經營科學
第17卷 第2號
2000年 11月

단체법에서 효과적인 초기기저의 설정*

임성묵** · 김기태*** · 박순달**

On the Construction of Initial Basis in the Simplex Method*

Sung-Mook Lim** · Ki-Tae Kim*** · Soon-Dal Park**

Abstract

In this research, we compare and anlyze the two initial basis construction procedures : LPAKO's procedure proposed by Seo et. al. and symbolic crash procedure proposed by Maros et. al.. Based on the analysis, we present a new procedure which complements the previous procedures. The new procedure shows superiority to the previous procedures with respect to the optimality of initial basis. Also, the initial basis constructed by the new procedure reduces the number of simplex iterations.

1. 서 론

선형계획법(Linear Programming)은 경영과학(Operations Research)의 한 수리 모형으로서 다양한 응용 분야를 가지고 있어 그 중요성이 높다[2]. 선형계획법에 대한 해법은 1940년대 G. B. Dantzig에 의해 개발된 단체법이 대표적이며 1980년대 중반까지는 유일한 해법이었다고 해도 과언이 아니다. 단체법이 개발된 이 후 많은 연구자들에 의해 단체법의 실용적인 구현과 개선이 이루어져서, 단체법은 현재까지 선형계획법을 푸는 실용적인 해법으로서 그 자리를 굳히게 되었다.

단체법의 성능은 크게 선회요소(Pivot Element)의 선택, 기저역행렬의 계산 및 유지 방법, 초기기저의 선택 방법, 국면 1문제의 구성 방법, 컴퓨터 특성을 활용하는 프로그래밍 등에 의해 좌우된다고 할 수 있다. 선회요소의 선택이라함은 진입변수 및 탈락변수 선택을 의미하는데, 단체법의 반복회수를 결정짓는 요소라고 할 수 있는데, 이에 대해서는 Forrest와 Goldfarb의 연구가 대표적이다. 최

* 본 연구는 한국과학재단의 특정기초연구과제(과제번호 98-0200-07-01-2)의 지원을 받았음
** 서울대학교 산업공학과
*** 삼성 SDS

근의 대형 단체법 프로그램들은 거의 대부분 상하분해형을 사용하여 기저역행렬을 계산, 유지한다. Suhl 등은 기저행렬에 대한 상하분해의 효율적 구현방법과 Forrest-Tomlin방법을 수정한 상하분해 요소 수정방법을 제안한 바 있다. 한편, 국면 1문제를 구성하는 방법으로는 비가능성의 총량을 최소화하는 문제로 국면 1문제를 구성하는 Wolfe의 방법이 주로 사용되고 있다. 컴퓨터 특성을 활용하는 단체법 프로그램의 구현방법은 널리 발표된 바는 없지만, 국내에서는 박찬규 등에 의해 연구가 수행된 바 있다. 이러한 단체법의 성능향상을 위한 여러 가지 방법들에 비해 상대적으로 초기기저의 효과적인 설정에 관한 연구는 다양하게 발표되지 못하였다.

일반한계 선형계획 문제의 표준형은 다음과 같은 형태를 갖는다[1].

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{ll} min & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t. & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u} \end{array}
$$

(A: $m \times n$ 행렬, $\boldsymbol{b}$: m차원 벡터, $\boldsymbol{c}$: n차원 벡터)

주어진 문제의 제약식들을 (P)와 같은 표준형으로 변환하기 위해서는 부등식 형태의 제약식을 등식형태로 변환하여야 하는데, 이를 위해 첨가되는 여유, 잉여, 인공변수들을 논리변수(Logical Variable)라고 부르고, 그외의 변수를 구조변수(Structural Variable)라고 부르는데, 전통적인 단체법에서는 논리변수를 사용하여 초기기저를 구성한다. 이 경우 쉽게 초기기저를 구성할 수는 있으나, 많은 인공변수가 도입된다는 단점이 있다. 인공변수가 존재하면 인공변수를 탈락시키기 위해 단체법의 한 회(Iteration)가 사용되어야 하므로, 인공변수를 적게 사용하는 것이 수행 횟수와 수행 시간을 줄이는 데 바람직하다. 초기기저에서 논리변수의 비중을 줄이고 구조변수를 되도록 많이 첨가시키기 위한 취지에서, Carstens는 crash 방법을 개발하였다. Crash 방법은 삼각행렬 형태의 기저행렬을 구성하는 방법으로, 수치적 분해를 거치지 않고 상징적(symbolic)인 선회연산을 통해 삼각기저를 구성한다. 상징적인 연산만을 사용하므로 crash 방법은 적은 비용으로 구조변수가 많이 포함되는 초기기저를 구성할 수 있게 하여 많은 단체법 프로그램에서 사용되었다.

최근의 초기기저의 설정에 관한 대표적인 연구로는 Bixby의 연구[5], Maros 등의 연구[7], 서용원 등의 연구[4]가 있다. Bixy는 희소도 보다는 변수가 가지는 한계의 범위와 목적함수 계수를 고려하는 벌금함수를 도입하여 초기기저열을 선택하는 기준으로 삼았다. 그는 NETLIB[8]문제들에 대해 자신의 방법을 실험하여 우수함을 보였다. 한편 Maros는 Carstens에 의해 제안된 전통적인 삼각행렬 형태의 기저 구성방법을 확장하였고, 자신의 방법이 Bixby의 방법에 비해 우월함을 실험을 통해 보였다. 서용원 등은 초기기저의 희소도를 중요한 요소로 판단하여, 여유, 잉여변수를 우선적으로 초기기저에 포함시키고, 선형독립성을 판단하는 상징적 방법을 사용하여 구조변수를 초기기저에 포함시켰다.

인공변수의 도입을 억제하는 초기기저 구성방법에서 고려되는 사항으로는 일차독립열의 판정방법, 기저의 희소성, 기저의 최적성등이다. 인공변수를 활용하는 기저구성방법에서는 인공변수열이 단위벡터임을 활용하여 쉽게 일차독립열을 판별할 수 있지만, 구조변수열을 초기기저 구성에 사용하게 되면 기저구성요건인 일차독립성을 쉽게 판별할 수 없게 되므로 효과적인 일차독립성 판별 방법의 개발이 필요하게 된다. 또한, 인공변수를 활용한 단위행렬 초기기저는 매우 희소도가 높다는 장점을 가지는 반면, 구조변수에서 초기기저를 구성하려는 시도는 초기기저의 희소도를 나쁘게 만들 우려가 있으므로 초기기저의 희소성을 고려하는 기저 구성방법이 필요하게 된다. 초기기저의 최적성이라는 것은 초기기저가 얼마나 최적기저에 가까운지를 의미한다. 초기기저가 최적기저에 가까울수록 단체법의 반복회수는 줄어들 가능성이 크다고 할 수 있다.

본 연구에서는 서용원 등의 연구와 Maros의 연구를 바탕으로 그 장·단점을 분석하여 새로운 초기기저 구성방법을 제안한다. 서용원 등의 연구내용은 서울대학교 산업공학과 경영과학 연구실의 박순달 교수에 의해 개발된 단체법 프로그램, LPAKO [3]에 구현되었으므로 LPAKO의 초기기저 설정방법이라고 칭하겠다.

2. LPAKO의 초기기저 설정

LPAKO에서는 초기기저의 희소도(Sparsity)를 가장 중요한 요소로 고려한다. 이는 초기기저의 희소도가 단체법 초기의 수행속도에 큰 영향을 미친다는 관찰을 바탕으로 한다. LPAKO에서는 여유, 잉여변수를 우선적으로 초기기저에 포함시키는데, 이것은 여유, 잉여변수열이 단위벡터로서 가지는 희소성(Sparsity)를 활용하기 위해서이다. 모든 여유, 잉여변수를 초기기저에 포함시킨 후, 나머지 기저변수를 찾기위해 구조변수들을 조사한다. 즉, 인공변수의 사용을 억제하기 위해 구조변수를 최대한 많이 초기기저에 포함시키려고 한다. 구조변수를 초기기저에 도입하기 위해서는 현재의 기저열과의 독립성을 판별하여야 하는데, 이를 위해 상징적 방법인 비중복 비영요소법을 사용한다. 구조변수의 선택 우선 순위는 열의 희소도를 가장 중요하게 생각하는데, 이는 초기기저의 희소도를 높이기 위함이다. LPAKO의 방법을 자세히 살펴보면 다음과 같다.

구조변수의 사용

LPAKO에서는 여유, 잉여변수를 우선적으로 초기기저에 포함시킨다. 여유, 잉여변수만으로 초기기저가 구성되지 못할 때에는 인공변수의 도입을 억제하기 위해 구조변수열에서 초기기저열을 선택한다. 즉, 구조변수열들을 모두 검색하여 현재까지 선택된 기저열들과 일차독립성을 판별하여 초기기저에 삽입한다. 이 때, 구조변수열의 검색 순서가 초기기저의 질을 결정하는데 큰 영향을 미치게 된다.

LPAKO에서는 초기기저를 희소하게 유지하여 수행 시간을 줄이기 위해 구조변수를 희소도 순서로 사용하는 방법을 채택하고 있다. 즉, 단일요소열(Singleton Column)을 최우선으로 사용하고 이후 비영요소가 2개, 3개…인 구조변수열을 비영요소 갯수의 오름차순으로 사용한다. 동일한 비영요소를 가지는 열들이 생기는 경우 상·하한의 폭이 넓은 변수를 우선적으로 사용한다. 이것은 상·하한의 폭이 넓을수록 기저에서 탈락되지 않고 최적기저에 남아있을 확률이 크다고 보기 때문이다. 상·하한의 폭까지 같게 되는 경우가 발생하면 목적함수의 계수를 참조하여, 최소화 문제의 경우 목적함수 계수의 값이 적은 변수를 우선적으로 사용한다. 최대화 문제이거나 변수의 상하한이 음의 범위에 있는 경우는 반대가 된다. 이것의 의미는 자명하다. LPAKO에서 취하는 구조변수 선택 순서는 다음과 같은 벌금함수(Penalty function)을 정의함으로써 명료하게 서술할 수 있다. 각 구조변수 x_j에 대해 다음과 같은 벌금함수 p를 정의한다.

$$p(x_j) = \tau_j M^2 + \frac{1}{u_j - l_j} M + S_z S_b c_j$$

τ_j : j열의 비영요소 개수
u_j : x_j의 상한
l_j : x_j의 하한
c_j : j열의 목적함수 계수
S_z : 목적함수의 형태에 따라, 최대한 문제이면 -1, 최소화문제이면 1

$$S_b : \begin{cases} sign(u_j), & |u_j| \geq |l_j| \\ sign(l_j), & |u_j| < |l_j| \end{cases}$$

M : 큰 수

여기서 $p(x_j)$를 구하여 이 값의 오름차순으로 구조변수를 정렬한 순서를 구조변수 선택의 순서로 사용한다. $p(x_j)$의 첫번째 항은 희소도에 대한 고려, 두번째 항은 상·하한의 폭에 대한 고려이고, 마지막 항은 목적함수 계수의 값에 대한 고려이다.

일차독립열의 판별

앞에서 설명한 방법대로 구조변수열들을 검색할 때, 이미 선택되어진 열들과의 일차독립성을 판별하는 방법으로 LPAKO는 비중복 비영요소법을 사용한다. 비중복 비영요소법은 다음과 같은 [성질 1]을 바탕으로 한다. 우선, $A_{.i}$는 행렬 A의 i번째

열을 의미한다.

[성질 1] $A_{rs}=0, A_{rt}\neq 0$ 인 r이 존재하면 $A_{\cdot s}, A_{\cdot t}$는 일차독립이다.

이는 $A_{\cdot s}, A_{\cdot t}$의 일차결합(Linear Combination)[9]으로 r번째 행에 0을 만들어내기 위해서는 계수가 모두 0일 수 밖에 없다는 사실로부터 자명하다.

[성질 2] $k>1$일 때 $k-1$개의 열 $A_{\cdot j_1}, A_{\cdot j_2}, \cdots, A_{\cdot j_{k-1}}$이 일차독립이라고 하자. 여기서 $A_{rj_1}=A_{rj_2}=\cdots=A_{rj_{k-1}}=0$이고 $A_{rj_k}\neq 0$인 r이 존재하면 k개의 열 $A_{\cdot j_1}, A_{\cdot j_2}, \cdots, A_{\cdot j_{k-1}}, A_{\cdot j_k}$는 일차독립이다.

[증명] 가정에서 $A_{\cdot j_1}, A_{\cdot j_2}, \cdots, A_{\cdot j_{k-1}}$이 일차독립이라고 하였으므로, r행에 0을 만들어낼 수 있는 일차결합은 계수가 모두 0인 경우 뿐이다. 그런데, $A_{rj_k}\neq 0$이므로 $A_{\cdot j_1}, A_{\cdot j_2}, \cdots, A_{\cdot j_{k-1}}, A_{\cdot j_k}$의 일차결합으로 r행에 0을 만들어내기 위해서는 계수가 모두 0일 수 밖에 없다.

이러한 성질을 이용하면 비영요소의 값에 대한 고려 없이 비영요소의 위치만으로 일차독립이기 위한 충분조건을 제시할 수 있다. 이 방법은 이전에 초기기저로 선택된 구조변수열과 비교하여 비영요소의 행의 위치가 겹치지 않는 비영요소의 존재 여부로 일차독립성을 판별한다.

3. Maros의 초기기저 설정방법

Maros는 최근에 새로운 초기기저 구성방법에 관한 논문을 발표하였는데, 기존의 crash 방법을 확장한 것이었다. 즉, 구조변수열을 우선 고려대상으로 하여 삼각행렬 형태의 기저를 구성한 후 기저가 완전히 구성되지 못했을 때에는 여유, 잉여, 인공변수를 첨가하는 방식을 취하고 있다. Maros의 방법이 가지는 기본 아이디어는 구조변수열들이 최적기저에 남아있을 확률이 높다는 것과, 초기기저로 삼각행렬형태를 설정하게 되면 해법 초기의 단체법 수행속도가 향상될 것이라는 것이다.

Maros의 방법에서는 구조변수열에서 삼각행렬 형태의 기저를 구성하는데, 인공변수의 도입을 억제하기 하기 위하여 구조변수열에서 최대한 많은 기저변수를 찾아내기를 원한다. 이를 위하여 초기기저 구성과정에서 행렬 A에 대해 각 행과, 열의 비영요소 수를 유지한다. 이를 각각 R_i, C_j라고 하자. 즉, R_i는 A의 i행에 들어있는 비영요소의 수이고, C_j는 j열에 들어있는 비영요소의 수이다. 만일 하삼각행렬 형태의 기저를 구성한다고 하면, 기저행렬의 각 대각요소는 자신의 오른쪽 열에는 비영요소를 가지지 않아야 한다. 그러므로, 첫 번째 대각요소를 선택하기 위해 $R_i=min_k\{R_k\}$를 만족하는 행 i를 선택한다. 그런 후 행 i에 비영요소를 가지는 열 중에서 가장 비영요소가 작은 열 j을 선택하여 기저에 포함시킨다. 즉, 하삼각 기저에서 (i,j)가 첫 번째 선회점이 되는 것이다. 그리고, 행 i에 비영요소를 가지는 모든 열을 행렬 A에서 삭제한다. 이것은 이후의 기저설정 과정에서 하삼각기저형태가 유지될 수 있도록 하기 위해서이다. 마지막으로 행 i와 열 j를 제거한 행렬 A에 대해 새로이 R_i와 C_j를 계산한다. 이러한 선회점 선택과정을 고려대상이 되는 행과 열이 없어질 때까지 반복한다. 물론, 구조변수열에서 더 이상 기저를 찾아낼 수 없을 때에는 여유 · 잉여변수가 다음의 고려대상이 되고, 마지막으로 인공변수가 도입되어 초기기저를 완성하게 된다.

Maros의 기저설정 방법을 살펴보게 되면 비영요소의 수가 가장 작은 행과 열을 계속해서 찾게 되는데, 이 때 동일한 비영요소 수를 가지는 행과 열이 여러 개 발생할 수 있다. 이러한 경우가 발생하였을 때에는 상하한 폭이 작은 변수는 최적기저에 포함될 가능성이 작다는 것을 이용한 선택전략이 사용된다. 행 선택과정에서 동일한 비영요소 수를 가지는 행들이 발견되었을 때에는 등식 형태의 제약식이 가장 큰 우선순위를 가지는데, 이것은 등식

형태의 제약식에서 기저가 선정되지 못했을 때에는 인공변수가 도입되게 되고, 인공변수의 경우 상하한의 폭이 영이므로 최적기저에 포함될 가능성이 작기 때문이다. 이러한 개념을 바탕으로 행 선택과정에서 사용될 수 있는 우선순위는 <표 1>와 같다.

〈표 1〉 제약식의 우선순위

제약식 형태	우선순위
등식	3
영역제약식	2
≤ , ≥	1
자유행	0

열 선택과정에서 동일한 비영요소 수를 가지는 열들이 발견되었을 때에는 상하한 폭이 큰 변수열이 가장 큰 우선순위를 가진다. 즉, 상하한 폭이 클수록 최적기저에 남아있을 가능성이 크다. 열 선택과정에서 비영요소 수와 함께 사용될 수 있는 열 우선순위는 <표 2>와 같다.

〈표 2〉 변수의 우선순위

변수 형태	우선순위
고정변수	0
상·하한이 유한	1
상한이나 하한의 한쪽만 무한	2
자유변수	3

4. 새로운 초기기저 설정방법

LPAKO의 초기기저 설정이나, Maros의 초기기저 설정방법은 모두 빠른 기저구성방법이고, 전통적인 초기기저 설정방법에 비해 단체법 반복회수 측면에서 아주 큰 효과를 보이고 있다. 그러나, 두 가지 방법을 비교해 볼 때, 문제의 특성에 따라 그 효과가 달라서 어느 것이 더 우수하다고 할 수 없었다. 따라서, 우리는 두가지 방법이 가지는 기본 아이디어를 바탕으로 그 장점을 취하는 새로운 초기기저 설정방법을 구상하게 되었다.

LPAKO의 초기기저 구성방법과, Maros가 제안한 방법의 가장 큰 차이점은 초기기저 구성시 고려되는 변수의 우선순위이다. 즉, LPAKO의 경우, 여유·잉여 변수를 최우선 순위로 고려하여 초기기저에 포함시키는 반면, Maros의 방법에서는 구조변수열에서 삼각행렬 형태의 기저행렬을 구성한 후에 나머지 기저변수로 여유·잉여변수를 고려한다.

Maros의 방법에 가지는 기본 아이디어는 구조변수가 최적기저에 남아있을 확률이 높다는 것인데, 본 연구의 실험 결과에 의하면 여유·잉여변수가 최적기저에 남아있을 확률이 구조변수가 최적기저에 남았을 확률에 뒤지지 않았다. 다음 <표 3>은 전체 여유·잉여변수 중에서 최적기저에 포함

〈표 3〉 최적기지에 남아있는 여유·잉여변수

문제	M	N	TS	OS	R	문제	M	N	TS	OS	R
25fv47	821	2392	821	171	21	maros	846	2289	846	243	29
80bau3b	2262	12061	2262	137	6	maros-r7	3136	12544	3136	0	0
bnl2	2324	5813	2324	861	37	nesm	662	3585	662	110	17
cycle	1903	4760	1903	775	41	pilot	1441	5093	1441	101	7
czprob	929	4452	929	24	3	pilot87	2030	6913	158	2030	8
d6cubc	415	6599	415	11	3	pilotnov	975	3147	975	203	21
degen3	1503	3321	385	1503	26	scsd8	397	3147	397	0	0
dfl001	6071	18301	6071	132	2	sctap3	1480	3960	1480	532	36
fit1d	24	1050	12	24	50	ship08l	778	5061	778	114	15
fit1p	627	2304	627	0	0	ship12l	1151	6578	1151	149	13
fit2d	25	10525	25	5	20	ship12s	1151	3914	1151	141	12
fit2p	3000	16525	3000	0	0	stocfor3	16675	32370	16675	4700	28
greenbea	2392	7797	2392	145	6	truss	1000	9806	1000	0	0
greenbeb	2392	7797	2392	133	6	wood1p	244	2838	244	1	0

(단, M : 제약식의 개수, N : 변수의 개수, TS : 전체 여유, 잉여변수 개수, OS : 최적기저에 남아 있는 여유, 잉여변수 개수, R : $\frac{OS}{TS} \times 100$)

되는 것의 비율을 Netlib. 문제에 대해 실험한 것이다. 이 실험은 LPAKO를 통해서 이루어졌다.

위의 실험결과를 통해 볼 때, 여유, 잉여변수가 최적기저에 남아있는 비율은 최소 0%에서 최대 50%까지 고르게 분포되어 있음을 알 수 있어, 그 비율이 적다고 말할 수 없다. 즉, 구조변수를 여유 · 잉여변수보다 먼저 고려할 이유가 없다는 것을 알 수 있다.

이러한 관찰을 바탕으로 본 연구에서는 Maros의 방법을 수정하여 새로운 초기기저 구성방법을 제안한다. 즉, 최적기저에 포함될 가능성이 큰 여유 · 잉여변수를 먼저 초기기저에 포함시키고, 나머지 기저를 Maros의 방법대로 구조변수열에서 찾는 방법이다. 이 방법은 LPAKO의 방법과 Maros의 방법이 가지는 장점을 취하고, 구조변수를 택할 때 새로운 선택방법이 적용된 방법이다.

여유 · 잉여변수중에서 최적기저에 포함될 가능성이 큰 것을 찾는 방법은 최적조건을 사용하는 Sherali 등의 연구[6]를 바탕으로 한다. 다음과 같은 형태의 문제를 고려하자.

$$\begin{aligned} max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t. \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \ \ (A: m \times n) \\ & \boldsymbol{x} \ge 0 \end{aligned}$$

위 문제는 $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$라는 m개의 초평면과, $-\boldsymbol{x} \le 0$라는 n개의 초평면으로 그 가능해 영역이 결정되어지는데, 최적조건(KKT 조건)에 의하면 $m+n$개의 초평면 중에서 최적기저해에서 속박적인 초평면들의 법선벡터들을 이용한 볼록집합으로 $\boldsymbol{c}$가 표현되어질 수 있다. 이러한 최적조건을 볼 때, 최적기저해에서 속박적인 제약식의 법선벡터는 목적함수 계수 $\boldsymbol{c}$와 예각을 이룰 것이라고 예측할 수 있다. 제약식 $A_i\boldsymbol{x} \le b_i$의 법선벡터 A_i와 $\boldsymbol{c}$와의 각도는 다음과 같이 계산되어질 수 있다.

$$\theta_i = \cos^{-1}\left(\frac{A_i \boldsymbol{c}}{\|A_i\| \|\boldsymbol{c}\|}\right)$$

즉, θ_i가 작을수록 제약식 $A_i\boldsymbol{x} \le b_i$이 최적기저해에서 속박적일 가능성이 크고, 결국 여유변수 s_i가 비기저일 가능성이 커지게 되는 것이다. 반대로 말하면, θ_i가 클수록 여유변수 s_i가 최적기저가 될 가능성이 있는 것이다.

이와 같은 관찰을 바탕으로 초기기저 구성시 먼저 고려될 수 있는 여유 · 잉여변수를 선택할 수 있다. 새로운 초기기저 구성방법에서는 위와 같은 계산을 통해 최적기저에 남아있을 가능성이 큰 여유 · 잉여변수를 먼저 초기기저에 포함시킨 후, Maros의 방법을 적용하여 초기기저를 완성한다.

새로운 초기기저 B의 구성방법은 다음과 같은 절차를 따른다.

단계 0 : $B = \phi$

단계 1 : 모든 부등식 형태의 제약식에 대해 θ_i를 구한다.

단계 2 : 여유 · 잉여변수 s_i를 θ_i의 크기에 대해 내림차순으로 정렬하여 순서있는 집합 L에 넣는다.

단계 3 : 적당한 $0 < \alpha < 1$에 대해, $\alpha|L|$개 만큼의 s_i를 L에서 취하여 B에 넣는다.

단계 4 : 나머지 기저는 Maros의 방법에 따라 채워넣는다.

위 방법에서 α는 매개변수로서, 본 연구에서는 0.5의 값을 취하였다.

5. 실험을 통한 분석

기존의 두가지 방법, 즉 LPAKO의 방법, Maros의 방법과 새로운 초기기저 구성방법을 서로 비교하기 위해서, 우리는 초기기저에 포함된 변수가 최적기저에 어느정도 남아 있는지에 대한 실험을 수행하였다. 이것은 초기기저가 얼마나 최적기저에 가까운지를 검사하는 것으로 초기기저의 우수성을 평가할 수 있다고 할 수 있다. 다음은 그 실험결과

로서, 표 안의 숫자는 초기기저열이 최적기저열에 남아있는 비율을 나타낸다.

〈표 4〉 초기기저의 최적성 분석

문 제	LPAKO	Maros	새로운 방 법	문 제	LPAKO	Maros	새로운 방 법
25fv47	0.45	0.43	0.58	maros	0.44	0.51	0.51
80bau3b	0.04	0.21	0.36	maros-r7	0.19	0.17	0.25
bnl2	0.46	0.43	0.48	nesm	0.11	0.21	0.16
cycle	0.32	0.27	0.41	pilot	0.22	0.18	0.34
czprob	0.17	0.15	0.31	pilot87	0.09	0.04	0.11
d6cube	0.23	0.31	0.38	pilotnov	0.41	0.45	0.50
degen3	0.53	0.52	0.60	scsd8	0.61	0.54	0.67
dfl001	0.12	0.08	0.21	sctap3	0.51	0.45	0.52
fit1d	0.27	0.29	0.37	ship08l	0.19	0.21	0.32
fit1p	0.24	0.22	0.29	ship12l	0.24	0.17	0.35
fit2d	0.15	0.13	0.15	ship12s	0.19	0.22	0.27
fit2p	0.13	0.14	0.13	stocfor3	0.14	0.14	0.20
greenbea	0.24	0.21	0.29	truss	0.09	0.11	0.18
greenbeb	0.39	0.27	0.34	wood1p	0.22	0.19	0.31

이 실험결과를 볼 때, 새로운 기저설정 방법의 초기기저의 최적성 면에서 다른 두가지 방법에 비해 어느정도 우수하다는 것을 알 수 있다.

〈표 5 〉 단체법의 반복회수 비교

문 제	LPAKO	Maros	새로운 방 법	문 제	LPAKO	Maros	새로운 방 법
25fv47	1396	1576	1247	maros	834	877	837
80bau3b	6381	5494	5115	maros-r7	2620	2942	2714
bnl2	1465	1954	1224	nesm	2487	2189	2575
cycle	586	423	458	pilot	3656	3694	3571
czprob	645	485	487	pilot87	6346	7151	6289
d6cube	4787	5423	4521	pilotnov	973	1047	878
degen3	2367	2486	2254	scsd8	1265	984	956
dfl001	76325	67852	59445	sctap3	741	691	657
fit1d	900	1024	914	ship08l	488	517	484
fit1p	704	841	692	ship12l	856	904	817
fit2d	5837	5179	5013	ship12s	448	471	451
fit2p	7010	8154	7125	stocfor3	5727	6125	5784
greenbea	12052	13114	11245	truss	3116	3075	2947
greenbeb	3125	3012	3122	wood1p	1291	1345	985

초기기저의 효과적인 설정은 궁극적으로 단체법의 반복회수를 감소시키는 것을 목적으로 한다. 위에서 살펴본 초기기저의 최적성은 단체법의 반복회수와 직접적인 관련이 있다고 말할 수 없다. 따라서, 새로운 방법의 효과를 직접적으로 살펴보기 위해 단체법의 반복회수를 실험을 통해 알아보았다. 다음 <표 5>는 각 초기기저 구성방법에 따른 단체법의 반복회수를 비교한 것이다.

위의 실험결과를 볼 때, 새로운 초기기저 구성방법이 다른 두 방법에 비해 단체법 반복회수를 더 줄일 수 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 단체법에서의 초기기저 설정에 대해 LPAKO의 방법과 Maros의 방법을 각각 분석, 비교하고, 두가지 방법이 가지는 단점을 보완하여 새로운 방법을 제시하였다.

LPAKO의 경우, 희소성과 일차독립열 판별 편이성을 이유로 여유, 잉여변수를 먼저 초기기저에 포함시킨 다음 상징적 방법인 일차독립열 판정방법을 적용하여 희소도가 높은 구조변수열들을 초기기저에 포함시킨다. 반면, Maros 등의 방법은 구조변수열들을 활용하여 삼각행렬 형태의 기저를 구성하고, 나머지 기저는 여유, 잉여변수 및 인공변수를 활용하여 구성하였다. 두가지 방법의 장점을 취하는 새로운 방법에서는 최적조건을 활용하여 최적기저에 남아있을 확률이 높은 여유, 잉여변수를 먼저 초기기저에 포함시키고, 나머지 기저는 Maros의 삼각기저 형성방법을 취하였다. 세가지 방법에 대한 실제 구현을 통한 실험결과, 새로운 방법은 초기기저의 최적성면에서 나머지 두가지 방법에 비해 우수함을 보였고, 단체법의 반복회수를 줄이는 효과도 있었다.

참 고 문 헌

[1] 박순달, 「선형계획법(3정판)」, 민영사, 1992

[2] 박순달, 「OR(경영과학)」, 민영사, 1991

[3] 박순달, "LPAKO ver 4.6f 사용자 매뉴얼", 2000.

[4] 서용원, 김우제, 박순달, "단체법에서의 초기 기저 구성에 관한 연구", 경영과학, 제13권 3호, pp.105-113(1996)

[5] Bixby, R.E., "Implementing the Simplex Method : The Initial Basis," ORSA J. on Computing, Vol.4, No.2, pp.267-284(1992)

[6] Hanif D. Sherali, Allen L. Soyster, Stafford G. Baines, "Nonadjacent Extreme Point Methods for Solving Linear Programs," *Naval Research Logistics Quaterly*, Vol.30. pp.145-161(1983)

[7] Istvan Maros, Gautam Mitra, "Strategies for Creating Advanced Bases for Large-Scale Linear Programming Problems," *INFORMS Journal on Computing*, Vol.10, No.2(1998)

[8] Gay, D.M., "Electronic mail distribution of linear programming test problems," Mathematical Programming Society Committee on Algorithms Newsletter 13(1985).

[9] Strang, G., Linear algebra and its applications, 3rd ed., Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1988