

Wigner 분포 함수를 이용한 초점 심도 증가의 정량적 해석

장남영 · 강호정 · 은재정 · 최평석†

창원대학교 전자공학과

☎ 641-773 경남 창원시 사림동 9번지

(2000년 5월 16일 받음, 2000년 11월 20일 수정본 받음)

본 논문에서는 원형 대칭 광 시스템에 대한 초점 심도를 증가시키기 위해 Wigner 분포 함수(WDF)로 유도된 위상 지연 함수를 이용한다. 1차원 신호에 대한 WDF는 위상-공간(x, ζ) 상의 2차원 함수로 표현되고 Strehl 비(SR)를 이용해 정규화된 복사조도로 나타낸다. 초점 심도의 증가는 WDF 공간상에서 간단한 조작으로 자유 공간 전파의 특성을 나타내는 전단 기울기 α 을 부여함으로써 달성된다. 또한 α 을 초점 심도의 항 δ_z 로 표현함으로써 위상 지연 함수를 통해 정량적으로 초점특성을 평가할 수 있는 방법을 제안한다. 제안된 방법으로 수치 해석한 결과를 다른 접근법으로 수행되었던 연구결과와 비교한다.

OCIS codes : 120.2990, 220.2560.

I. 서 론

지난 십여 년간 일반적인 광 시스템의 초점 심도를 증가시키기 위한 방법들은 초점을 벗어난 평면에서의 이미지 형성에 대한 관심으로 연구되어 오고 있다.^[1-11] 긴 초점 심도는 필연적으로 낮은 측면 분해능(lateral resolution)을 나타낸다.^[3] 즉, 긴 초점심도는 낮은 개구수를 필요로 하는 반면 측면 분해능은 높은 개구수를 필요로 하기 때문이다. 1991년 N. Davidson 등은 초점 심도와 측면 분해능 사이의 이러한 상충관계를 개선하기 위한 방법으로 axilens라 불리는 비구면 홀로그래픽 광학부품에 대한 연구 결과를 보고했다.^[2] 또한 J. Sochacki 등은 초점 심도를 증가시키는데 필요한 axilens의 위상 지연 함수를 정확히 유도하였다.^[1] J. Sochacki 등의 연구에 의하면 axilens의 위상 지연 함수는 전통적인 제곱 위상의 형태가 아니라 로그 함수의 형태를 띠게된다. 또한 Strehl 비를 이용해 공간 필터를 설계함으로써 초점 심도를 증가시키는 방법이 J. Ojeda-Castañeda 등에 의해 제안되었다.^[4]

최근에는 수차가 없는 광 이미지 시스템의 성능을 분석하기 위해 등장한 위상-공간 신호를 이용한 방법들이 소개되고 있다.^[5-11] 이러한 위상-공간 신호는 Wigner 분포 함수(WDF)나 Ambiguity 함수(AF)로 표현된다. WDF는 공간상에서 신호와 주파수를 동시에 표현할 수 있기 때문에 광 시스템과 신호를 설명하는데 유용한 방법이 된다. 예를 들어, 1차원 입력 신호의 경우 WDF는 공간과 공간 스펙트럼 정보를 나타내는 2차원 함수로 표현되므로 축 상의 Strehl 비(SR)는 WDF의 위상-공간 영역에서 설명될 수 있다. 따라서 공간 신호와 주파수를 동시에 표현할 수 있는 WDF는 기하 광학의 광선의 개념과 상당히 유사하다.

이러한 WDF의 주요한 특성은 2차원으로 표현되는 WDF를 단순히 기하학적으로 조작함으로써 기본적인 광학부품들의 효

과를 나타낼 수 있다. 예를 들어 1차원의 입력 신호에 대한 공간과 공간 스펙트럼 정보를 표현하는 WDF의 2차원 영역에서 공간 축에 대하여 전단함으로서 자유 공간 전파를 나타낸다.^[10] 이러한 WDF의 특성을 이용해 초점 심도를 증가시키는 위상 지연 함수의 유도과정은 Enrique E. Sicre 등에 의해 제안되었다.^[9]

본 논문에서는 WDF의 공간 축에 대한 전단 기울기 α 로 표현되는 위상 지연 함수를 초점 심도를 나타내는 δ_z 의 항으로 표현함으로써 WDF를 이용해 증가된 초점 심도를 보다 명확히 평가할 수 있는 방법을 제안한다. 또한 수치 해석을 통해 나타낸 결과들은 J. Sochacki 등에 의해 다른 접근법으로 수행되었던 연구 결과와 비교한다.

II. Wigner 분포 함수와 Strehl 비의 관계

일반적으로 1차원 신호 $u(x)$ 에 대한 WDF의 정의는 다음 두 식과 같이 표현된다.^[13]

$$W(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+x'/2)u^*(x-x'/2) \exp(-i2\pi vx') dx' \quad (1a)$$

$$W(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(v+v'/2)\tilde{u}^*(v-v'/2) \exp(i2\pi v'x) dv' \quad (1b)$$

여기서 $\tilde{u}(v)$ 는 $u(x)$ 의 Fourier 변환이다. 또한 보편적으로 취급되는 광 시스템은 원형 대칭이기 때문에 여기서는 원형 대칭 광 시스템을 고려한다. 원형 대칭 광 시스템의 특성은 광 축을 따라 분포하는 진폭 점 퍼짐 함수(PSF)로 나타낼 수 있고 식 (2)과 같이 표현된다.

$$p(r, z) = 2\pi \exp\left(i\frac{\pi r^2}{\lambda f}\right) \int_0^{\infty} I(\rho) \exp\left(i\frac{\pi z \rho^2}{\lambda f^2}\right) \times J_0(2\pi r \rho / \lambda f) \rho d\rho \quad (2)$$

여기서 J_0 는 0차 1종 Bessel 함수를 나타내고 f 는 초점 거리, λ 는 파장, ρ 는 원형 개구의 반경 그리고 z 는 광축, r 은 이미

†E-mail: choips@sarim.changwon.ac.kr

지 평면에서의 방사 좌표(radial coordinate), $t(\rho)$ 는 복소 진폭 투과율이다. 또한 출사등과 관련된 복소 진폭 투과율 $t(\rho)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t(\rho) = t_0(\rho) \exp[i\phi(\rho)] \quad (3)$$

여기서 $t_0(\rho)$ 는 양의 진폭 전달 함수이고 $\phi(\rho)$ 는 위상 함수로서 광 시스템에서 유발된 파면 수차로 고려될 수 있다. 광 시스템에서 유발된 수차로 인해 발생하는 초점흐림에 대한 평가는 수차를 갖는 회절 초점과 수차를 갖지 않는 회절 초점의 복사조도 비로 정의되는 SR을 이용할 수 있다.^[11,12] 여기서 축 상의 복사조도 I 는 PSF 절대치의 제곱으로 나타낼 수 있기 때문에 이와 같은 SR은 다음으로 표현된다.

$$S(z) = I(0; z)/I(0; 0) = |p(0; z)|^2 / |p(0; 0)|^2 \quad (4)$$

따라서 정규화된 축 상의 복사조도는 SR로 표현되고 식 (2)을 이용하여 식 (4)은 다음으로 다시 나타낼 수 있다.

$$S(z) = I(0; z)/I(0; 0) = \left| \int_0^{\rho_0} t_0(\rho) \exp[i\phi(\rho)] \exp\left(i \frac{\pi z}{\lambda f^2} \rho^2\right) \rho d\rho \right|^2 / \left| \int_0^{\rho_0} t_0(\rho) \exp[i\phi(\rho)] \rho d\rho \right|^2 \quad (5)$$

이제 앞에서 언급했던 원형 대칭 광 시스템의 진폭 투과율 즉, 균일한 2차원 원형 대칭 개구 $t_0(\rho)$ 를 이용해 SR과 WDF의 관계를 나타낸다. 여기서 2차원 원형 대칭 개구 $t_0(\rho)$ 는 $0 \leq \rho \leq \rho_0$ 의 구간에서는 1의 값을 가지고 이외의 구간에서는 0의 값을 갖는 $\text{circ}(\rho/\rho_0)$ 함수가 된다. 또한 복소 진폭 투과율 $t(\rho)$ 의 위상 분포 $\phi(\rho)$ 는 없다고 가정한다. 이때 한가지 더 고려해야 할 사항은 2차원 함수에 대한 WDF는 4차원 함수로 표현되고 1차원 함수에 대한 WDF는 2차원의 함수로 표현되기 때문에 SR에 내포된 정보를 2차원의 위상-공간영역으로 나타내기 위해 적절한 변환식이 필요하다.^[12] 이러한 변환식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\zeta = (\rho/\rho_0)^2 - 0.5 \quad (6)$$

따라서 식 (6)을 이용해 $t_0(\rho) = \text{circ}(\rho/\rho_0)$ 은 다음과 같은 1차원 개구로 변환된다.

$$t_0(\rho) = r_0(\zeta) = \text{rect}(\zeta), \quad -0.5 \leq \zeta \leq 0.5 \quad (7)$$

이제 WDF의 정의식(1a, 1b)과 식 (5), 식 (6), 그리고 $\phi(\rho) \equiv 0$ 을 이용하면 SR을 WDF로 나타낼 수 있다.

$$SR = I(0; z)/I(0; 0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{r_0}(x, \zeta) d\zeta \quad (8)$$

여기서 $x = \frac{z}{2\lambda f^2} \rho_0^2$ 이고 $W_{r_0}(x, \zeta)$ 는 WDF이다.

식 (8)은 광 축을 따라 분포하는 정규화된 복사조도를 나타낸다. 여기서 정규화된 복사조도는 2차원 위상-공간(x, ζ)에 대하여 x 축에 대응하는 WDF 값들의 합이 된다. 그림 1은 그레이 레벨로 $r_0(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$ 인 경우에 대한 WDF를 그린 것이

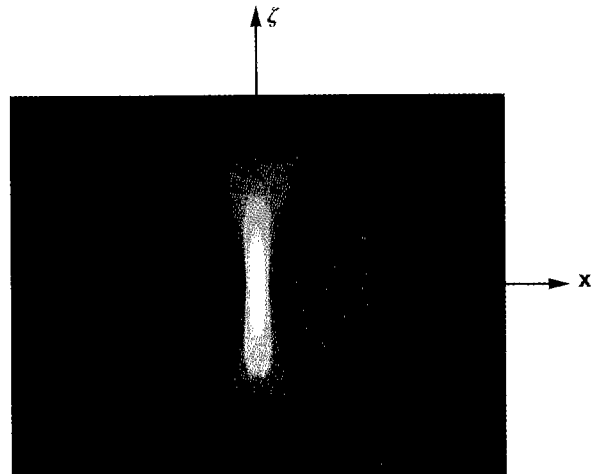


그림 1. $r_0(\zeta) = \text{rect}(\zeta)$ 일 때 WDF : $W_0(x, \zeta)$.

며 중앙의 밝은 부분은 높은 복사조도를 나타낸다. x 축이 증가하는 방향으로 갈수록 x 축에 대응하는 WDF 값들은 현저하게 감소함을 볼 수 있다. 다시 말해서 균일하게 분포하는 복사조도의 범위 즉 초점 심도가 작음을 알 수 있다. 하지만 WDF를 2차원 위상-공간(x, ζ) 상에서 x 축에 대하여 전단 기울기 α 를 갖도록 변형시킨다면, 복사조도는 감소하겠지만 초점 심도는 증가할 것이다. 이때 전단 기울기 α 로 인해 유도되는 위상 지연 함수는 일반적인 원형 대칭 광 시스템의 파면 수차의 효과로 생각할 수 있고 x 축에 대한 전단 기울기 α 는 자유 공간 전파를 의미한다. 또한 전단 기울기 α 에 대한 WDF는 $W_0(x - \alpha\zeta, \zeta)$ 로 표현된다.

최근 x 축에 대한 전단 기울기 α 를 이용해 초점 심도를 증가시키는 위상 지연 함수의 유도가 보고되었다.^[9] 전단 기울기 α 를 갖는 WDF는 그림 2와 같이 나타낼 수 있다. 하지만, 유도된 위상 지연 함수는 전단 기울기 α 로 표현되기 때문에 초점 심도에 대한 정량적인 정보를 나타내는 것이 힘들었다. 따라서 본 논문에서는 전단 기울기 α 를 초점 심도의 향으로

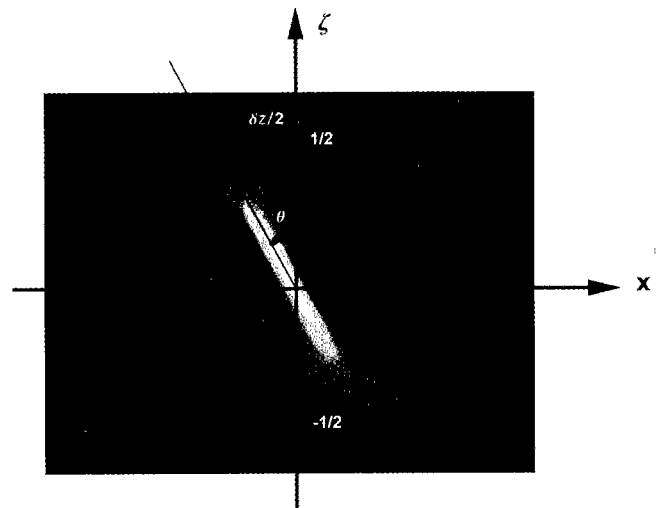


그림 2. 전단 기울기가 α 인 WDF : $W_0(x - \alpha\zeta, \zeta)$.

표현함으로써 정량적인 해석을 가능하게 한다.

III. 초점 심도의 향으로 표현된 위상 지연 함수

이 절에서는 x 축에 대한 전단 기울기 α 로 표현되는 위상 지연 함수를 초점 심도의 향으로 나타낸다.

그림 2에서 ζ 축을 기준으로 x 축에 대한 전단 각 θ 가 주어질 때 $x = \frac{z}{2\lambda f^2} \rho_0^2$ 임으로 x 의 변화량은 z 의 변화량에 의존한다. 따라서, 초점 심도는 z 의 변화량 δ_z 로 표현할 수 있고 또한 원점을 기준으로 서로 대칭이기 때문에 ζ 축을 기준으로 반 평면에서 $\delta_z/2$ 가 된다. 결국 전단 기울기 α 는 $\tan\theta$ 로 표현되고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tan\theta = \frac{x}{\zeta} = \frac{\rho_0^2}{2\lambda f^2} \delta_z \quad (9)$$

따라서 전단 기울기 α 는 다음과 같다.

$$\alpha = K \delta_z \quad (10)$$

여기서 $K = \frac{\rho_0^2}{2\lambda f^2}$ 이고 δ_z 는 초점 심도, f 는 초점 거리 그리고 ρ_0 는 원형 개구의 최대 반경이고 λ 는 파장이다. 그림 3은 초점 거리 $f = 1220$ mm, $\rho_0 = 12.5$ mm 그리고 $\lambda = 633$ nm일 때, 초점 심도 $\delta_z = 29$ mm인 경우에 대한 WDF를 보여 주고 있다.

x 축에 대한 전단 기울기 α 을 갖는 새로운 WDF $W_r(x, \zeta)$ 는 $W_0(x - K\delta_z \zeta, \zeta)$ 으로 표현되고 새로운 WDF에 대한 동공 함수는 다음에 기술한 WDF에 대한 1차원 Fourier 변환 특성을 이용하여 얻을 수 있다.^[13]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi x \zeta) W_r(x, \zeta/2) dx = r(\zeta) r^*(0) \quad (11)$$

여기서 $r^*(0)$ 항은 상수이다. 따라서 새로운 WDF $W_r(x, \zeta)$ 로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\tilde{r}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_0(x') \exp\left[i\pi \frac{1}{K\delta_z} (x' - x)^2\right] dx' \quad (12)$$

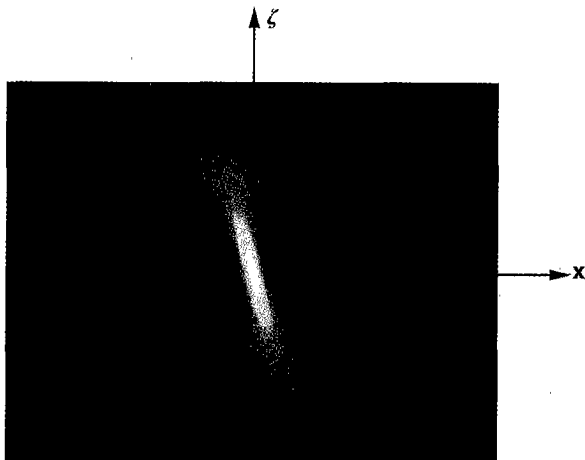


그림 3. 초점 심도 δ_z 에 따른 WDF : $\delta_z = 29$ mm 일 때.

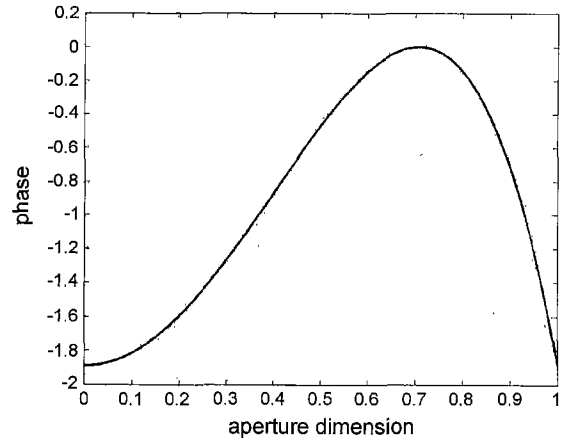


그림 4. $\delta_z = 29$ mm일 때 위상 분포.

여기서 $\tilde{r}(x)$ 와 $\tilde{r}_0(x)$ 는 $r(\zeta)$ 와 $r_0(\zeta)$ 의 Fourier 변환이다. 식 (12)으로부터 새로운 1차원 복소 진폭 투과율 함수 $r(\zeta)$ 은 다음과 같이 유도된다.

$$r(\zeta) = \exp(-i\pi K \delta_z \zeta^2) \text{rect}(\zeta) \quad (13)$$

따라서 2차원 원형 대칭 개구에 대한 복소 진폭 투과율 함수 $t(\rho)$ 는 앞에서 논의했던 변환식(6)을 이용함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$t(\rho) = \exp\{-i\pi K \delta_z [(\rho/\rho_0)^4 - (\rho/\rho_0)^2 + 1/4]\} \text{circ}(\rho/\rho_0) \quad (14)$$

결과적인 위상 지연 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi(\rho) = -\pi K \delta_z [(\rho/\rho_0)^4 - (\rho/\rho_0)^2 + 1/4] \quad (15)$$

$\delta_z = 29$ mm일 때 위상 분포를 그림 4에 나타내었다.

IV. 수치 해석 및 결과 비교

이 절에서는 δ_z 의 향으로 표현된 위상 지연 함수로 증가된 초점 심도를 수치 해석한다. 수치 해석에 사용된 파라메타는 $f = 1220$ mm, $\lambda = 633$ nm, $\rho_0 = 12.5$ mm을 사용하였다. 또한 J. Sochacki 등에 의해 다른 접근법으로 수행되었던 연구 결과와 비교한다.^[11]

초점 심도의 증가는 전단 기울기 α 의 값을 조정함으로써 달성할 수 있었지만, 위상 지연 함수를 통해 직접적으로 초점 심도를 정량적으로 표현할 수는 없었다. 하지만, 전단 기울기 α 을 초점 심도의 향으로 직접 표현함으로써 원형 대칭 광 시스템에 대한 초점 심도를 정량적으로 나타낼 수 있으며 또한 WDF를 이용한 광학 부품의 설계 시 초점특성을 보다 쉽게 파악할 수 있다.

$\delta_z = 29$ mm, 45 mm, 57 mm일 때 (15)식을 이용하여 각각의 위상 지연 함수를 구하고 이것을 (5)식에 대입하여 구한 정규화된 복사 조도비 SR(Strehl Ratio)을 그림 5에 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 δ_z 가 29 mm, 45 mm, 57 mm일 때 SR 값은 각각 0.17, 0.11, 0.26 이다. 이와 같이 SR 값이 각각 다른 것은 WDF를 이용하여 초점 심도 δ_z 를 유도하

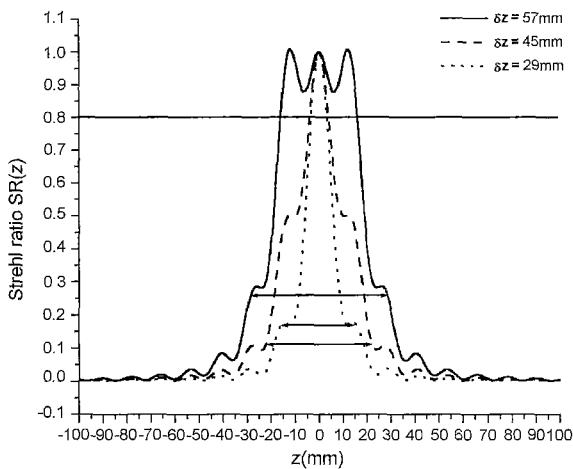


그림 5. 광축 상의 Strehl ratio(SR): $\delta_z = 29$ mm, 45 mm, 57 mm 일 때.

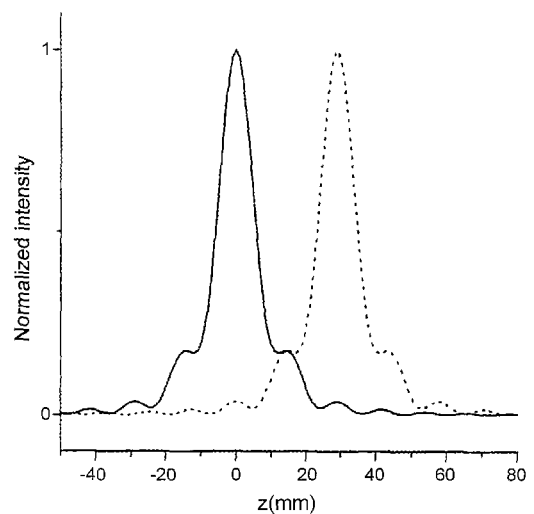


그림 7. $\delta_z = 29$ mm 일 때 정규화된 축 상의 강도 분포 비교: 실선은 식 (15)의 위상 지연 함수에 의한 강도 분포이고 점선은 로그 위상 지연 함수에 의한 강도 분포.

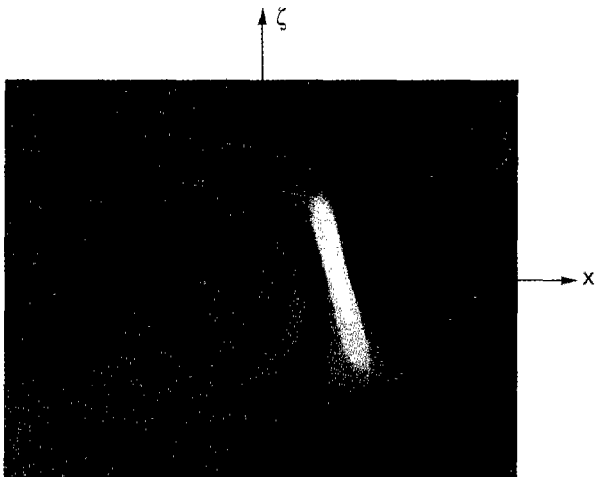


그림 6. $\delta_z = 29$ mm 일 때 로그 함수의 형태를 갖는 위상 지연 함수에 대한 WDF.

는 과정에서 SR 값을 기준으로 정한 것이 아니고 그림 2에서와 같이 기울기 α 에 따른 x 축 상의 길이를 기준으로 하였기 때문이다. 그림 5에서 일반적인 초점 허용범위인 $SR = 0.8$ 이상인 광축 상의 값도 각각 $z = \pm 3.3, \pm 3.9, \pm 16$ 으로 증가함을 알 수 있다.

또한 위상 지연 함수의 초점특성을 평가하기 위해 강도가 일정한 axilens의 위상 지연 함수 유도에 관한 J. Sochacki 등의 연구 결과와 비교했다. J. Sochacki 등에 의해 유도된 위상 지연 함수는 일반적인 제곱 위상 형태가 아니라 로그 함수의 형태를 나타내었다. 그림 6은 $\delta_z = 29$ mm 일 경우에 로그 함수의 형태를 갖는 위상 지연 함수에 대한 WDF를 보여 주고 있다. 그림 6은 그림 3과 유사하지만 $\delta_z/2$ 만큼 차이가 있음을 볼 수 있다. 이는 axilens을 설계할 때 초점이 초점 거리 f 와 $f + \delta_z$ 사이에 맺히도록 구성했기 때문이다. 그림 7은 $\delta_z = 29$ mm 일 때 J. Sochacki의 결과와 비교하기 위하여 정규화된 축 상의 강도 분포를 나타내었다. 그림 7에서처럼 두 경우에 대하여 축 상의 강도는 동일한 분포를 가지지만 그

림 6에서 예상할 수 있는 것처럼 초점 차이가 나타남을 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 일반적인 원형 대칭 광 시스템을 고려하여 초점 심도를 증가시키는 위상 지연 함수에 대한 표현을 달리 함으로서 초점특성을 정량적으로 평가할 수 있는 방법을 제안했다. WDF를 이용하여 유도된 위상 지연 함수로 광 시스템의 초점 심도를 증가시키는 방법은 위상-공간(x, ζ)상에서 x 축으로 전단 기울기 α 을 줌으로서 달성 할 수 있는데 이는 파면 수차의 영향으로 해석되는 위상 지연 함수를 α 의 향으로 나타낸다. 전단 기울기 α 에 따라 광 시스템의 초점 심도는 α 값이 커질수록 증가하지만, 정량적으로 α 값의 증가에 대응하는 초점 심도 δ_z 는 수치 해석을 통해 확인 할 수 있다. 하지만 전단 기울기 α 을 초점 심도 δ_z 의 향으로 표현함으로써 광 시스템의 초점 심도를 설계자가 직접 결정하고 이는 위상 지연 함수로 인한 시스템의 초점특성을 쉽게 평가할 수 있게 한다. 또한 δ_z 의 향으로 표현된 위상 지연 함수를 이용해 실시한 수치 해석 결과는 강도가 일정한 axilens의 위상 지연 함수 유도에 관한 J. Sochacki 등의 연구 결과와 비교해볼 때 거의 동일한 결과를 얻을 수 있었다.

참고문헌

- [1] J. Sochacki, S. Barà, Z. Jaroszewicz, and A. Kolodziejczyk, *Opt. Lett.* **17**, 7 (1992).
- [2] N. Davidson, A. A. Friesem, and E. Hasman, *Opt. Lett.* **16**, 523 (1991).
- [3] G. Bickel, G. Häusler, and M. Maul, *Opt. Eng.* **24**, 975 (1985).
- [4] J. Ojeda-Castañeda, L. R. Berriel-Valdos, and E. Montes, *Opt. Lett.* **10**, 520 (1985).

- [5] K. H. Brenner, A. W. Lohmann, and J. Ojeda-Castañeda, *Optics Comm.* **44**, 323 (1983).
- [6] M. J. Bastiaans, *Optics Comm.* **25**, 26 (1978).
- [7] K. H. Brenner and A. W. Lohmann, *Optics Comm.* **42**, 310 (1982).
- [8] G. Shabtay, D. Mendlovic, and Z. Zalevsky, *Appl. Opt.* **37**, 2142 (1998).
- [9] D. Zalvidea and E. E. Sicre, *Appl. Opt.* **37**, 3623 (1998).
- [10] D. Mendlovic and Z. Zalevsky, *SPIE* **2778**, 435 (1996).
- [11] D. Zalvidea, M. Lehman, S. Granieri, and E. E. Sicre, *Optics Comm.* **118**, 207 (1995).
- [12] J. Ojeda-Castañeda, E. Tepichin, and A. Pons, *Appl. Opt.* **27**, 5140 (1988).
- [13] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbräuker, *Philips Journal of Research.* **35**, 217 (1980).

Quantitative analysis of increase in depth of focus using Wigner distribution function

Nam Young Jang, Ho Jung Kang, Jae Jung Eun, and Pyung Suk Choi[†]

Department of Electronic Engineering, Changwon National University, Kyungnam 641-773, KOREA

[†]*E-mail: choips@sarim.changwon.ac.kr*

(Received May 16, 2000 ; Revised manuscript received November 20, 2000)

A phase-retardation function which was derived from Wigner distribution function (WDF) is used to increase a focal depth of a radially symmetric optical system. The WDF for one-dimensional signal is represented as a two-dimensional function of phase-space (x, ζ) , and a normalized irradiance is described as a form of the Strehl ratio (SR). The increase in the focal depth is accomplished by delivering a shearing tilt α that represents a characteristic of free space propagation with simple manipulation in the WDF space. In this paper we propose a method for evaluating the focal depth quantitatively by representing the phase-retardation function in terms of the focal depth term. In order to verify the validity of the proposed method, we compared the numerically analyzed result with that of J. Sochki's study.

OCIS codes : 120.2990, 220.2560.