 얻을 수 있다( $K=|TB^{ir}|=|NB^{ir}|$ ).

$$\begin{bmatrix} ba(1, 1) & \dots & ba(1, \bar{y}) & \dots & ba(1, K) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ba(\bar{x}, 1) & \dots & ba(\bar{x}, \bar{y}) & \dots & ba(\bar{x}, K) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ba(K, 1) & \dots & ba(K, \bar{y}) & \dots & ba(K, K) \\ P^{ir}(-N+1, \beta_{-N+1}, 0) \\ \vdots \\ P^{ir}(n, m, 0) \\ \vdots \\ P^{ir}(S, \alpha_S, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서,

$$ba(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} O^{ir}(i, j, k) C^{ir}_{(n, m)}(i, j, k) - \\ \sum_{e=1}^5 CI^{ir}_{e, (n, m)}(i, j, k), 1 \leq \bar{x} \leq K-1, \\ \sum_{(i', j', k') \in S^r} C^{ir}_{(n, m)}(i', j', k'), \bar{x} = K. \end{cases}$$

### 3.2.2 $\lambda^r_q(k)$ 구하기

$R^2$ 의 안정상태확률  $P^{ir}(i, j, k)$ 가 구해지면 이로부터 수리소에  $k$ 대의 장비가 존재할 안정상태확률,  $PR(k)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$PR(k) = \sum_{i=-N+k}^S \sum_{j=\beta_i}^{\alpha_i} P^{ir}(i, j, k), 0 \leq k \leq N \quad (14)$$

수리소에  $k$ 대의 장비가 존재할 때 도착 가능한 최대 집단의 크기를  $B_1(k) = \min[N-k, Q]$ 이라 하면, 상태종속 집단 도착율  $\lambda^r_q(k)$ 는 다음과 같이 구해진다.  $0 \leq k \leq N, 1 \leq q \leq B_1(k)$ 에 대하여,

$$\lambda^r_q(k) = \begin{cases} \frac{\mu^r(k+1)PR(k+1)}{PR(k)}, Q=q=1, \\ \frac{1}{PR(k)} \left[ \lambda_2(k) \sum_{i=1}^S \sum_{j=\beta_i}^{\alpha_i} P^{ir}(i, j, k) + \sum_{j=\beta_1}^{\alpha_1} [b^1 j \tau_1 + (\alpha_1 - j) \tau_2] P^{ir}(-1, j, k) \right], Q \geq 2, q=1, \\ \frac{\sum_{j=\beta_{-q}}^{\alpha_{-q}} [b^i j \tau_1 + (\alpha_{-q} - j) \tau_2] P^{ir}(-q, j, k)}{PR(k)}, Q \geq 3, 2 \leq q \leq Q-1, \\ \frac{\sum_{j=-N}^{-Q} \sum_{j=\beta_i}^{\alpha_i} [b^i j \tau_1 + (\alpha_i - j) \tau_2] P^{ir}(i, j, k)}{PR(k)}, Q \geq 2, q=Q, \\ 0, \text{Otherwise } e. \end{cases} \quad (15)$$

식 (15)의 각 경우의 분자는 크기  $q$ 인 장비의 수리소로의 집단도착으로 인한 상태  $k$ 의 이탈율을 의미한다. 식 (15)의 두 번째 경우를 보다 구체적으로 살펴보자. 분자의 첫 번째 항은 재고시스템에 부품이 존재할 때 하부 네트워크  $R^2$ 에 도착한 장비는 재고시스템에서 지체하지 않고 즉시 수리소로 보내지는 경우를 나타낸다. 두 번째 항은 재고시스템에 고장난 장비가 1대 존재할 때 주문한 부품의 도착에 의해서 고장 장비가 수리소로 이동하는 것을 나타낸다. 식 (15)의 세 번째와 네 번째 경우도 같은 방식으로 해석할 수 있다. 식 (15)의 첫 번째 경우도 같은 방법으로 구할 수 있으나, 수리소를 출생-사멸과정(birth-death process)으로 모형화하여 위와 같이 간단히 구할 수 있다.

### 3.2.3 수리소의 안정상태확률

상태종속 집단 도착율  $\lambda^r_q(k)$ 를 알고 있다고 가정하면, 수리소는 서비스시간이 Coxian분포를 따르며  $M$ 명의 서어버가 존재하는 개방형 대기시스템으로 볼 수 있다. 도착간격이 지수분포를 따르고 서비스 시간이 Coxian분포를 따르므로 수리소는 상태의 수가 유한한 연속시간 마코프 체인으로 모델링이 가능하다.  $k$ 와  $l$ 이 4차원 상태공간과 같은 의미를 갖는다고 했을 때, 상태는  $(k, l)$ 로 표현되며 수리소의 상태공간  $S^r$ 은 다음과 같다.

$$S^r = \{(k, l) \mid 0 \leq k \leq N, 0 \leq l \leq \min[k, M]\}$$

$N=5, Q=2, M=2$ 일 경우의 수리소의 상태전이율 다이어그램은 [그림 7]과 같다.

수리소의 안정상태확률을  $P^r(k, l)$ 라고 했을 때, 수리소의 상태전이율 다이어그램로부터 얻어지는 상태  $(k, l) (\in S^r)$ 에 대한 시스템 평형방정식은 다음과 같다.

$$O^r(k, l)P^r(k, l) = \sum_{e=1}^4 I_e^r(k, l) \quad (16)$$

식 (16) 좌변의  $O^r(k, l)$ 는 상태  $(k, l)$ 로부터의 이탈율로서  $B_1(k) = \min[N-k, Q]$ 라 놓으면 다음과 같이 표현된다.

$$O^r(k, l) = \sum_{q=1}^{B_1(k)} \lambda^r_q(k) + l\mu_1 + [\min(k, M) - l]\mu_2 \quad (17)$$

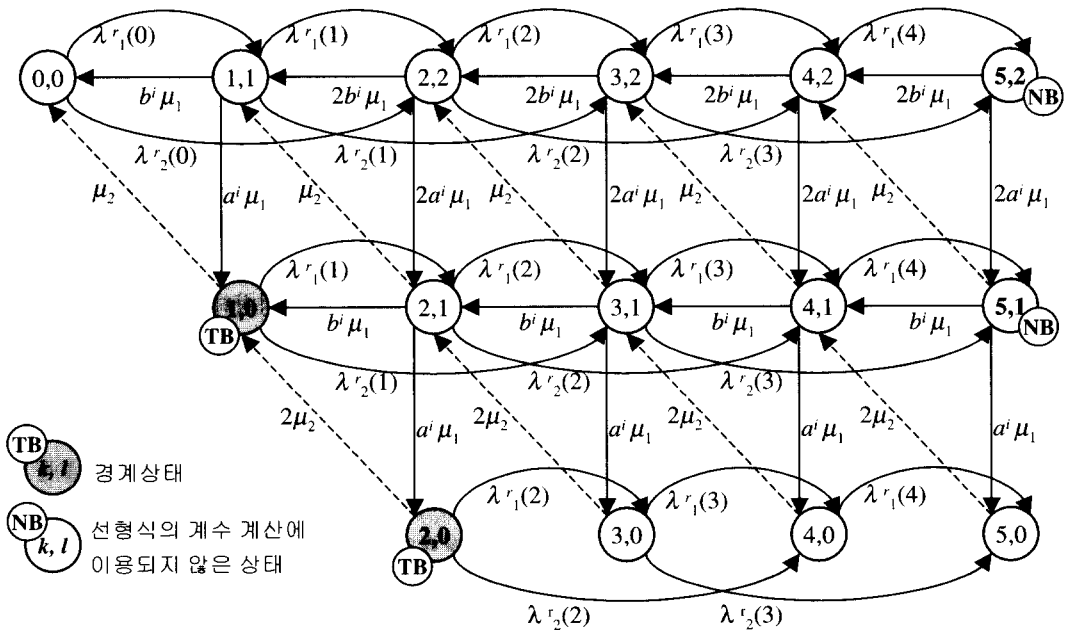
식 (16) 우변의  $I_e^r(k, l)$ 은 상태  $(k, l)$ 로의 평균 입력율로서 다음과 같이 4가지 경우로 분류된다.

i)  $I_1^r(k, l)$  : 장비 도착에 의한 시스템 상태  $(k, l)$ 로의 평균 입력율,

$$I_1^r(k, l) = \begin{cases} \sum_{q=1}^{B_1(k, l)} \lambda^r_q(k-q)P^r(k-q, l-q), & 0 \leq k \leq M, \\ \sum_{q=1}^{k-M} \lambda^r_q(k-q)P^r(k-q, l) + \sum_{q=k-M+1}^{B_2(k, l)} \lambda^r_q(k-q)P^r(k-q, l-M+k-q), & M+1 \leq k \leq M+Q-1, \\ \sum_{q=1}^Q \lambda^r_q(k-q)P^r(k-q, l), & M+Q \leq k \leq N. \end{cases} \quad (18)$$

여기서,  $B_1^2(l) = \min[Q, l]$ ,  $B_2^2(k, l) = \min[Q, l-M+k]$ .

ii)  $I_2^r(k, l)$  : Coxian 분포의 1단계 경과 후, 시스템 이탈에 의한 상태  $(k, l)$ 로의 평균 입력율,



[그림 7] 수리소의 상태전이율 다이어그램 ( $N=5, Q=2, M=2$ )

$$I_2^r(k, l) = \begin{cases} b^r(l+1)\mu_1 P^r(k+1, l+1), & k \leq M-1, \\ b^r l \mu_1 P^r(k+1, l), & M \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (19)$$

iii)  $I_3^r(k, l)$  : Coxian 분포의 2단계 진입에 의한 상태  $(k, l)$ 로의 평균 입력율,

$$I_3^r(k, l) = \begin{cases} a^r(l+1)\mu_1 P^r(k, l+1), & l \leq \min[k, M]-1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (20)$$

iv)  $I_4^r(k, l)$  : Coxian 분포의 2단계 서비스 완료에 의한 상태  $(k, l)$ 로의 평균 입력율,

$$I_4^r(k, l) = \begin{cases} (k-l+1)\mu_2 P^r(k+1, l), & k \leq M-1, \\ (M-l+1)\mu_2 P^r(k+1, l-1), & M \leq k \leq N-1, l \geq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

본 모형의 안정상태 확률은 시스템 평형방정식을 풀면 구할 수 있으나, 3.2.1절에서와 같이 순환적 기법을 이용하면 보다 효율적으로 해를 구할 수 있다. 경계상태의 집합,  $TB^r$ 을 다음과 같이 설정하자.

$$TB^r = \{(n, 0) \mid 1 \leq n \leq M\}$$

상태  $(k, m)$ 의 안정상태확률은 다음과 같이 경계상태의 일차결합으로 표현된다( $(k, l) \in S^r$ ).

$$P^r(k, l) = \sum_{n=1}^M C_n^r(k, l) P^r(n, 0) \quad (22)$$

여기서,  $C_n^r(k, l)$ 은 경계상태  $(n, 0)$ 의 상태  $(k, l)$ 에 대한 선형식의 계수이다.

경계상태  $(n, 0)$ 에 대해 다음의 반복계획을 실행하여 선형식의 계수의 값을 구한다( $\forall (n, 0) \in$

$TB^r$ ).

### 수리소의 분석 방법

1 단계 :  $P^r(n, 0)$ 의 확률을 1로 하고 다른 경계상태의 확률을 0으로 놓는다. 그러면 식 (22)에 의해 다음의 관계가 성립한다.

$$C_n^r(k, l) = P^r(k, l), \quad \forall (k, l) \in S^r \quad (23)$$

2 단계 :  $1 \leq k \leq M$ 의 상태  $(k, 0)$ 의 평형방정식을 변형한 식 (24)을 순차적으로 적용하고, 식 (23)을 이용하면 선형식의 계수  $C_n^r(k, 1)$ 을 구할 수 있다.

$$P^r(k, 1) = \frac{1}{a^r \mu_1} \{O^r(k, 0)P^r(k, 0) - \sum_{e=1, e \neq 3}^4 I_e^r(k, 0)\} \quad (24)$$

3 단계 : 상태  $(0, 0)$ 의 평형방정식을 변형한 식 (25)을 적용하고, 식 (23)을 이용하면 선형식의 계수  $C_n^r(0, 0)$ 을 구할 수 있다.

$$P^r(0, 0) = \frac{1}{\sum_{q=1}^6 \lambda_q^r(k)} \{b^r \mu_1 P^r(1, 1) + \mu_2 P^r(1, 0)\} \quad (25)$$

4 단계 :  $1 \leq l \leq M-1, l \leq k \leq M-1$ 의 상태  $(k, l)$ 의 평형방정식을 변형한 식 (26)을 순차적으로 적용하고, 식 (23)을 이용하면 선형식의 계수  $C_n^r(k+1, l+1)$ 을 구할 수 있다.

$$P^r(k+1, l+1) = \frac{1}{(l+1)b^r \mu_1} \{O^r(k, l) P^r(k, l) - \sum_{e=1, e \neq 2}^4 I_e^r(k, l)\} \quad (26)$$

5 단계 :  $M+1 \leq k \leq N$ 의 상태  $(k, 0)$ 와  $(k-1, 1)$ 의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 O^r(k,0)P^r(k,0) &= I^r_1(k,0) + a^r\mu_1P^r(k,1) \\
 O^r(k-1,1)P^r(k-1,1) &= I^r_1(k-1,1) + \\
 &\quad b^r\mu_1P^r(k,1) + \\
 &\quad I^r_3(k-1,1) + \\
 &\quad M\mu_2P^r(k,0)
 \end{aligned}$$

1~4 단계에 전개에 의해 두 평형방정식의  $I^r_1(k,0)$ ,  $P^r(k-1,1)$ ,  $I^r_1(k-1,1)$ ,  $I^r_3(k-1,1)$ 의 값을 이미 알고있으므로, 미지의 수는  $P^r(k,0)$ 과  $P^r(k,1)$ 임을 알 수 있다. 따라서 연립방정식을 풀면 다음과 같이 정리되며, 이에 따라 식 (23)으로부터 선형식의 계수  $C^r_n(k,0)$ 과  $C^r_n(k,1)$ 을 값을 얻을 수 있다.

$$P^r(k,1) = \frac{O^r(k,0)A(k-1) - M\mu_2I^r_1(k,0)}{O^r(k,0)b^r\mu_1 + a^rM\mu_1\mu_2} \quad (27)$$

여기서,  $A(k-1) = O^r(k-1,1)P^r(k-1,1) - I^r_1(k-1,1) - I^r_3(k-1,1)$

$$P^r(k,0) = \frac{1}{O^r(k,0)} \{ I^r_1(k,0) + a^r\mu_1P^r(k,1) \} \quad (28)$$

**5.1 단계 :** 5단계의 연계단계로서,  $2 \leq l \leq M$ 의 상태  $(k,l)$ 의 평형방정식을 변형한 식 (29)을 순차적으로 적용하면, 식 (23)으로부터 선형식의 계수  $C^r_n(k+1,l)$ 을 구할 수 있다.

$$P^r(k+1,l) = \frac{1}{b^r l \mu_1} \{ O^r(k,l)P^r(k,l) - \sum_{e=1, e \neq 2}^4 I^r_e(k,l) \} \quad (29)$$

선형식의 계수 계산에 이용되지 않은 상태의 집합  $NB^r = \{(N,l) \mid 1 \leq l \leq M\}$ 을 정의하면  $(M-1)$ 개 상태  $(N,l) (\in NB^r)$ 의 시스템 평형방정식과 모든 상태의 확률의 합을 1로 하는 정규화 방정식으로 구성된 연립 방정식을 풀어서 경계상태의 확률을 구할 수 있으며, 이를 식 (22)을 이용하면 다른 상태의 안정상태확률 값을 얻을 수 있다.

### 3.2.4 $\mu^r(k)$ 구하기

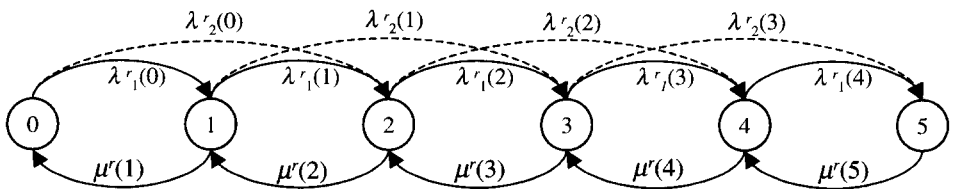
안정상태확률  $P^r(k,l)$ 이 구해지면 이로부터 수리소에  $k$ 대의 장비가 존재할 안정상태확률,  $PR(k)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$PR(k) = \sum_{l=0}^{\min\{k,M\}} P^r(k,l), \quad 0 \leq k \leq N \quad (30)$$

수리소의 안정상태확률  $PR(k)$ 가 구해지면 수리소의 서버버를 서비스시간이 지수분포를 따르고 상태종속 서비스율이  $\mu^r(k)$ 인 단일 서버로 치환할 수 있고, 수리소의 상태는 수리소에 존재하는 장비의 수로 나타낼 수 있으므로 상태전이율 다이어그램은 [그림 8]와 같이 단순해진다.

$\mu^r(k)$ 를 구하기 위하여 수리소의 상태공간을  $S^r_1 = \{0, \dots, k-1\}$ ,  $S^r_2 = \{k, \dots, N\}$ 으로 분할한 후  $S^r_1$ 과  $S^r_2$ 간의 평균 전이율을 동일하게 하여주는 평형방정식을 작성하면 다음과 같다 ( $1 \leq k \leq N$ ).

$$\mu^r(k) PR(k) = \sum_{q_1=1}^{h_1(k)} PR(k-q_1) + \sum_{q_2=q_1}^{h_2(k)} \lambda^r_{q_2} (k-q_1) \quad (31)$$



[그림 8] 상태종속 서비스율  $\mu^r(k)$ 를 따르는 수리소의 상태전이율 다이어그램 ( $N=5, Q=2$ )

여기서,  $h_1(k) = \min[k, Q]$ ,  $h_2(k) = \min[Q, N - k + q_1]$

따라서, 식 (31)로부터 수리소의 상태종속 서비스율  $\mu^r(k)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mu^r(k) = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{\sum_{q_1=1}^{h_1(k)} PR(k-q_1) \sum_{q_2=q_1}^{h_2(k)} \lambda^{r_{q_2}}(k-q_1)}{PR(k)}, & 1 \leq k \leq N \end{cases}, \quad (32)$$

### 3.3 하부 네트워크 $R^1$ 분석

하부 네트워크  $R^1$ 에  $n$  대의 장비가 존재할 경우의  $R^1$ 으로의 장비 도착율  $\lambda_1(n)$ 을 알고 있다고 가정하자. 고장까지의 시간은 1단계와 2단계 고장율이 각각  $\lambda_1$ 와  $\lambda_2$ 이며, 2단계 진입확률이  $a^w$ 인 2단계 Coxian분포를 따른다고 가정하자. 하부 네트워크  $R^1$ 은  $D$ 명의 서버가 서비스하는 개방형 대기시스템으로 볼 수 있으므로  $Q=1$ 일 경우의 수리소의 가정과 하부 네트워크  $R^1$ 의 가정은 동일하다. 그러므로 하부 네트워크  $R^1$ 의 안정상태 확률을  $P^w(i, j)$ 라 정의하면,  $P^w(i, j)$ 는 3.2.4 절에서 소개되었던 수리소의 분석방법을 사용하여 구할 수 있다.  $P^w(i, j)$ 가 구하여지면  $R^1$ 에  $n$ 대의 장비가 존재할 안정상태확률,  $P_1(n)$ 은 다음과 같이 구해질 수 있다( $0 \leq n \leq N$ ).

$$P_1(n) = \sum_{j=0}^{\min\{n, D\}} P^w(n, j) \quad (33)$$

### 3.4 승법형 근사법을 이용한 알고리즘

하부네트워크  $R^1$ 의 안정상태확률  $P_1(n)$ 이 구해지면 하부 네트워크  $R^1$ 에 존재하는 장비의 수가  $n$ 일 경우의 상태종속 산출율  $v_i(n)$ 의 값은 다음과 같이 얻을 수 있다[3].

$$v_i(n) = \begin{cases} 0 & , n=0 \\ \lambda_i(n-1) \frac{P_i(n-1)}{P_i(n)} & , n=1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (34)$$

하부네트워크  $R^i$ 의 상태종속 산출율  $v_i(n)$ 의 값이 구해지면 동등 승법형 대기네트워크를 구성하는 서버  $S^i$ 의 상태종속 서비스율  $\mu_i(n)$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\mu_i(n) = v_i(n), \quad n=0, \dots, N, \quad i=1, 2 \quad (35)$$

따라서 하부네트워크  $R^i$ 의 상태종속 도착율  $\lambda_i(n)$ 을 알 수 있으면 하부네트워크  $R^i$ 의 안정상태확률을 구할 수 있고 식 (34)과 식 (35)를 이용하여 동등 승법형 네트워크의 상태종속 서비스율  $\mu_i(n)$ 을 구할 수 있다.  $R^i$ 의 분석에서 우리는 상태종속 도착율  $\lambda_i(n)$ 을 알고 있다고 가정하였다. 그러나  $\lambda_i(n)$ 의 값은 우리가 구하여야만 하는 미지의 값이다. 동등 승법형 네트워크의 상태종속 서비스율  $\mu_i(n)$ 의 값을 알면  $\lambda_i(n)$ 의 값은 다음과 같이 구하여 질 수 있다. 동등 승법형 대기네트워크의 서비스율  $\mu_i(n)$ 의 값을 알면 승법형 대기네트워크의 분석에 사용될 수 있는 임의의 알고리즘을 이용하여 서버  $S^i$ 의 상태종속 산출율,  $X_i(n)$ 을 구할 수 있다. 만일 중첩(convolution) 알고리즘을 이용하면 서버  $S^i$ 의 상태종속 산출율은 다음식에 의해 구할 수 있다.

$$X_i(n) = \begin{cases} e_i \frac{G_{2/i}(N-n-1)}{G_{2/i}(N-n)} & , n=0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & , n=N \end{cases} \quad (36)$$

여기서  $e_i$ 는 서버  $S^i$ 의 상대적 방문율이고,  $G_{2/i}$ 는 2개의 스테이션 중 스테이션  $i$ 를 제외하고 계산한 정규화 상수이다.

동등 승법형 대기네트워크를 구성하는 서버  $S^i$ 의 상태종속 산출율이 구해지면 하부네트워크  $R^i$ 의 상태종속 도착율은 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda_i(n) = X_i(n), \quad n=0, \dots, N, \quad i=1, 2 \quad (37)$$

이상과 같이 하부네트워크의 안정상태확률이 구하여 지면, 하부 네트워크의 상태종속 산출율을 계산할 수 있고, 이 값은 곧 동등 대기네트워크의 상태종속 서비스율로 사용된다. 또한 동등 대기네트워크의 상태종속 서비스율이 구해지면 동등 대기네트워크의 상태종속 산출율이 계산되어 질 수 있고, 이 값은 곧 하부네트워크의 상태종속 도착율로 사용될 수 있다. 승법형 근사법에서는 이와 같은 과정을 해가 수렴할 때까지 반복 수행한다.

### 알고리즘

Step 0. 초기화 과정.

$\mu_i(n)$ 과  $\mu^r(n)$ 을 초기화.

Step 1. 반복 과정.

Step 1.1. 동등 승법형 대기네트워크 분석.

식 (36)과 (37)를 이용하여 하부 시스템의 도착율  $\lambda_i(n)$ 의 계산.

Step 1.1. 하부 시스템  $R^1$  분석.

$P_1(n)$ 을 계산하고, 식 (34)과 (35)를 이용하여  $\mu_1(n)$ 의 계산.

Step 1.2. 하부 시스템  $R^2$ 의 반복과정.

Step 1.2.1.  $P^{ir}(i, j, k)$ 을 계산하고, 식 (15)를 이용하여 집단 도착율  $\lambda^r_q(k)$ 의 계산.

Step 1.2.2. 수리 시스템 분석.

$P^r(k, l)$ 을 계산하고, 식 (32)를 이용하여  $\mu^r(k)$ 의 계산.

Step 1.2.3.  $\mu^r(k)$ 의 수렴성 check.

수렴이 이루어 졌으면 Step 1.2.4로 가고, 그렇지 않으면 Step 1.2로 돌아감.

Step 1.2.4.  $P_2(n)$ 을 계산하고, 식 (34)과 (35)를 이용하여  $\mu_2(n)$ 의 계산.

Step 1.3.  $\mu_i(n)$ 의 수렴성 check.

수렴이 이루어 졌으면 Step 2로 가고, 그

렇지 않으면 Step 1로 돌아감.

Step 2. 성능척도 계산과정

구하고자 하는 성능치를 3.5절의 식을 이용하여 계산.

### 3.5 시스템의 성능척도 계산

하부 네트워크의 안정상태 확률이 구해지면, 이를 이용하여 원 네트워크의 각 스테이션의 안정상태확률을 구할 수 있다. 기지와 부품창고에 각각  $n$ 대의 장비가 존재할 안정상태확률,  $PW(n)$ 와  $PI(n)$ 는 다음과 같이 쉽게 구해질 수 있다( $0 \leq n \leq N$ ).

$$PW(n) = \sum_{j=0}^{\min[n, D]} P^w(n, j) \quad (38)$$

$$PI(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^S \sum_{j=\beta_i}^{\alpha_i} \sum_{k=0}^N P^{ir}(i, j, k), & n=0 \\ \sum_{j=\beta_{-n}}^{\alpha_{-n}} \sum_{k=0}^{N-n} P^{ir}(-n, j, k), & 1 \leq n \leq N \end{cases} \quad (39)$$

장비가 부품창고에 도착한 순간 재고가 없어 장비가 대기할 확률  $P_{b/k}$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$P_{b/k} = 1 - (PI(0) - \sum_{j=\beta_0}^{\alpha_0} \sum_{k=0}^N P^{ir}(0, j, k)) \quad (40)$$

그 외의 중요한 성능척도로 기지에서 가동중인 평균 장비의 수,  $E(N_d)$ , 부품창고에서 대기 중인 평균 장비의 수,  $E(N_i)$ , 그리고 수리 시스템에서의 평균 바쁜 수리공의 수,  $E(N_r)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$E(N_d) = \sum_{n=1}^N (\min[n, D]) PW(n) \quad (41)$$

$$E(N_i) = \sum_{n=1}^N n PI(n) \quad (42)$$

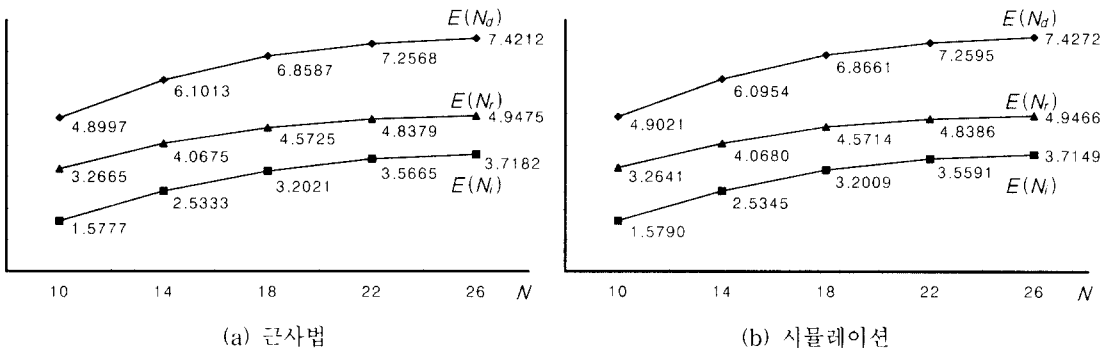
$$E(N_r) = \sum_{n=1}^N (\min[n, M]) PR(n) \quad (43)$$

### 4. 근사적 분석의 정확도 평가

본 연구에서는 제안된 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 예제를 통하여 많은 실험을 수행하였다. 알고리즘의 정확도를 평가하기 위하여 알고리즘에서 얻어진 값과 시물레이션에서 얻어진 값을 비교하였으며, 시물레이션은 종료조건으로 시물레이션시간을  $10^5$ 로 설정하여 10번 반복하였다. 알고리즘의 종료조건은  $10^{-4}$ 이하로 하였다. 본 연구에서 실험한 대부분 예제에서 승법형 근사법은 10~25번의 반복에서 수렴함을 관측 할 수 있었으며 모든 예제에서 수렴하였다. 또한 승법형 근사법의 초기단계에서 하부네트워크  $R^2$  분석의 반복횟

수는 대부분 5번 이하에서 수렴하였으며 승법형 근사법이 수렴함에 따라 3번 이하로 빠르게 수렴하는 것으로 나타났다. 본 절에서는 파라미터의 값이 변화함에 따라 시스템의 성능척도가 어떻게 변화하는지 알아보기 위해 4개의 대표적인 예제 군을 선정하여 소개하도록 한다. 첫 번째 예제 군에서는 장비의 수를 변화시켜 보았다. 그리고 두 번째와 세 번째 예제 군에서는 (S, Q)정책에서 각각 S와 Q의 변화의 영향을 조사해 보았으며, 네 번째 예제 군에서는 수리소의 수리공의 수를 변화시켜 보았다. 결과는 아래의 그림과 표에 주어져 있다.

<표 1>~<표 4>에서 볼 수 있듯이 본 연구에서



[그림 9] N의 변화에 따른 성능치의 변화(예제 1)

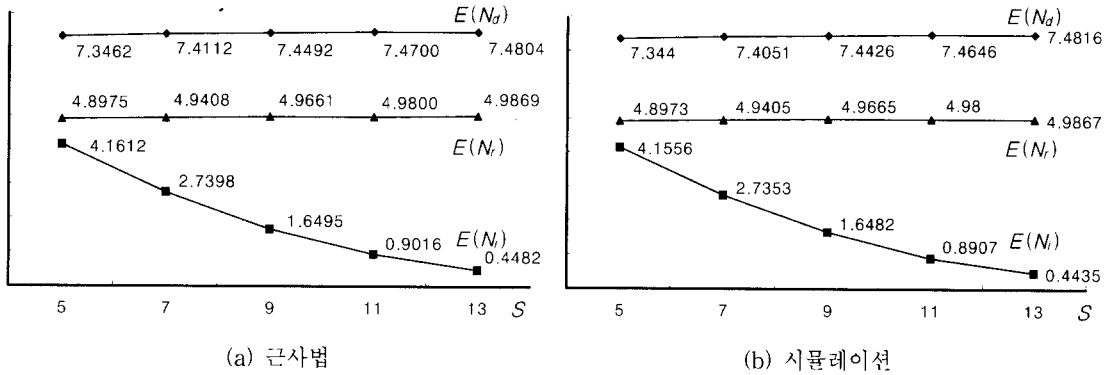
<표 1> 예제 1의 결과

$D=10, S=5, Q=3, M=3, \lambda_1=1, \lambda_2=1, a^m=0.5, \tau_1=1, \tau_2=1, a^i=0.5, \mu_1=2, \mu_2=1, a^r=0.5$

N	$E(N_d)$		$E(N_i)$		$P_{b/k}$		$E(N_r)$	
	근사법 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	시물레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	근사법 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	시물레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	근사법 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	시물레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	근사법 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	시물레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)
10	4.8997 (-0.0490%)	4.9021 (+0.0035)	1.5777 (-0.0823%)	1.5790 (+0.0033)	0.6839 (0.0878%)	0.6833 (±0.0008)	3.2665 (0.0735%)	3.2641 (+0.0037)
14	6.1013 (0.0968%)	6.0954 (+0.0054)	2.5333 (-0.0473%)	2.5345 (±0.0069)	0.7902 (0.1013%)	0.7894 (±0.0009)	4.0675 (-0.0123%)	4.0680 (±0.0026)
18	6.8587 (-0.1078%)	6.8661 (+0.0063)	3.2021 (0.0375%)	3.2009 (+0.0074)	0.8311 (-0.0601%)	0.8316 (+0.0015)	4.5725 (0.0241%)	4.5714 (+0.0015)
22	7.2568 (-0.0372%)	7.2595 (±0.0059)	3.5665 (0.2079%)	3.5591 (+0.0076)	0.8469 (0.0000%)	0.8469 (±0.0009)	4.8379 (-0.0145%)	4.8386 (±0.0012)
26	7.4212 (-0.0808%)	7.4272 (+0.0048)	3.7182 (0.0888%)	3.7149 (+0.0069)	0.8525 (-0.0469%)	0.8529 (+0.0005)	4.9475 (0.0182%)	4.9466 (±0.0008)

제안된 근사적 기법은 일반적으로 만족할 만한 수준의 정확한 해를 산출해 준다. 대부분의 경우 상대오차가 1% 미만이며, 관측된 최대 상대오차는

1.2238%이다. 비록 본 논문에서는 지면 관계상 4개의 예제의 결과만을 나타냈으나 다른 예제에 대해서도 위에서 얻어진 결과와 비슷한 양상을 보였음

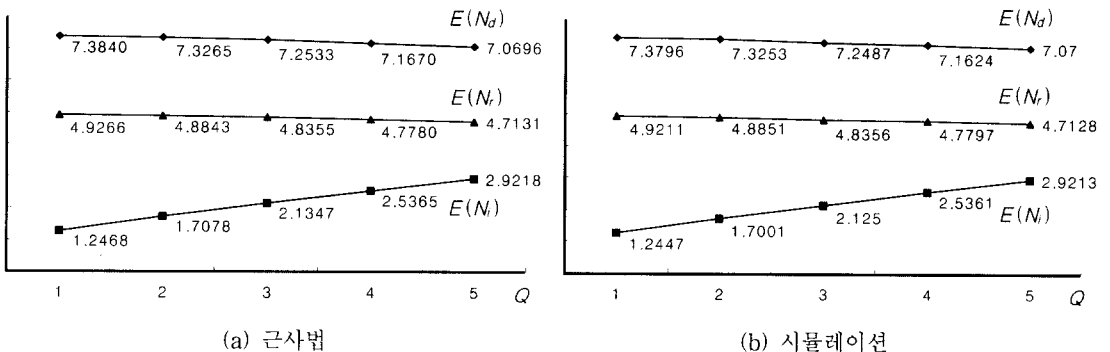


[그림 10] S의 변화에 따른 성능치의 변화(예제 2)

<표 2> 예제 2의 결과

$N=25, D=10, M=5, Q=4, \lambda_1=1, \lambda_2=1, a^w=0.5, \tau_1=1, \tau_2=1, a^l=0.5, \mu_1=2, \mu_2=1, a^r=0.5$

S	$E(N_d)$		$E(N_r)$		$P_{b/k}$		$E(N_i)$	
	근사법 (상대오차)	시뮬레이션 (95 % 신뢰구간)	근사법 (상대오차)	시뮬레이션 (95 % 신뢰구간)	근사법 (상대오차)	시뮬레이션 (95 % 신뢰구간)	근사법 (상대오차)	시뮬레이션 (95 % 신뢰구간)
5	7.3462 (0.0300%)	7.3440 (±0.0072)	4.1612 (0.1348%)	4.1556 (±0.0088)	0.8531 (-0.0352%)	0.8534 (±0.0005)	4.8975 (0.0041%)	4.8973 (±0.0004)
7	7.4112 (0.0824%)	7.4051 (±0.0056)	2.7398 (0.1645%)	2.7353 (±0.0057)	0.6990 (-0.1571%)	0.7001 (±0.0008)	4.9408 (0.0061%)	4.9405 (±0.0008)
9	7.4492 (0.0887%)	7.4426 (±0.0077)	1.6495 (0.0789%)	1.6482 (±0.0075)	0.5140 (-0.2523%)	0.5153 (±0.0014)	4.9661 (0.0081%)	4.9665 (±0.0007)
11	7.4700 (0.0723%)	7.4646 (±0.0064)	0.9016 (1.2238%)	0.8907 (±0.0034)	0.3386 (0.4152%)	0.3372 (±0.0004)	4.9800 (0.0000%)	4.9800 (±0.0004)
13	7.4804 (-0.0160%)	7.4816 (±0.0090)	0.4482 (1.0598%)	0.4435 (+0.0024)	0.1972 (0.4585%)	0.1963 (+0.0009)	4.9869 (0.0040%)	4.9867 (+0.0005)



[그림 11] Q의 변화에 따른 성능치의 변화(예제 3)



〈표 3〉 예제 3의 결과

N=20, D=10, M=5, S=7, $\lambda_1=1, \lambda_2=1, a''=0.5, \tau_1=1, \tau_2=1, a^i=0.5, \mu_1=2, \mu_2=1, a^r=0.5$								
Q	$E(N_d)$		$E(N_i)$		$P_{b/k}$		$E(N_r)$	
	근사법 시뮬레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)		근사법 시뮬레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)		근사법 시뮬레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)		근사법 시뮬레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	
1	7.3840 (0.0596%)	7.3796 (±0.0063)	1.2468 (0.1687%)	1.2447 (±0.0056)	0.6106 (-0.2451%)	0.6121 (±0.0014)	4.9266 (0.1118%)	4.9211 (±0.0010)
2	7.3265 (0.0164%)	7.3253 (±0.0091)	1.7078 (0.4529%)	1.7001 (±0.0049)	0.6413 (-0.1246%)	0.6421 (±0.0006)	4.8843 (-0.0164%)	4.8851 (±0.0013)
3	7.2533 (0.0635%)	7.2487 (±0.0060)	2.1347 (0.4565%)	2.1250 (±0.0061)	0.6652 (0.1053%)	0.6645 (±0.0010)	4.8355 (-0.0021%)	4.8356 (±0.0018)
4	7.1670 (0.0642%)	7.1624 (±0.0061)	2.5365 (0.0158%)	2.5361 (±0.0071)	0.6854 (-0.1166%)	0.6862 (±0.0011)	4.7780 (-0.0356%)	4.7797 (±0.0016)
5	7.0696 (-0.0057%)	7.0700 (±0.0066)	2.9218 (0.0171%)	2.9213 (±0.0083)	0.7025 (0.0142%)	0.7024 (±0.0008)	4.7131 (0.0064%)	4.7128 (±0.0026)

〈표 4〉 예제 4의 결과

N=15, D=7, S=5, Q=3, $\lambda_1=1, \lambda_2=1, a''=0.5, \tau_1=1, \tau_2=1, a^i=0.5, \mu_1=1, \mu_2=1, a^r=0.5$								
M	$E(N_d)$		$E(N_i)$		$P_{b/k}$		$E(N_r)$	
	근사법 시뮬레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)		근사법 시뮬레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)		근사법 시뮬레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)		근사법 시뮬레이션 (상대오차) (95 % 신뢰구간)	
3	2.9987 (-0.1336%)	2.9947 (±0.0027)	0.5584 (0.6852%)	0.5546 (±0.0021)	0.3853 (0.2341%)	0.3844 (±0.0012)	2.9987 (0.0000%)	2.9987 (±0.0001)
4	3.9673 (-0.0705%)	3.9701 (±0.0042)	1.0638 (0.0941%)	1.0628 (±0.0050)	0.5357 (-0.1119%)	0.5363 (±0.0014)	3.9673 (-0.0428%)	3.9690 (±0.0007)
5	4.7821 (-0.1170%)	4.7877 (±0.0045)	1.5778 (-0.3096%)	1.5827 (±0.0046)	0.6466 (0.0774%)	0.6461 (±0.0011)	4.7821 (-0.1524%)	4.7894 (±0.0013)
6	5.3228 (-0.2305%)	5.3351 (±0.0046)	1.9521 (-0.4132%)	1.9602 (±0.0042)	0.7089 (-0.3234%)	0.7112 (±0.0006)	5.3228 (-0.1257%)	5.3295 (±0.0033)
7	5.6224 (-0.1598%)	5.6314 (±0.0034)	2.1684 (-0.3767%)	2.1766 (±0.0042)	0.7423 (-0.3357%)	0.7448 (±0.0008)	5.6224 (0.1314%)	5.6298 (±0.0016)

을 밝힌다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 장비가 고장날 경우 부품이 확보 되어야만 수리를 받을 수 있는 수리시스템의 성능 평가를 위한 근사적기법을 승법형 근사법을 이용하여 개발하였다. 기존의 연구에서는 고장이 발생할 때마다 부품을 주문하는 재고정책을 사용하였으나 본 연구에서는 고장난 장비의 수가 Q에 이를 때마다 Q개의 부품을 발주하고, 부품의 최대 재고수준을 S로 하는 (S, Q)재고정책을 가정하였

다. 또한 장비의 고장간격, 부품 인도기간과 수리 시간을 Coxian분포로 가정함으로써 기존 연구의 가정을 크게 완화하였다. 그러나 이러한 가정완화는 승법형 근사법의 하부네트워크 분석단계에서 마코프 체인의 상태공간을 급속히 증가시켜 분석에 어려움을 준다. 본 연구에서는 이를 해결하고자 4차원 마코브 체인을 3차원 마코브 체인으로 근사화 하였으며, 근사화하는 과정에서 반복적기법을 이용하였다. 본 연구에서 제안된 근사적 기법은 네트워크의 안정상태 확률, 재고 시스템의 부재고 비율, 기지에서서의 평균 가동 장비 수, 수리소에서의 평균 바쁜 수리공 수 등 중요한 성능 척도를 정확

하고 신속하게 계산하여 준다. 본 연구에서 제안된 근사적 기법은 향후 최적 예비장비 수, 최적 수리 용량, 최적 재고정책을 구하기 위한 알고리즘 개발에 유용하게 이용되어 질 수 있으리라 기대한다.

## 참 고 문 헌

- [1] Abboud, N.E. and J.N. Daigle, "A Little's Result Approach to the Service Constrained Spare Provisioning Problem for Repairable Items", *Operations Research*, Vol.45 (1997), pp.577-583.
- [2] Albright, S.C. and A. Gupta, "Steady-State Approximation of a Multiechelon Multi-Indented Repaired-Item Inventory System with a Single Repair Facility", *Naval Research Logistics*, Vol.40 (1993), pp.479-493.
- [3] Baynat, B. and Y. Dallery, "A Unified View of Product-form Approximation Techniques for General Closed Queueing Networks", *Performance Evaluation*, Vol.18 (1993), pp. 205-224.
- [4] Buzacott, J.A. and D. Kostelski, "Matrix-geometric and Recursive Algorithm Solution of a two-stage Unreliable Flow Line", *IIE Trans.*, Vol.19 (1987), pp.429-438.
- [5] Graves, S.C., "A Multi-Echelon Inventory Model for Repairable Items with one-for one Replenishment", *Management Science*, Vol. 31 (1985), pp.1247-1256.
- [6] Gross, D., D.R. Miller and R.M. Soland, "A Closed Queueing Network Model For Multi-Echelon Repairable Item Provisioning", *IIE Transactions*, Vol.15 (1983), pp.344-352.
- [7] Herzog, U., L. Woo and K.M. Chandy, "Solution of Queueing Problems by a Recursive Technique", *IBM J. Res. Dev.*, Vol.19(1975), pp.295-300.
- [8] Madu, C.N., "A Closed Queueing Malignance Network with Two Repair Centres", *J. of the Operational Research Society*, Vol. 39 (1988), pp.959-967.
- [9] Marie, R.A., "An Approximate Analytical Method for General Queueing Networks", *IEEE Trans. Soft. Eng.*, Vol.SE-5 (1979), pp.530-538.
- [10] Muckstat, J.A., "A Model for a Multi-Item, Multi-Echelon, Multi-Indenture Inventory System", *Management Science*, Vol.20 (1973). pp.472-481.
- [11] Sherbrooke, C.C., "METRIC : A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control", *Operations Research*, Vol.21 (1973), pp.590-596.