

콘벡스 비용함수를 갖는 점-대-다중점 최소비용 흐름문제

박구현* · 신용식**

Point-to-Multipoint Minimum Cost Flow Problem with Convex Cost Function

Koohyun Park* · Yong-Sik Shin**

■ Abstract ■

In this paper, we introduce a point-to-multipoint minimum cost flow problem with convex cost and demand splitting. A source node transmits the traffic along the tree that includes members of the point-to-multipoint connection. The traffic is replicated by the nodes only at branch points of the tree. In order to minimize the sum of arc costs, we assume that the traffic demand can be splitted and transmitted to destination nodes along different trees. If arc cost is linear, the problem would be a Steiner tree problem in networks even though demand splitting is permitted. The problem would be applied in transmitting large volume of traffic from a server to clients in Internet environments. Optimality conditions of the problem are presented in terms of fair tree routing. The proposed algorithm is a finite terminating algorithm for ϵ -optimal solution. Convergence of the algorithm is obtained under monotonic condition and strict convexity of the cost function. Computational experiences are included.

1. 서 론

본 연구에서는 콘벡스 비용함수와 수요가 분할 전송 가능한 경우의 점-대-다중점 최소비용 흐름 문제의 해법을 개발한다. 본 연구의 문제는

IP(Internet Protocol)망에서 인터넷 방송이나 인터넷 영화 등의 응용에서와 같이 많은 양의 트래픽을 동시에 여러 지점으로 전송하고자하는 멀티캐스팅에서 비롯되었다. 문제 성격상으로는 (점-대-점) 최소비용 흐름문제의 점-대-다중점으로서의 확장된

* 홍익대학교 산업공학과 부교수

** SK Telecom 중앙연구원 선임연구원

형태로 이해할 수도 있고, 스타이너나무 문제의 비선형 형태라고 생각할 수도 있다. 본 연구의 문제를 정의하기 위해 다음의 두 가정이 요구된다:

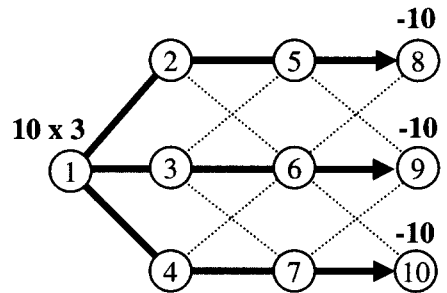
가정 1: 흐름은 점-대-다중점의 노드를 포함하는 나무를 따라 전송된다. 나무의 분기 노드에서 흐름은 복사되어 분기-전송된다.

가정 2: 하나의 근원지 노드에서 복수개의 목적지 노드들까지 전송해야 할 흐름 수요는 동일하며, 이는 분할되어 전송될 수 있다. 분할된 수요는 각기 다른 나무를 따라 전송된다.

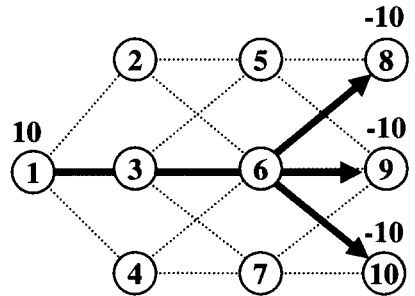
가정 1은 본 연구의 문제가 (점-대-점) 최소비용 흐름문제와 차이가 있음을 의미한다[1]. [그림 1]의 (a) 및 (b)는 이들의 차이를 구체적으로 설명하고 있다. 노드 1이 근원지이고, 노드 8, 노드 9 및 노드 10이 목적지이다. 각 아크에는 흐름량 x 에 대해 비용이 $f(x) = x$ 로 발생한다고 가정한다. 즉, 단위 흐름당 1의 비용이 발생한다. 그러면 (a)에서 노드 1이 흐름 30을 전송하고, 각 목적지 노드는 10의 흐름량을 받는다. 이 때 발생한 아크비용의 합은 90이다. 따라서 (a)는 하나의 최소비용 흐름을 나타내고 있다. 이에 비해 10의 흐름이 전송되는 (b)의 나무는 하나의 점-대-다중점 최소비용 흐름을 나타낸다. 네트워크의 각 노드에서는 흐름이 복사되어 분기될 수 있다. 이 경우의 아크비용의 합은 50이다. 이 예에서 보듯이 아크비용이 흐름량에 대해 선형함수이면 본 연구의 문제는 네트워크에서의 스타이너나무 문제가 된다[4, 19].

가정 2는 본 연구의 문제가 스타이너나무(Steiner tree) 문제와 차이가 있음을 의미한다. [그림 1-a]의 [그림 1-b] 및 [그림 1-c]는 이러한 차이를 구체적으로 보여준다. 각 아크에는 흐름량 x 에 대해 비용이 $f(x) = x^2$ 로 발생한다고 가정한다. 그러면 (b)는 하나의 스타이너나무로서 노드 1에서 10단위 흐름이 각 목적지 노드로 이 나무를 따라 전송된다. 이 때 발생하는 아크비용의 합은 500이다. 반면 본 연구에서는 수요 분할이 허용되기 때

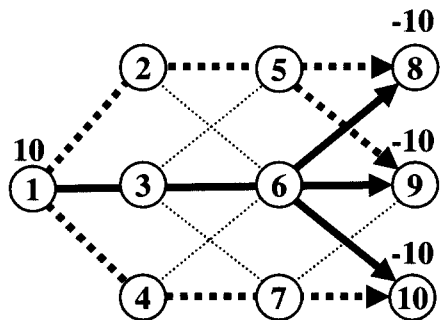
문에 (c)와 같이 수요가 각각 5단위씩 나뉘어 각기 다른 나무로 전송될 수 있다. 이 경우의 총 아크비용의 합은 150이다. 가정 2는 비용함수가 선형일 때 무의미하다. 하나의 스타이너나무가 어떠한 분할된 수요에 대해서도 최선의 나무가 되기 때문이다. 통신망에서 링크지연을 아크비용으로 간주하면 대기행렬이론에 의해 비용함수는 비선형(대부분 콘벡스) 함수로 모형화된다[8, 16].



(a) 세 개의 개별 경로



(b) 하나의 나무



(c) 두 개의 나무

[그림 1] 점-대-다중점 최소비용 흐름문제와 나무

최근 인터넷 수요의 획기적인 증가와 더불어 IP 멀티캐스팅(Internet Protocol multicasting) 서비스가 급증하고 있다. 예를 들어, 인터넷 영화, 인터넷 방송, 화상회의, 웹 콘텐츠 제공, 분배형 데이터서비스, 게시판 서비스 등이 있다. 이러한 IP 멀티캐스트 서비스는 기존의 음성이나 데이터 중심의 서비스와는 달리 동영상 또는 비디오 등을 포함함에 따라 요구되는 대역폭이 대용량화되고 있다. 이러한 IP 멀티캐스팅 서비스의 경로설정을 위해 현재 홍수(flooding)에 의한 방법, 최소걸침나무(minimum spanning tree)에 의한 방법, 근원지-기반 방법(source-based method), 공유 나무(shared tree) 방법 등이 이용되고 있다[5, 10].

그러나 망자원을 효율적으로 이용할 수 있다는 잠재성 때문에 통신망 멀티캐스팅 방법으로 스타 이너나무에 기초한 방법들이 연구되고 있다[9, 11, 14, 15, 18, 19]. 또한 이중에는 스타이너나무 상의 점-대-점 경로에 대한 지연제약이 추가된 연구들이 있다[11, 14, 15, 18]. Rouskas & Baldine[15]는 점-대-점 경로간 지연의 차이가 일정 값을 넘지 않게 하는 제약을 고려하였으며, Leung & Yang [11]은 점-대-점 경로별로 구별된 지연 한계 제약을 고려하였다. Parsa et al.[14]는 아크에 대해 지연과 비용의 두 가지 척도를 고려하였으며, 점-대-점 지연제약 조건하에서 비용을 최소화하는 문제에 대해 휴리스틱 해법을 제시하였다.

Kim[7]은 특별히 ATM망에서 가상경로(virtual path)에 기초한 멀티캐스팅 방법을 다상품(multi-commodity) 점-대-점 비선형 최소비용 흐름문제로 모형화하였다. 트래픽 클래스별 근원지에서 목적지까지의 후보경로를 결정변수로 설정하였으며, 목적함수는 통계적 다중화 이득(statistical multiplexing gain)을 고려한 링크용량 비용함수, 노드에서의 버퍼 비용함수 및 가상채널(virtual channel) 관리 비용함수로 구성된다. 그의 멀티캐스팅은 근원지 노드에서 각 목적지 노드까지 별도의 점-대-점 경로를 설정하는 방법이며, 분기노드에서 트래픽이 복사되는 나무에 기초한 멀티캐스팅 방법과

는 구별된다.

통신망의 멀티캐스팅을 위해 현재 사용되고 있거나[5, 10] 또는 앞에서 언급한 나무에 기초한 방법들은 고정된 아크 비용, 즉 흐름량에 대해 선형의 아크 비용함수를 가정하여 하나의 나무를 설정하는 방법이다. 따라서 최근 대용량화되고 있는 멀티캐스트 트래픽 수요량을 적절히 반영하지 못하고 있다. 많은 경우 통신망에서 트래픽 양이 증가되면 그에 따른 트래픽 전송비용은 비선형으로 증가[2, 7, 13]되기 때문에 트래픽 양을 반영하는 것이 바람직하다. 따라서 본 연구의 문제는 많은 트래픽을 하나의 서버에서 다수의 클라이언트로 전송하고자하는 인터넷 환경에서의 경로설정에 활용될 가능성이 있다.

2절은 수리모형을 제시하였으며, 이의 최적조건을 '공정나무' 개념으로 표현하였다. 3절은 최적조건에 기초한 알고리즘을 개발하였다. 4절은 수치적용이며 5절은 결론이다.

2. 수리모형 및 최적조건

주어진 네트워크 $G=(V, E)$ 에 대해 노드집합은 V 이고, 무방향 아크집합이 E 이며 근원지 노드는 s 이고 목적지 노드 집합은 $D \subseteq V - \{s\}$ 이다. 점-대-다중점 트래픽 수요는 $d(>0)$ 이다. 아크 i 의 비용함수 $f_i: R \rightarrow R$ 는 연속의 이차 미분가능한 단조증가(monotonically increasing) 콘벡스(strictly convex)이다. P 를 노드 s 에서 노드집합 D 까지의 나무 집합이라고 가정한다. 그리고 나무 $p_j \in P$ 는 나무에 포함되는 아크 집합으로 표현한다. 이제 y_j 를 나무 p_j 의 흐름량이라고 하고, x_i 를 아크 i 를 경유하는 나무 흐름의 합이라고 하면 본 연구에서 고려하는 문제의 수리계획 모형은 $A(P)$ 와 같다:

$$A(P) \text{ Minimize } \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \tag{1}$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^k y_j = d, \quad (2)$$

$$x_i = \sum_{j: i \in p_j} y_j, \quad i=1, \dots, m, \quad (3)$$

$$x_i \geq 0, y_j \geq 0, \quad (4)$$

$$i=1, \dots, m, j=1, \dots, k$$

여기서 $m = |E|$ 이고 $k = |P|$ 이다. $|D| = 1$ 이면 나무는 단선의 경로가 되고, $A(P)$ 는 비선형 최소 비용 흐름문제의 경로흐름 모형화(path flow formulation)가 된다[1]. 이와 같이 k 개의 주어진 나무에 대한 모형 $A(P)$ 는 서론에서 언급한 본 연구의 문제 본질에 어긋나는 것처럼 보인다. 즉, 노드 s 에서 목적지 노드 집합 D 까지의 고려하는 나무를 경로수가 k 뿐인 P 로 국한하는 것처럼 보인다. 그러나 수리모형 $A(P)$ 및 아래에서 제시할 최적조건은 알고리즘 개발을 위한 일시적인 것이다. 우리의 궁극적 관심사는 P 가 노드 s 에서 목적지 노드 집합 D 까지의 모든 나무 집합인 경우이다.

본 연구에서는 열생성기법(column generation approach)[1]에 기초하여 P 가 하나의 나무인 경우부터 시작하여 최소 비용이 보장될 때까지 새로운 나무를 점차 추가하는 해법을 제시한다. 제시하는 알고리즘은 ϵ -최적해로서의 아크해 $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)^T$ 와 나무해 $y^* = (y_1^*, \dots, y_k^*)^T$ 를 함께 구하는 유사 다항식(pseudo-polynomial) 알고리즘이다.

모형 $A(P)$ 의 제약식을 만족하는 아크해 및 나무해 (x^*, y^*) 가 주어졌다고 가정한다.

[정의 2.1] 나무 $p_j \in P$ 의 경로비용을 나무에 한 단위 흐름량을 증가시켰을 때 발생하는 비용의 증가분 즉, 흐름량 y_j 에 대한 한계비용인 $\sum_{i \in p_j} \frac{\partial f_i(x_i^*)}{\partial y_j}$ 로 정의한다. 따라서 $C_j(y^*) = \sum_{i \in p_j} f_i(x_i^*)$ 라고 하면 경로 p_j 의 경로비용은 $\frac{\partial C_j(y^*)}{\partial y_j}$ 가 된다.

[정의 2.2] 다음의 두 조건을 만족하는 (x^*, y^*) 를

ϵ -공정나무라고 정의한다:

(i) $y_j^* > 0$ 인 나무는 모두 동일한 경로비용 $\pi (> 0)$ 를 갖는다.

(ii) $y_j^* = 0$ 인 나무의 경로비용은 $\pi - \epsilon$ 이상이다.

또한 $\epsilon = 0$ 일 때의 ϵ -공정나무를 간단히 공정나무라고 정의한다.

[정의 2.2]에 의한 공정나무는 모형 $A(P)$ 의 최적조건에 다른 표현이기도 하다.

[정리 2.1] 각 아크 i 의 아크비용 함수 f_i 가 단조증가이다. 그러면 $A(P)$ 의 최적해는 공정나무이다.

즉, $\pi \geq 0$ 가 존재하여 $y_j^* > 0$ 인 나무 $p_j \in P$ 에 대해서는 $\frac{\partial C_j(y^*)}{\partial y_j} = \pi$ 가 성립되고, $y_j^* = 0$ 인 나무 $p_j \in P$ 에 대해서는 $\frac{\partial C_j(y^*)}{\partial y_j} \geq \pi$ 가 성립한다.

(증명) 모형 $A(P)$ 에 대한 Karush-Kuhn-Tucker 조건에 의하면 어떤 실수 π 및 $v_i (i=1, \dots, m)$ 에 대해서 다음이 성립한다[3].

$$f_i'(x_i^*) + v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad (5)$$

$$-\pi - \sum_{i \in p_j} v_i \geq 0, \quad j=1, \dots, k, \quad (6)$$

$$x_i^*(f_i'(x_i^*) + v_i) = 0, \quad i=1, \dots, m, \quad (7)$$

$$y_j^*(-\pi - \sum_{i \in p_j} v_i) = 0, \quad j=1, \dots, k \quad (8)$$

여기서 π 는 제약식 (2)의 승수(multiplier)이고, v_i 는 제약식 (3)의 i 번째 식에 대한 승수이다. 식(8)로부터 $y_j^* > 0$ 인 나무 p_j 에 대해

$$-\sum_{i \in p_j} v_i = \pi \quad (9)$$

이 된다. 따라서 $y_j^* > 0$ 인 나무 p_j 위에 있는 모든 아크 $i \in p_j$ 의 흐름량은 $x_i^* > 0$ 이므로 식 (7)으로부터 $f_i'(x_i^*) = -v_i$ 이 된다. 이를 식 (5)에 대입하면

$$\sum_{i \in p_j} f'_i(x_i^*) = \pi \quad (10)$$

이 된다. $x_i > 0$ 범위에서 $f_i(\cdot)$ 는 단조증가이므로 $f'_i(x_i^*) \geq 0$ 이고 따라서 $\pi \geq 0$ 이다. $i \in p_j$ 이면 제약식 (3)로부터 $\partial x_i / \partial y_j = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_j(y^*)}{\partial y_j} &= \sum_{i \in p_j} \frac{\partial f_i(x_i^*)}{\partial y_j} = \sum_{i \in p_j} f'_i(x_i^*) \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \\ &= \sum_{i \in p_j} f'_i(x_i^*) = \pi \end{aligned}$$

이 된다. 또한 모든 나무 p_j 에 대해서는 식 (5) 및 (6)으로부터 다음이 성립된다.

$$\frac{\partial C_j(y^*)}{\partial y_j} = \sum_{i \in p_j} f'_i(x_i^*) = - \sum_{i \in p_j} v_i \geq \pi. \quad \blacksquare$$

3. 공정나무 알고리즘

본 절에서는 공정나무 조건을 이용하여 나무에 기초한 알고리즘을 개발한다. 먼저 m 차원 벡터함수 f' 를 $f'(x) \equiv (f'_1(x_1), \dots, f'_m(x_m))^T$ 로 정의하고 알고리즘 내에서 나무 집합 P 가 주어졌다고 가정한다. 그러면 $m \times k$ 아크-나무 연관행렬(arc-tree incidence matrix) H 가 결정된다. 즉, 아크 i 가 나무 p_j 에 포함되면 $h_{ij} = 1$, 아니면 $h_{ij} = 0$ 이다. 그러면 모형 $A(P)$ 의 제약식 (3)은 다음 식으로 표현된다:

$$x = Hy. \quad (11)$$

또한 나무 p_j 의 경로비용은 $\sum_{i=1}^m h_{ij} \cdot f'_i(x_i)$ 이 된다.

행렬 H 의 j 번째 열 벡터를 h_j 라고 놓으면, [정리 2.1]의 공정나무 조건은 실수 $\pi \geq 0$ 가 존재하여 다음 식이 성립한다:

$$h_j^T f'(x) \geq \pi, \quad y_j = 0 \text{인 나무 } p_j \in P \text{에 대해서 (12)}$$

$$h_j^T f'(x) = \pi, \quad y_j > 0 \text{인 나무 } p_j \in P \text{에 대해서 (13)}$$

이제 $k (= |P|)$ 차원 행벡터 $e = (1, \dots, 1)^T$ 로 놓고, $g(y) \equiv f'(Hy)$ 라고 정의하면, 공정나무를 구하는 문제는 다음의 비선형보완문제(nonlinear complementary problem) $NLCP(P)$ 가 된다:

$NLCP(P)$:

$$\text{Find } y \geq 0, \pi \geq 0 \quad (14)$$

$$\text{subject to } H^T g(y) - \pi e \geq 0, \quad (15)$$

$$e^T y - d \geq 0, \quad (16)$$

$$y^T (H^T g(y) - \pi e) = 0, \quad (17)$$

$$\pi (e^T y - d) = 0 \quad (18)$$

[정리 3.1] 모든 아크 i 에 대해 f_i 가 단조증가이고 콘벡스(strictly convex)일 때, (y, π) 를 $NLCP(P)$ 의 해라고 하면 (Hy, y) 는 나무 집합 P 에 대해 공정나무이다.

(증명) (y, π) 를 $NLCP(P)$ 의 해라고 하면 식 (16)으로부터 $y \neq 0$ 이다. 만일 $e^T y - d > 0$ 이라고 하면 식 (18)에 의해 $\pi = 0$ 이다. $y \neq 0$ 이므로 어떤 $y_j > 0$ 에 대해 식 (17)로부터 $h_j^T g(y) = 0$ 가 된다. 그러나 f_i 가 단조증가이고 콘벡스(strictly convex)이므로 $h_j^T g(y) \geq \sum_{i \in p_j} f'_i(y_i) > 0$ 이 된다. 따라서 $\pi > 0$ 이어야 하고, $e^T y - d = 0$ 이 된다. 이제 $x = Hy$ 라고 놓으면 (x, y) 는 식 (12)와 식 (13)을 만족하므로 공정나무이다. \blacksquare

주어진 나무 집합 P 에 대해서 $NLCP(P)$ 의 해는 P 범위에서는 공정나무이나 모든 가능한 나무 집합에 대해서 공정나무라고 말할 수 없다. 그러나 다음의 보조정리는 P 범위에서의 공정나무가 모든 가능한 나무 집합에 대해서 공정나무인지를 판단할 수 있게 한다.

[정리 3.2] 주어진 나무 집합 P 에 대한 $NLCP(P)$ 의 해 (y^*, π^*) 및 $x^* = Hy^*$ 가 주어졌다. 아

크 i 의 거리를 $f'_i(x'_i)$ 로 하는 네트워크에서 노드 s 및 노드집합 D 를 포함하는 스타이너나무 p^* 에 대해 $\sum_{i \in p} f'_i(x'_i) \geq \pi^*$ 이면 (x^*, y^*) 는 모든 나무에 대해 공정나무이다. 또한 $\sum_{i \in p} f'_i(x'_i) \geq \pi^* - \varepsilon$ 이면 (x^*, y^*) 는 모든 나무에 대해 ε -공정나무이다.

(증명) P 에 포함되지 않았던 모든 나무를 포함시켜 새로운 확장된 나무 집합 P^E 를 만든다. 그러나 스타이너나무 p^* 는 P^E 에서 최소비용의 나무이므로 가정으로부터 (x^*, y^*) 는 확대된 나무 집합 P^E 에 대해 [정의 2.2]의 조건을 만족한다. ■

이제 ε -공정나무를 구하는 알고리즘 3.1을 제시한다. 알고리즘내에서 $Z(x')$ 는 목적함수 $\sum_{i=1}^m f_i(x'_i)$ 를 나타낸다.

알고리즘 3.1 (ε -공정나무를 구하는 알고리즘)
(초기화 과정)

[step 1] 허용오차 $\varepsilon_1 > 0$ 및 $\varepsilon_2 > 0$ 를 선택한다.

[step 2] 아크 i 의 거리를 $f'_i(0)$ 로 하여 나무 p_1 를 구한다. $y^1 = d$ 및 $P = \{p_1\}$ 로 놓고 연관행렬 H 를 구한다.

[step 3] $x^1 = Hy^1$ 및 $\pi^1 = \sum_{i \in p_1} f'_i(x'_i)$ 를 계산한다.

[step 4] $Z(x^0) = +\infty$ 및 $t = 1$ 로 놓는다.

(반복과정)

[step 5] 아크 i 의 거리를 $f'_i(x'_i)$ 로 하여 나무 p_{t+1} 을 구한다.

[step 6] $\sum_{i \in p_{t+1}} f'_i(x'_i) \leq \pi^t - \varepsilon_1$ 이거나 $|Z(x^{t-1}) - Z(x^t)| < \varepsilon_2$ 이면 멈춘다. 현재해 (x^t, y^t) 를 출력한다. 그렇지 않으면, $P = P \cup \{p_{t+1}\}$ 으로 놓고 H 를 수정한다.

[step 7] $NLCP(P)$ 의 해 (x^{t+1}, y^{t+1}) 를 구한다.

[step 8] $t \leftarrow t+1$ 로 놓고 step 5로 간다.

알고리즘 3.1에서 선택되는 나무 p_{t+1} 가 스타이너나무라고 가정하면 다음의 정리가 성립한다. 여기서 나무 p_{t+1} 의 경로비용 $\sum_{i \in p_{t+1}} f'_i(x'_i)$ 을 ξ_{t+1} 로 표현한다.

[정리 3.3] 모든 아크 i 에 대해 f_i 가 볼록 (strictly convex)이고, 반복과정 t 에서 $\xi_{t+1} \leq \pi^t - \varepsilon_1$ 인 스타이너나무 p_{t+1} 가 선택되면 다음이 성립된다:

- (i) $\xi_{t+1} < \pi^{t+1} < \pi^t$
- (ii) $Z(x^{t+1}) < Z(x^t)$

(증명) 먼저 $\xi_{t+1} < \pi^{t+1} < \pi^t$ 됨을 보인다. 반복과정 t 에서 $y_j^t > 0$ 인 나무 $p_j \in P$ 에 대해 $\xi_j(\theta_j) \equiv \frac{\partial C_j(y^t - \theta_j \cdot e_j)}{\partial y_j}$ 라고 놓으면, $\xi_j(\cdot)$ 는 연속이며, 아크 비용함수 f_i 의 볼록성으로부터 단조감소이고 $\xi_j(0) = \pi^t$ 이다. 스타이너나무 p_{k+1} 에 대해서도 $\xi_{t+1}(\theta_{t+1}) \equiv \frac{\partial C_{t+1}(y^t + \theta_{t+1} \cdot e_{t+1})}{\partial y_{t+1}}$ 라고 놓으면, $\xi_{t+1}(\cdot)$ 는 연속이며, 단조증가 함수이고 $\xi_{t+1}(0) = \xi_{t+1} < \pi^k - \varepsilon$ 이다. 여기서 e_j 는 j 번째 요소만 1이고 나머지는 0인 $(t+1)$ 차원 열 벡터이다. 그러면 함수 $\xi_j(\cdot)$ ($y_j^t > 0$) 및 $\xi_{t+1}(\cdot)$ 의 연속성 및 단조성 때문에 $\theta_{t+1} = \sum_{j=1}^t \theta_j$ 이 성립되며 아래의 두 조건을 만족하는 $0 \leq \hat{\theta}_j \leq y_j^t$ ($y_j^t > 0$) 및 $\hat{\theta}_{t+1} > 0$ 이 존재한다:

$$\xi_j(\hat{\theta}_j) = \xi_{t+1}(\hat{\theta}_{t+1}), \quad \hat{\theta}_j < y_j^t \text{인 경우}$$

$$\xi_j(\hat{\theta}_j) > \xi_{t+1}(\hat{\theta}_{t+1}), \quad \hat{\theta}_j = y_j^t \text{인 경우.}$$

$$y_j^{t+1} = y_j^t - \hat{\theta}_j \text{ 이므로 } 0 \leq \hat{\theta}_j < y_j^t \text{ 인 } \hat{\theta}_j(p_j$$

$\in P$)에 대해서는 $y_j^{t+1} > 0$ 이고, $\hat{\theta}_j = y_j^t$ 인 경우에는 $y_j^{t+1} = 0$ 이다. 따라서 $y_j^{t+1} > 0$ 인 $p_j \in P$ 에 대해서 $\xi_j(\hat{\theta}_j) \equiv \pi^{t+1}$ 라고 놓으면

$$\xi_{t+1} < \xi_{t+1}(\hat{\theta}_{t+1}) = \xi_j(\hat{\theta}_j) = \pi^{t+1} < \pi^t$$

이고, $y_j^{t+1} = 0$ 인 $p_j \in P$ 에 대해서는

$$\pi^t = \xi_j(0) > \xi_j(\hat{\theta}_j) > \xi_{t+1}(\hat{\theta}_{t+1}) = \pi^{t+1} > \xi_{t+1}$$

이 성립한다.

다음으로 $Z(x^{t+1}) < Z(x^t)$ 임을 보인다. 모형 $A(P)$ 는 f_i 의 콘벡스성으로부터 x^t 및 x^{t+1} 는 $P = P(t) \equiv \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ 및 $P = P(t+1) \equiv \{p_1, p_2, \dots, p_t, p_{t+1}\}$ 일 때의 2차최적충분조건을 만족한다[3]. 즉, x^t 및 x^{t+1} 는 P 가 $P(t)$ 및 $P(t+1)$ 일 때의 최적해이다. 그런데 $P(t) \subset P(t+1)$ 이므로 $Z(x^{t+1}) \leq Z(x^t)$ 이다. 그러나 반복과정 $(t+1)$ 에서 새로 추가되는 나무 p_{t+1} 의 경로비용 ξ_{t+1} 은 모든 다른 경로의 경로비용 π^t 보다 최소 ϵ_1 만큼은 작으므로 $Z(t+1) = Z(t)$ 가 될 수 없다. ■

알고리즘 3.1에서 선택되는 나무 p_t 가 스타이너 나무라면 알고리즘은 유한 번만에 끝난다.

[정리 3.4] 모든 아크 i 에 대해 f_i 가 콘벡스이고, 알고리즘 3.1에서 선택되는 나무 p_t 가 스타이너 나무라면 알고리즘은 유한 번만에 끝난다. 특히

$\sum_{i \in p_{t+1}} f_i'(x_i^t) \leq \pi^t - \epsilon_1$ 로 멈추게 되어 얻은 해는 ϵ_1 -공정나무이다.

(증명) 알고리즘 3.1은 반복마다 π^t 가 최소 ϵ_1 씩 감소하고 $Z(x^t)$ 는 최소 ϵ_2 씩 감소한다. 나무의 경로비용의 하한값은 $\sum_{i \in p_t} f_i'(0)$ 이고 목적함수값은 비음이므로 최대 반복수는 $\min\{ \lceil \frac{1}{\epsilon_1} \sum_{i \in p_t} (f_i'(d) - f_i'(0)) \rceil, \lceil \frac{Z(x^1)}{\epsilon_2} \rceil \}$ 이다. $\sum_{i \in p_{t+1}} f_i$

$(x_i^t) \leq \pi^t - \epsilon_1$ 로 멈추게 되면 현재해는 보조정리 3.2에 의해 ϵ_1 -공정나무이다. ■

알고리즘 3.1의 구현을 위해 다음의 두 부분이 추가된다. 첫째, 네트워크에서 스타이너나무를 발견하는 부분으로 스타이너나무 문제는 NP-hard이기 때문에 유한 휴리스틱 방법을 적용하게 된다[4, 19]. 우리는 Takahashi and Matsuyama의 방법 [17]을 적용하였다. 그들의 방법은 구현이 쉽고 시간복잡도 $O(qn^2)$ 안에 근사해를 제공해 주며, 이론상 및 계산상으로도 좋다고 평가되기 때문이다 [19]. 여기서 $n = |V|$ 및 $q = |D| + 1$ 이다. 만약 $|D| = 1$ 이면 그들의 방법은 Dijkstra's algorithm 이 된다. 또한 $|D| = n - 1$ 이면, 스타이너나무는 최소신장나무가 되기 때문에 이에 대한 효율적인 알고리즘 들은 잘 알려져 있다[1].

다음으로 알고리즘 3.1의 구현을 위해서는 허용하는 오차 내에서 $NLCP(P)$ 의 해를 유한번만에 구해야 한다. 이를 위해 선형근사화법(linear approximation method)[12]을 적용하며아크비용 함수는 2차함수 $f_i(x_i) \approx \frac{1}{2} a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$ 로 근사화한다. 그러면 나무 p_j 의 경로비용은 $\sum_{i=1}^m h_{ij}(a_i x_i + b_i)$ 이 된다. $A = \text{diag}(a_i)$ 및 $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ 로 놓으면 $NLCP(P)$ 의 선형 근사화 문제는 다음의 선형보완문제가 된다:

$$\text{Find } y \geq 0, \pi \geq 0 \tag{19}$$

$$\text{subject to } H^T A H y + H^T b - \pi e \geq 0, \tag{20}$$

$$e^T y - d \geq 0, \tag{21}$$

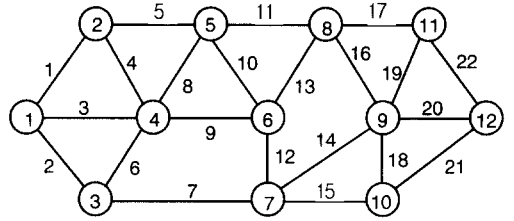
$$y^T (H^T A H y + H^T b - \pi e) = 0, \tag{22}$$

$$\pi (e^T y - d) = 0. \tag{23}$$

비용함수 f_i 의 콘벡스성(strict convexity)로부터 $H^T A H$ 가 positive definite가 되고 $\pi > 0$ 로부터 선형보완문제의 유한 수렴성(finite convergence)과 선형근사화법의 전체 수렴성(global convergence)이 보장된다[3, 12].

4. 수치적용

본 절에서는 공정나무 알고리즘의 적용 예를 보인다. 네트워크, 근원지 및 목적지 노드 집합, 아크 비용함수를 조합하여 총 12가지 실험에 대해 공정나무 알고리즘을 적용하였다. 이에 대한 구체적인 내용은 <표 1>과 같다. [그림 2] 및 [그림 3]은 적용 네트워크이다.

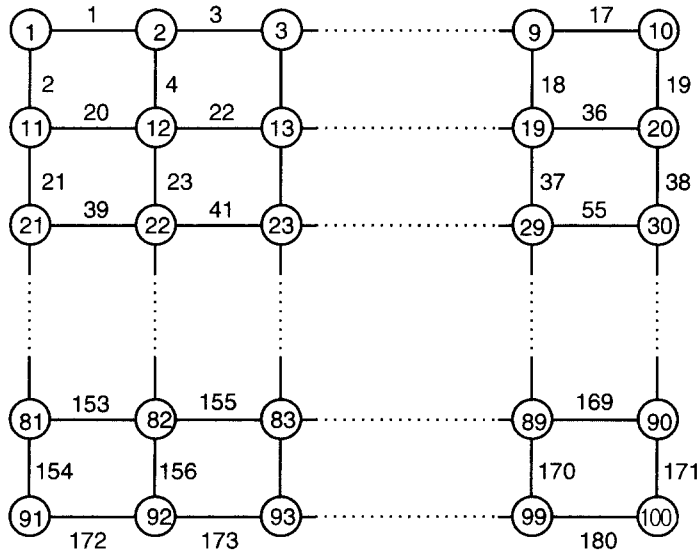


[그림 2] Network I (노드수 12개, 아크수 22개)

먼저 목적지 노드가 1개인 실험들에 대해 알고

<표 1> 실험방법

실험번호	근원지 노드번호	목적지 노드번호	수요	적용 Network	아크 i 의 비용함수 함수형태	아크 i 의 비용함수 계수
1	1	12	8	I	$a_i x_i^2 + b_i x_i$ ($x_i \geq 0$)	$a_i = 1 + \text{mod}(\text{아크번호}, 5)$ $b_i = 1 + \text{mod}(\text{아크번호}, 3)$
2	3	11	7			
3	2	3, 7, 12	10			
4	3	2, 8, 10	10			
5	1	12	8	I	$\frac{x_i}{c_i - x_i}$ ($0 \leq x_i < c_i$)	$c_i = 10 + \text{mod}(\text{아크번호}, 3)$
6	2	10	7			
7	1	6, 10, 11	8			
8	5	1, 7, 12	8			
9	2	99	15	II	$e^{\frac{x_i}{c_i}} - 1$ ($x_i \geq 0$)	$c_i = 1 + \text{mod}(\text{아크번호}, 5)$
10	5	95	10			
11	1	10, 55, 91, 100	15			
12	5	21, 30, 81, 90, 95	15			



[그림 3] Network II (노드수 100개, 아크수 180개)

리즘 3.1과 GAMS/MINOS를 비교하였다. <표 2>는 실험결과로서 알고리즘 3.1은 GAMS/MINOS와 같은 목적함수 값을 제공하였으며 ϵ_1 -공정나무해를 제공하였다. 표에서 5번째 열의 내부 반복수란 선형보완문제의 반복수를 의미하고, 7번째 열의 목적함수 값은 문제를 아크흐름 모형(arc flow formulation)으로 바꾸어서 GAMS/MINOS를 적용한 결과이다.

다음의 실험은 목적지 노드 수가 3개, 4개 또는 5개인 경우이다. 실험 결과는 <표 3>과 같으며 수요분할을 허용하는 경우와 허용하지 않는 경우의 목적함수를 비교하였다. 모든 경우 알고리즘 3.1은 ϵ_1 -공정나무해를 제공하였다. 표에서 6번째 및 7번째 열은 각각 수요 분할을 허용하는 경우와 수요 분할을 허용하지 않는 경우의 목적함수 값으로 모든 실험에서 수요 분할은 목적함수 값을 개선시켰다. 복수개의 목적지 노드를 갖는 경우, 문제를 아크흐름 모형으로 바꾸어 GAMS/MINOS의 결과와 비교해 보지 못한 것은 분기 노드에서 단일 목적지 경우와는 달리 흐름보전 등식(flow conservation equations)이 성립되지 않기 때문이다. 단순히 나

무를 결정하는 모형이라면 스타이너나무 모형에서처럼 정수계획모형이 가능하나, 본 연구에서와 같이 흐름량이 고려되고 분기노드에서 흐름량이 복사되는 것을 표현하는 아크흐름모형의 모형화 기법은 아직 알려져 있지 않다.

[그림 4]은 실험 1에 대해서 알고리즘 3.1의 수렴 과정을 보여준다. 매 반복과정마다 모든 나무에 대해 동일한 비용이 되게끔 트래픽이 분할된 후의 경로비용 π' (실선 phi)와 새로운 나무 p_{k+1} 의 경로비용 ξ_{k+1} (실선 비용)를 플로팅하였다. [정리 3.3]의 π' , ξ_{k+1} 및 π^{k+1} 에 대한 대소 관계를 확인할 수 있었다. π^* (점선 phi)는 π' 의 수렴 값으로서 60.1661이다.

[그림 5]는 실험번호 12에 대한 알고리즘 3.1의 반복별 수행시간을 나타낸다. 수행시간은 초 단위로 계산되었으며 워크스테이션 HP9000에서 수행한 알고리즘의 전체 수행시간은 146초이었다. 반복별 수행시간의 대부분은 스타이너나무의 발견과 비선형보완문제의 해를 발견하는 데 걸리는 시간이었다. 스타이너나무의 발견은 전체 네트워크의

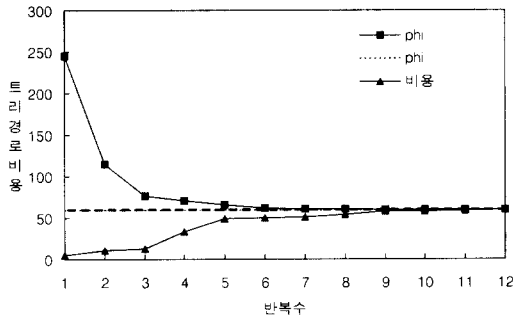
<표 2> 목적지 노드가 1개인 경우의 실험결과

실험 번호	나무 경로수	π 값	반복수	내부 반복수	목적함수값 (알고리즘 3.1)	목적함수값 (GAMS/MINOS)
1	10	60.1661	12	26	281.182	281.182
2	11	54.7545	12	26	220.941	220.941
5	7	0.6928	7	31	4.200	4.200
6	6	0.6452	6	27	3.431	3.431
9	59	15.8347	70	195	144.699	144.699
10	29	9.5043	33	99	63.757	63.757

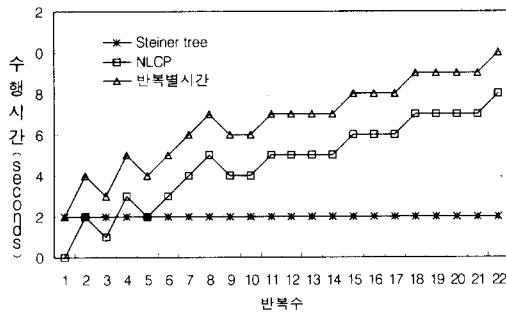
<표 3> 목적지 노드 수가 복수개인 경우의 실험결과

실험 번호	나무 경로수	π 값	반복수	내부 반복수	목적함수값 (A) (분할 허용한 경우)	목적함수값 (B) (분할허용 않는 경우)	$\frac{A}{B}$
3	8	117.8043	9	20	649.061	1190.000	0.545
4	8	118.6127	10	22	657.897	1340.000	0.491
7	5	1.1816	5	27	6.630	18.000	0.368
8	9	1.1120	10	43	6.340	13.333	0.476
11	23	141.4123	29	108	632.590	6254.385	0.101
12	22	47.2508	29	117	337.553	3021.519	0.112

크기가 변하지 않기 때문에 반복별로 일정하고, 비선형보완문제는 반복별로 결정변수가 증가하기 때문에 기울기는 완만하나마 수행시간이 증가됨을 보인다.



[그림 4] 실험 1의 반복수에 따른 나무 비용의 수렴



[그림 5] 실험 12의 반복별 수행시간 구성

5. 결론

본 연구에서는 콘벡스 비용함수를 갖는 점-대-다중점 최소비용 흐름문제의 해법을 개발하였다. 비용함수의 단조증가 및 콘벡스 조건하에서 공정 나무에 기초한 유한 알고리즘을 제시하였다. 알고리즘의 각 단계는 스타이너나무 문제 및 비선형보완문제를 풀기 위해 Takahashi & Matsuyama[17] 휴리스틱 방법 및 선형근사화법[12]을 적용하였다. 상당한 규모의 네트워크에서 다양한 수치 예에 적용한 결과는 고무적이었다. 특히 목적지 노드가 하나인 문제들에 대해서는 GAMS/MINOS가 제공하는 최적해와 비교할 때, 제시한 알고리즘이 동일한

목적함수 값을 제공함을 확인하였다.

본 연구에서 제안한 문제와 해법은 서론에서 밝힌바와 같이 IP망에서의 멀티캐스트 트래픽의 경로설정에 응용될 수 있다고 본다. 그러나 IP망 외의 통신망에서도 많은 트래픽을 동시에 여러 지점으로 전송하여야 하는 경우에 본 연구 결과의 적용을 고려할 수 있다. 그러나 IP망을 포함하여 개별 통신망에서 본 연구 결과를 적용하기 위해서는 통신망의 통신 특성을 반영하여야 하기 때문에, 본 연구의 점-대-다중점 멀티캐스팅이 어떻게 구현될 수 있는지를 구체적으로 적용하는 추후 연구가 요구된다.

참고 문헌

- [1] Ahuja, R.K., T.L. Magnanti, J.B. Orlin, *Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, 1993.
- [2] Ammar, M.K., S.Y. Cheung, C.M. Scoglio, "Routing multipoint connections using virtual paths in an ATM networks", *IEEE INFOCOM '93*, pp.98-105, 1993.
- [3] Bazaraa, M.S., H.D. Sherali, C.M. Shetty, *Nonlinear programming : Theory and Algorithms*, Wiley, 1993.
- [4] Garey, M.R, D.S. Johnson, *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freedman and Company, 1979.
- [5] Huitema, C., *Routing in the Internet*, Prentice Hall, 1995.
- [6] Hwang, F.K., D.S. Richards and P. Winter, "The Steiner tree problem", *Annals of Discrete Mathematics* 53, Elsevier Science Publishers B.V., 1992.
- [7] Kim, S.B., "An optimal VP-based multicast routing in ATM networks", *IEEE INFOCOM '96*, pp.1302-1309, 1996.
- [8] Kleinrock, L., *Queueing Systems Volume II*, Wiley, 1976.

- [9] Kompella, V.P., J.C. Pasquale, G.C. Polyzos, "Multicast routing for multimedia communication", *IEEE/ACM Transaction on Networking*, Vol.1, No.3(1993), pp.286-292.
- [10] Kosiur, D., *IP Multicasting*, Wiley, 1998.
- [11] Leung, Y.-W., B.-T Yang, "Lower bound for multimedia multicast routing", *IEE Proc.-Comm.*, Vol.145, No.2(1998), pp.87-90.
- [12] Pang, J.S. and D. Chan, "Iterative methods for variational and complementary problems", *Mathematical Programming* 24, pp.284-313, 1982.
- [13] Park, K., Y.-S. Shin, "Iterative bundle-based decomposition for large-scale nonseparable convex optimization", *European Journal of Operational Research* 111, pp.598-616, 1998.
- [14] Parsa, M., Q. Zhu, J.J. Garcia-Luna-Aceves, "An iterative algorithm for delay-constrained minimum-cost multicasting", *IEEE/ACM Transaction on Networking*, Vol.6, No.4 (1998).
- [15] Rouskas, G.N., I. Baldine, "Multicast routing with end-to-end delay and delay variation constraints", *IEEE INFOCOM '96*, pp.353-360, 1996.
- [16] Schwartz, M., *Telecommunication Networks : Protocols, Modeling and Analysis*, Addison-Wesley, 1987.
- [17] Takahashi, H., A. Matsuyama, "An approximation solution for the Steiner problem in graphs", *Math. Japonica* 24, pp. 573-577, 1980.
- [18] Waxman, B.M., "Routing of multipoint connections", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 6, pp.1617-1622, 1988.
- [19] Winter, P., "Steiner problem in networks : A survey", *Networks* 17, pp.129-167, 1987.