기획 교구

대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.2, 563~587, September 2000

탱그램 활용을 통한 수학적인 생각의 구체화

김 남 희 (난곡중학교)

I. 머리말

본 고에서는 세계적으로 가장 대중적으로 사용되고 있는 퍼즐인 탱그램(Tangram)을 논의의 대상으로 하여 탱그램을 학교수학의 학습과정에 활용할 수 있는 방안에 대하여 다루어보고자 한다.

탱그램은 우리 나라 제 4차 교육과정의 초등학교 수학 교과서에서부터 현재까지 초등수학의 내용을 지도하는데 적극적으로 이용되어 왔고 최근에 이르러서는 중학교 수학교과서의 도형단원에서도 탐구활동의 소재로 등장하고 있다. 이러한 이유로 하여 현장에 있는 초, 중등 수학교사들에게는 탱그램을 수학의 학습에 유효 적절하게 활용할 수 있는 안목이 요구되고 있다. 그러나 실제 수학교육의 현장에서는 상품화되어 있는 탱그램이 학교에 여러 세트 마련되어 있음에도 불구하고 수학교사들이 그것을 단순히 문제지에 주어진 기학학적 모양을 맞추는 활동 정도로만 활용하고 있는 경우가 대부분이다[1].

학교수학의 교사들에게는 현재 수학 교과서에도 명시적으로 등장하고 있는 탱그램 교구의 수학교육적 가치와 그 활용범위 및 활용방법에 대한 보다 폭넓은 이해가 요구된다. 따라서 탱그램의 특징과 구성요소에 대한 설명, 그것을 학교수학에 활용할 수 있는 방안에 대한 보다 본격적인 논의가 있어야 할 필요성이 제기된다.

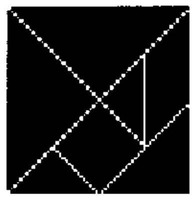
본 고에서는 탱그램을 수학의 문제해결과정이나 수학적 사고의 교육에 적절하고도 효과적으로 활용하는 방안에 대한 모색을 해 보고자 한다. 먼저 탱그램의 기원과 특징에 관한 설명을 제시한 후 학교수학에서 탱그램이 활용되고 있는 실태를 확인하고 탱그램을 활용하여 수학적인 생각을 구체화할 수 있는 내용을 구체적으로 예시한다.

1) 탱그램은 일반인들 뿐 만 아니라 수학교사들에게도 주어진 기하학적 모양을 맞추는 단순한 퍼즐 놀이로 인식되어 있다.

II. 탱그램

탱그램은 우리나라 수학교사들과 학생들에게 '칠교놀이'라는 이름으로 잘 알려져 있다[2]. 오직 7개의 조각들로 구성되어 있는 탱그램은 그러한 단순성에도 불구하고 폭넓고 다양한 많은 대상들을 표현할 수 있다는 신비로움을 지닌다[3]. 많은 기술을 요구하지 않으면서도 인내와 시간 그리고 풍부한 상상력을 요구하는 탱그램은 몇 개의 퍼즐 문제들은 풀기 어려워 그 신비한 매력을 영속시킨다.

1) 탱그램의 기원



<그림 1> 탱그램

탱그램이 지니는 놀랍고도 간단한 사실은 단지 7개의 조각들만을 가지고 움직이는 인간의 모습들, 건물들, 동물들, 알파벳 문자 등 수많은 다양한 대상을 표현해 낼 수 있다는 것이다. 탱그램을 다루는 활동은 주로 기하적인 모양들을 만들기 위해 7개의 조각들을 적절히 정돈하는 것이다.

이 퍼즐의 단순성이 사람을 빠져들게 한다. 어떻게 7개의 조각만으로 그렇게 색다른 이미지들을 만들 수 있을까? 그렇게 영문모를 도전을 어떻게 해서 계속 만들어 낼 수 있는 것인가? 이러한 의문과 함께 탱그램이 다루어지기 시작한 시기, 그 조각을 만들어낸 사람에 대해서는 거의 알려진 바가 없다. 심지어는 그 이름의 기원에 대해서도 분명치 않다[4]. 어떤 이야기로는 탱그램은 어떤 남자가 자기로 된 타일이 깨진 것을 맞추다가 우연히 발명한 것이라고 하기도 한다. 알려져 있는 것은 1780년대에 탱

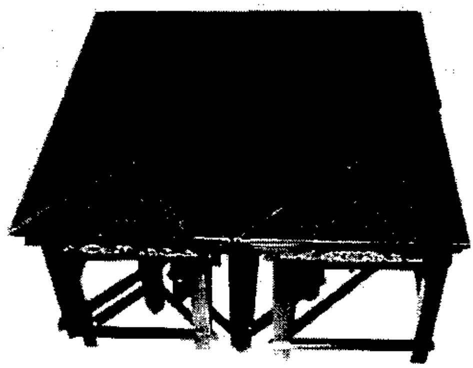
2) 중국에서 탱그램은 'Ch'i ch'iao t'u' 또는 '7개의 영리한 조각(Seven Clever Pieces)'으로 불리운다

3) 간단한 모양의 조각들을 움직임으로서 수 천 가지의 모양을 만들 수 있기 때문에 탱그램 퍼즐놀이는 특히 어린 아동들에게 조화로운 모양,어울리는 배열의 기술을 훈련시키는데 효과적인 것으로 알려져 있다.

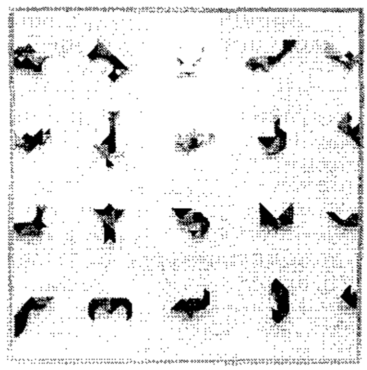
4) 미국의 퍼즐전문가인 Samuel Loyd에 따르면, Tan이라는 신이 4000년 전에 그 퍼즐을 발명했고 그 사실은 Tan에 대한 7권의 책에 설명되어 있다고 한다. 각 책은 1000개 이상의 퍼즐을 포함하고 있는데 그것들은 세상의 창조와 종의 기원을 설명하도록 되어있다고 한다. 그리고 7개의 조각들은 태양, 달 그리고 화성, 목성, 토성의 수성의 5가지 행성에서 취해진 것라고 말한다. 누군가에 따르면, 탱그램이라는 이름은 현재 사용되지 않은 영어 단어로서 그 것은 수수께끼, 퍼즐 또는 하찮은 것을 의미하는 용어라고 하기도 한다
(http://members.aol.com/sth777/page1.html에서)

그램 퍼즐을 풀고 있는 두 명의 중국 여인을 그린 목판화가 발견되었고, 탱그램 문제들을 다룬 가장 오래된 출판물은 중국에서 발견된 것으로 1813년에 발간되었다는 것 정도이다[5]. 그 때 이후로 탱그램은 미국과 유럽에 중국퍼즐로 알려지게 되고 판지, 돌, 상아, 플라스틱 등 여러 유형의 자료로 제조되어 왔다고 한다.

<그림 2>는 19세기에 만들어진 탱그램 책상들로서 중국에서 발견된 것이다. 중국에서는 탱그램의 대중성과 인기로 인해 퍼즐조각의 모양이 접시, 래커 상자, 심지어 탁자 등에서도 발견되기도 한다. 우리나라에서도 서울 지하철 5호선 김포공항 역의 지하도벽을 장식하고 있는 탱그램의 모형을 볼 수 있다(<그림 3>참조). 현재까지도, 탱그램은 전세계적으로 가장 대중적인 퍼즐로 사용되고 있으며 교사들에게는 수학의 내용을 지도하는데 도움을 주는 자료로 인식되어 있다.



<그림 2> 19세기에 만들어진 탱그램 책상들(중국)



<그림 3> 서울 지하철 5호선 김포공항 역에서 볼 수 있는 탱그램

1820년 <New Mathematical Demonstrations of Euclid>의 저자인 W. Williams은 수학을 가르치는 과정에서 탱그램 퍼즐을 활용할 것을 일찍부터 주장한 사람이었다. 그는 "이제까지 탱그램은 단순히 흥미 위주의 퍼즐 놀이로서만 다루어져 왔다"고 지적하면서 "학생들에게 교육의 초기 단계에서 기하학을 지도해야 한다고 믿는 사람들은 탱그램을 활용하려는 노력을 많이 해야만 한다"고 말하기까지 하였다[6].

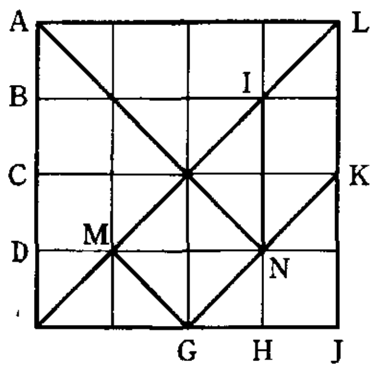
5) 따라서 탱그램의 역사는 1813년보다 훨씬 이전에 시작된 것이 틀림없어 보인다.
6) http://members.aol.com/sth777/page21.html에서.

2) 탱그램의 제작

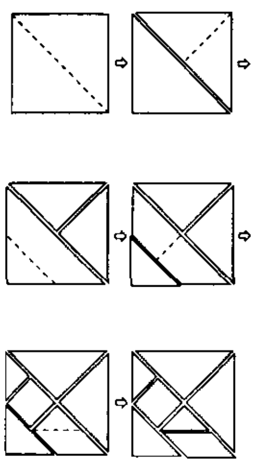
수업시간에 탱그램을 사용하기 위해서는 상품화되어 있는 탱그램을 구입하거나 교사나 학생이 직접 제작한 것을 이용할 수 있다. 탱그램을 학생들이 직접 제작할 경우에는 도형의 등분할 활동 및 정확한 측정과 작도의 과정을 경험할 수 있다는 이점이 있다. 초등학생의 경우에는 간단한 종이접기를 통하여, 중학생의 경우에는 측정과 작도를 통해서 제작해 보도록 하는 것이 바람직하다. <그림 4>~<그림 6>은 탱그램의 제작과정을 보여주고 있다.

1 두꺼운 도화지 위에 가로, 세로의 길이가 12cm인 정사각형을 그린다.
2 오른쪽 그림과 같이 3cm 간격으로 선을 그으면 한 변의 길이가 3cm인 정사각형 16개가 만들어진다.
3 대각선의 끝점 E와 L, 가로, 세로의 중점 G와 K를 굵은 선으로 긋는다.
4 선분 GK의 중점 N과 꼭지점 A를 굵은 선으로 긋고, 두 점 N과 I, G와 M을 굵은 선으로 긋는다.
5 가위로 굵은 선을 따라 오린다.

<그림 4> 측정과 작도에 의한 탱그램 제작



<그림 5> 측정과 작도로 구성된 탱그램



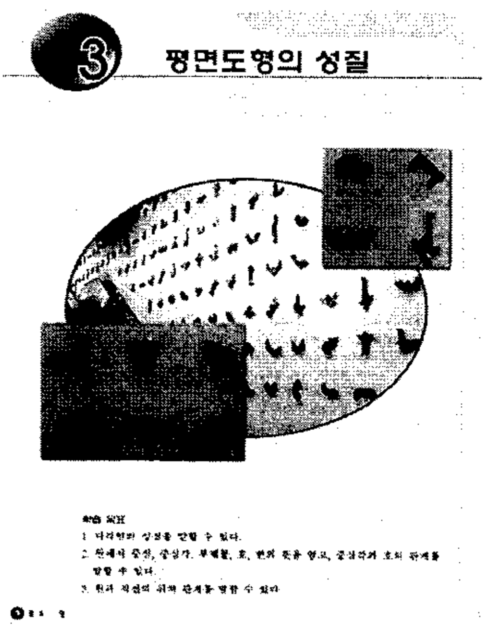
❶ 정사각형의 모양의 종이를 대각선을 따라 접고 잘라서 두 개의 직각삼각형을 만듭니다.
❷ ❶의 직각삼각형 중 하나를 반으로 잘라서 A1, A2를 만듭니다.
❸ ❶의 또 다른 직각삼각형의 직각인 꼭지점을 빗변의 중점에 맞추어 접고 잘라서 C를 만듭니다.
❹ 등변사다리꼴을 반으로 접어 잘라서 두 개의 작은 사다리꼴을 만듭니다.
❺ 작은 사다리꼴의 긴 밑변이 이등분되도록 접어 잘라서 직각삼각형 B2와 정사각형 E를 만듭니다.
❻ ❺에서 만들어진 또 다른 작은 사다리꼴의 긴 밑변을 이등분되도록 그림과 같이 접어 잘라서 직각삼각형 B1과 평행사변형 D를 만듭니다.

<그림 6> 종이접기에 의한 탱그램 제작

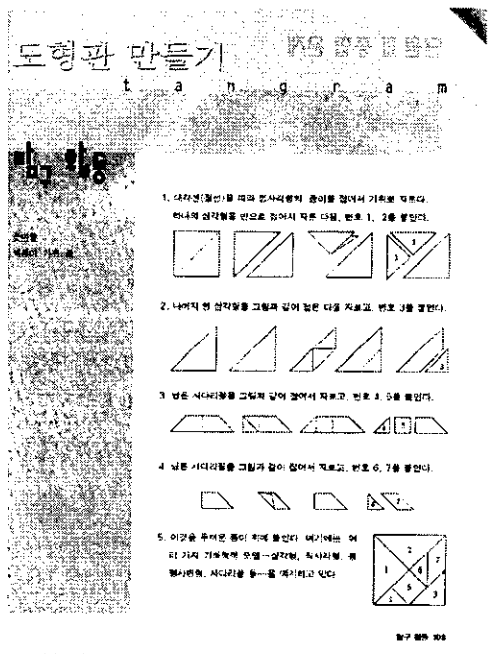
III. 학교수학과 탱그램

1) 우리 나라 수학 교과서에 등장하는 탱그램

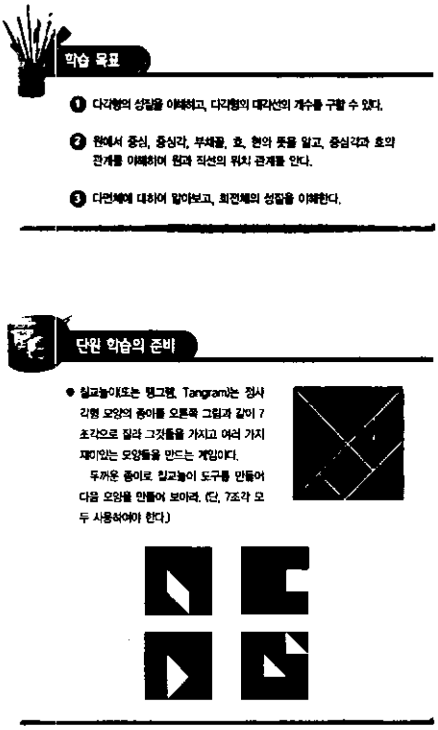
탱그램이 우리 나라 수학교과서에 명시적으로 등장하기 시작한 것은 제 4차 교육과정 부터이다. 당시 4학년 산수교과서에서 탱그램은 여러 가지 문제 단원에서 정사각형이나 여러 가지 삼각형을 맞추어보는 모양판 놀이로 소개되었다. 제 5차 교육과정에서는 4학년 교과서와 익힘책, 5학년 교과서, 6학년 교과서와 익힘책 등에서 여러 가지 다각형이나 사물의 모양을 맞추어 보는 모양판 놀이로서, 전체의 넓이에 대한 각 부분의 넓이를 알아보는 활동으로서 제시되고 있다. 제 6차 교육과정에서도 4학년 익힘책과 5학년 교과서에서 여러 가지 다각형이나 사물의 모양을 맞추어 보는 모양판 놀이로서 제시되고 있다(이인환 외, 1999, p.139).



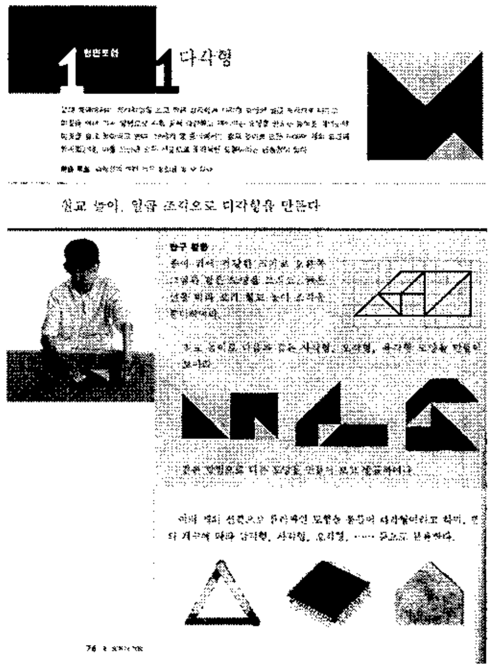
<그림 7> 수학 7-나 교과서에서 다루어지는 탱그램 (금종해 외 3인, 2000, p.78),



<그림 8> 수학 7-나 교과서에서 다루어지는 탱그램 (황석근, 이재돈, 2000, p.103).



<그림 9> 수학 7-나 교과서에서 다루어지는 탱그램 (신항균, 2000, p.81),



<그림 10> 수학 7-나 교과서에서 다루어지는 탱그램 (이준열 외 3인, 2000, p.76).

이와 같이 탱그램은 주로 우리 나라 초등학교 교과서에 자주 등장해 온 소재이다. 최근에 와서는 구체적 조작을 통한 활동을 강조하는 학교수학교육의 변화에 따라 탱그램을 이용한 문제상황이 더욱 빈번하게 그리고 다양한 활동으로 확대되어 취급되고 있는 추세이다. 특히, 탱그램 활동이 중학교 수학교과서에도 다루어지기 시작하고 있다는 것은 주목할만한 사실이다.

제 6차 수학교육과정까지의 중학교 수학교과서에서는 탱그램을 활용한 내용이 교과서에 소개되지 않았었으나 2001년부터 중학교 1학년을 대상으로 사용하게 될 수학교과서에는 도형 단원에서 탱그램을 소개하고, 구체적으로 탱그램을 이용한 탐구활동을 제시하는 내용을 여러 교과서에서 확인할 수 있다.

<그림 7>~<그림 10>은 제 7차 수학교육과정에 따른 수학 7-나 교과서에서 찾아볼 수 있는 탱그램 활동을 보여주고 있다.

2) 탱그램을 활용한 학교수학의 지도

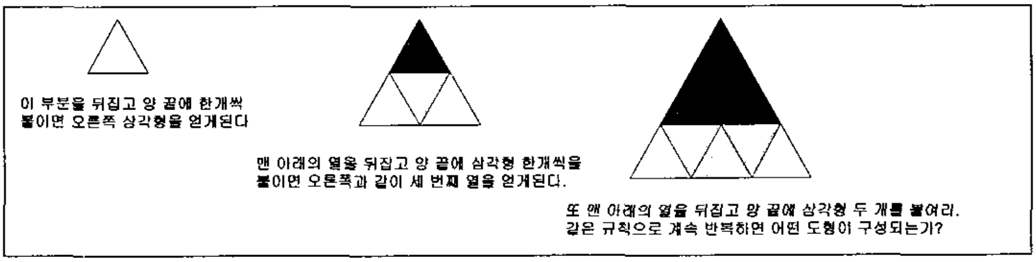
앞에서 살펴보았듯이, 탱그램은 제 4차 교육과정의 초등학교 수학 교과서에서부터 현재까지 초등수학의 내용을 지도하는데 적극적으로 이용되어 왔고 최근에 이르러서는 중학교 수학교과서의 도형단원에서도 탐구활동의 소재로 다루어지기 시작하였다. 이러한 이유로 하여 현장에 있는 초·중등 수학교사들에게는 탱그램을 수학의 학습에 유효 적절하게 활용할 수 있는 안목이 요구되고 있다. 그러나 연구자가 중학교 수학교육의 현장에서 관찰한 바는 대부분의 수학교사들이 상품화되어 있는 탱그램이 학교에 여러 세트 마련되어 있음에도 불구하고 그것을 가지고 단순히 문제지에 주어진 기하학적 모양을 맞추게 하는 활동정도로만 활용하고 있다는 사실이다. 수학교사들에게는 수학교과서에도 명시적으로 등장하고 있는 탱그램 교구의 수학교육적 가치에 대해 보다 폭넓은 이해가 있어야 한다. 탱그램을 단순히 모양을 맞추는 놀이수준에서만 다룬다면 탱그램을 이용한 수학의 실제적 활동에서 얻을 수 있는 수많은 이점을 경험하지 못하게 되는 것이다. 따라서 교사가 탱그램을 학교수학에 활용할 수 있는 방안에 대한 보다 본격적인 논의가 있어야 할 필요성이 제기된다. 아래에서는 탱그램을 주어진 모양을 맞추는 놀이 차원에서 다루는 내용[7]에서 벗어나 탱그램 교구를 활용하여 수학의 내용을 어떻게 하여 구체화할 수 있는가, 그 과정에서 수학적인 생각을 어떻게 경험해 나갈 수 있는가에 초점을 맞추어 내용을 전개해 보고자 한다.

(1) 수학적 추론 지도에 활용

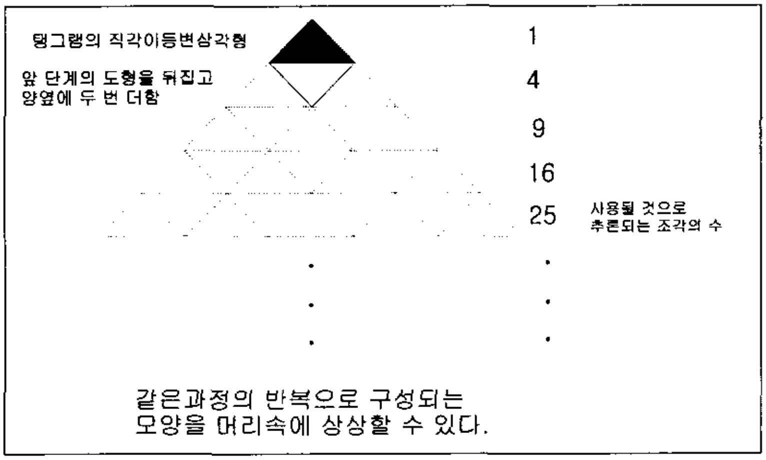
우리는 추론 없이 수학을 할 수 없다. '추론으로서의 수학(mathematics as a reasoning)'은 수학교육과정과 평가의 새로운 방향에서 유치원에서 12학년까지에 걸쳐 강조되고 있는 규준(standard)이다(구광조 외, 1992). 초등 학년에서 추론전략을 형식적으로 지도하기는 상당히 어려운 일이다. 그렇지만 학생들의 수준에 적절한 간단한 문제상황을 구성하여 수학을 의미 있는 것으로 보도록 하는데 도움이 되는 '비 형식적인 사고', '가설 세우기' 그리고 '확인하기'등의 지도를 할 수 있다. 탱그램의 조각을 이용하여 만들어 줄 수 있는 추론상황의

7) 물론 이러한 활동이 중요하지 않다는 것은 아니다. 그것은 수학적 개념의 학습 단계에서 딘즈가 설명하는 '물체를 통한 자유로운 놀이의 단계(강완, 백석윤, 1998, p.170-171)'라는 측면에서 상당히 의미 있는 학습활동이다. 탱그램을 가지고 하는 모양 맞추기 놀이는 교구에 익숙해지기 위한 준비 활동이 될 수 있다(김용태 외, 1998, p.69). 그러나 이러한 활동은 이미 여러 경로를 통하여 많은 사람들에게 소개되어 왔기 때문에 본 고에서는 이에 대한 탱그램 활용설명은 생략하기로 하였다.

예를 생각해 보자. <그림 11>과 같은 추론지도의 문제상황과 유사하게 탱그램의 크고 작은 직각이등변 삼각형들을 활용하여 <그림 12>와 같은 문제상황을 구성해 볼 수 있다.



<그림 11> 추론 지도를 위한 문제상황의 예(구광조 외 1992, P.41)



<그림 12> 위 <그림 11>의 문제상황을 탱그램으로 구성한 예

<그림 12>와 같은 조작활동에서 학생들은 손으로 조작할 수 있는 구체적인 자료 즉, 탱그램의 조각을 가지고 상호 작용해 나가며 일정한 패턴을 인식할 수 있게 된다. 먼저, 탱그램의 삼각형 조각을 뒤집는 활동을 한 두 번 한 후, 관찰된 패턴으로 "전 단계의 도형을 한 번 뒤집고 양끝에 처음 놓였던 크기의 삼각형을 한 개씩 놓으면 또 다른 삼각형을 구성할 수 있다"라는 가설을 세우게 한다. 그리고 '뒤집고 구성하는' 같은 활동을 여러 단계 반복해 가면서 자신이 세운 가설을 '확인하는' 작업을 수행하게 한다. 실제 사용되는 탱그램의 조각은 한 개밖에 되지 않지만 반복된 작업을 통해 구성되는 커다란 삼각형의 모양은 머리 속에 상상되어 종이 위에 그려질 수 있다. 가설이 확인되면 "계속 만들어지는 삼각형의 둘레

의 길이는 어떻게 변화하는가? 넓이는 어떻게 변화하는가?", "만약 삼각형이 아닌 다른 도형으로 이 과정을 해 본다면 어떠한 결과가 나오겠는가?" 또는 "삼각형 안에 포함되는 조각의 수들은 어떤 수인가? 그 수들이 가지는 공통된 특징은 없는가?[8]"와 같은 질문을 통해 학생들에게 공간적인 추론과 더불어 분석적인 사고를 할 수 있는 경험을 계속 제공해 줄 수 있다. <그림 12>와 같은 문제해결의 활동을 통해서 학생들은 수학적 추론을 경험할 수 있을 뿐 만 아니라 규칙적인 패턴의 관찰을 통해서 수학의 아름다움을 인식할 수 있는 기회도 제공받을 수 있다.

추론을 요하는 또 다른 문제상황을 보자(구광조 외, 1992, p.44).

나는 12개의 삼각형을 덮을 수 있는 도형을 가지고 있다. 이 도형들을 덮기 위해서는 몇 개의 평행사변형이 필요한가? 몇 개의 사다리꼴이 있으면 이 도형들을 덮을 수 있을까?

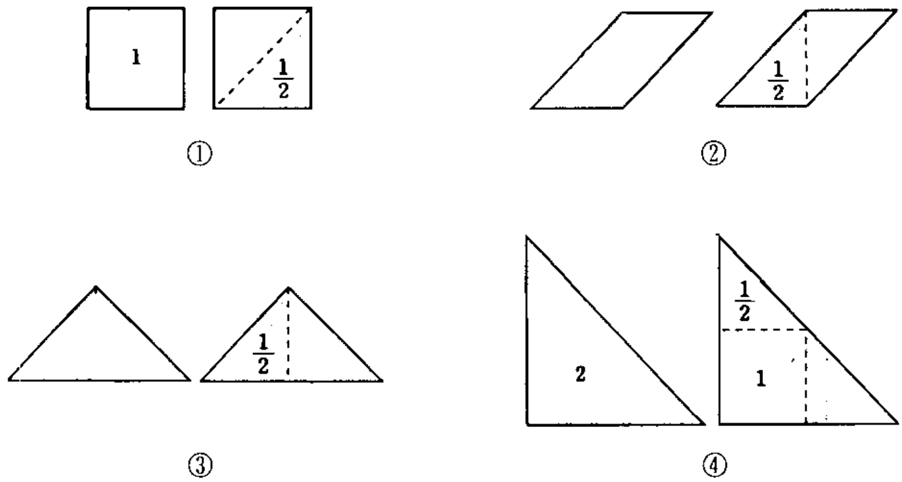
아래에서 소개될 '(4)평면도형의 지도에 활용'에서 다루어지고 있는 탱그램을 이용한 도형의 구성 활동 경험은 학생들이 도형이 분할되는 상황을 잘 파악할 수 있게 하는데 도움을 준다. 이러한 경험은 위의 문제와 같이 추론을 해야 하는 문제상황을 적절히 해결하는데 큰 도움이 된다. 다음은 위 문제에 대한 추론과정의 설명이다(구광조 외, 1992, p.44).

문제가 구체적인 대상물과 관련이 있기 때문에, 학생들은 2개의 삼각형이 1개의 평행사변형을 덮고, 3개의 삼각형이 1개의 사다리꼴을 덮고, 전체 도형은 6개의 평행사변형이나 4개의 사다리꼴에 의해 덮을 수 있다는 것을 시각적으로 인식할 수 있다. 결론을 정당화하기 위해, 아동들이 12개의 삼각형을 사용하여 도형을 만들고 그것이 6개의 평행사변형 또는 4개의 사다리꼴로 채워질 수 있는지를 점검하였다.

이러한 설명에 비추어보았을 때, 수학적 추론은 고립적으로 훈련되는 것이 아님을 쉽게 짐작할 수 있다. 탱그램을 이용한 도형의 구성활동들은 위에서 논의되는 추론적 사고를 강화시켜줄 수 있는 훌륭한 소재가 될 수 있는 것이다.

초등 수준에서 다루어질 수 있는 추론 학습은 탱그램 조각들이 가지는 도형의 넓이 사이의 관계를 설명하는 학습활동에서도 가능하다.

8) 1, 4, 9, 16....과 같이 자연수의 제곱인 수들이 발견된다.



<그림 13> 탱그램 조각의 변의 길이 및 넓이 관계 추론

아래의 설명은 탱그램 조각들이 가지는 도형의 넓이 사이의 관계를 논리적으로 설명하는 과정이다(<그림 13> 참조).

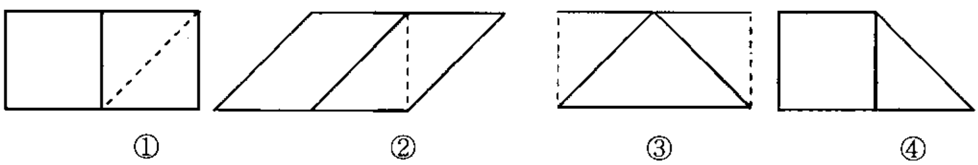
<그림 13>의 ①
가장 작은 직각이등변삼각형 두 개를 빗변이 마주하도록 붙이면 탱그램의 작은 정사각형이 한 개 만들어진다. 작은 정사각형의 넓이를 1이라고 하면 가장 작은 직각이등변삼각형의 넓이는 $1/2$이 된다.
<그림 13>의 ②
가장 작은 직각이등변삼각형 두 개를 빗변이 아닌 변이 마주하도록 붙이면 탱그램의 평행사변형이 한 개 만들어진다. 가장 작은 직각이등변삼각형의 넓이는 $1/2$이였으므로 평행사변형의 넓이는 1이 된다.
<그림 13>의 ③
가장 작은 직각이등변삼각형 두 개를 빗변이 아닌 변이 마주하도록(②와 다른 방법으로) 붙이면 탱그램의 중간 크기의 직각이등변삼각형이 한 개 만들어진다. 가장 작은 직각이등변삼각형의 넓이는 $1/2$이였으므로 중간 크기의 직각이등변삼각형의 넓이는 1이 된다.
<그림 13>의 ④
큰 직각이등변삼각형은 가장 작은 직각이등변삼각형 두 개와 정사각형 하나로 구성되므로 ①에서의 넓이를 이용하면 큰 직각이등변삼각형의 넓이는 2가 된다.

①~④에서 얻은 결과를 이용한 추론으로 학생들은 탱그램에 대한 또 다른 설명을 아래와 같이 제시할 수 있다.

탱그램의 각 도형의 넓이는 정사각형 넓이의 $1/2$배 또는 2배이다.
탱그램의 모든 도형의 넓이를 합하면 8이다. 또는
탱그램 7조각을 모두 사용하여 만든 정사각형의 넓이는 8이다.

탱그램의 도형들이 가지는 길이와 넓이에 대한 위와 같은 관계를 학생들이 이해하게 되면 탱그램 조각을 이용하여 새로운 도형을 구성하거나 주어진 기하학적 모양을 만들어내는 활동을 훨씬 수월하게 해 낼 수 있게 된다.

<그림 14>의 ①과 같이 학생들은 정사각형 대신에 가장 작은 직각이등변삼각형 두 개를 대신 놓을 수 있으며, <그림 14>의 ②와 같이 평행사변형이 들어가야 할 곳에는 가장 작은 직각이등변삼각형 두 개를 놓을 수 있게 된다. <그림 14>의 ③은 직사각형이 들어가야 할 곳에는 중간크기와 가장 작은 크기의 직각이등변삼각형을 모두 이용할 수 있음을 이해한 것이고 <그림 14>의 ④는 사다리꼴을 나타내기 위해서는 정사각형과 가장 작은 직각이등변삼각형을 사용할 수 있음을 나타낸 것이다.



<그림 14> 탱그램 조각의 변의 길이와 넓이 관계에 따른 도형의 구성

논리적 사고의 씨앗은 문제상황을 정확히 진술할 수 있고 다루는 내용과 관련된 대상의 속성, 유사성, 차이점, 그리고 그들 사이의 내적 관계를 정교화해 나가는 것을 배울 때 뿌려질 수 있는 것이라고 한다(구광조 외, 1992, p.118). 학생들은 탱그램을 직접 손으로 다루어 가면서 수학이란 단순히 규칙과 절차를 암기하는 것이 아니라 의미 있고 논리적인 것이며 때로는 즐거운 정신적 활동이기도 하다는 것을 인식할 수 있게 될 것이다.

위에서 다루어진 몇 가지 사례들은 학생들이 연역적으로 추론하는 과정에서 수학의 개념이 어떻게 다른 수학적 개념과 관계되는지를 파악할 수 있는 기회를 제공한다. 아래의 사고들이 그 가능성을 암시한다.

평행사변형의 넓이는 직사각형으로 바꾸어서 생각해 볼 수 있다
평행사변형은 두 개의 삼각형으로 분할된다.
삼각형의 넓이는 평행사변형의 넓이의 반이다.
다각형은 여러 개의 삼각형으로 분해된다. 등등...

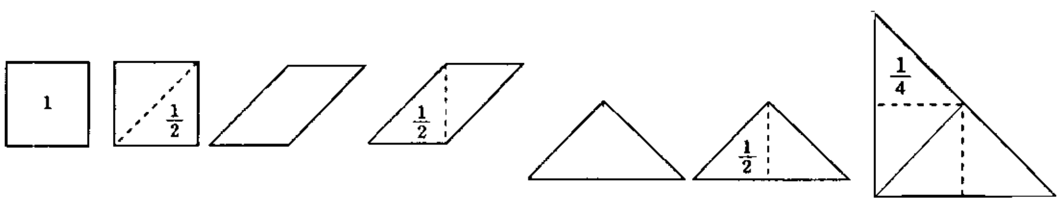
이러한 연관성은 학생들로 하여금 도형을 재배열하거나 분해해도 넓이는 변하지 않는다는 사실을 알게 해준다. 또한 직사각형의 넓이를 결정하는 것과 곱셈과의 연관성도 인식할 수 있게 된다(구광조 외, 1992, p.170).

(2) 수와 연산의 지도에 활용

탱그램 구체물을 이용한 활동 경험을 통해서 교사는 학생들에게 수와 연산에 대한 학습을 강화시켜 줄 수 있다. 학생들은 탱그램을 다루는 조작, 조작의 결과에 대한 설명, 구체적 조작의 표현을 위한 수의 사용 그리고 사용된 수들과의 연산활동을 경험함으로써 문제상황에서 수와 연산이 사용되는 방식을 보다 의미 있게 내면화할 수 있게 된다. 탱그램을 활용하여 학생들이 수와 연산에 대한 의미를 형성해 나가는데 도움을 주는 활동을 제공해보자.

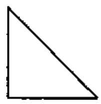
가. 분수의 초기활동과 배의 개념

분수의 초기활동은 무엇을 나누는 아동의 경험에서 유도되어야 한다. 분수에 대한 이해는 단위의 개념과 그 단위를 똑같이 나누는 개념을 바탕으로 이루어질 수 있다. 보통 학교 수업에서는 종이를 똑같이 접어서 분수의 개념을 설명한다. 탱그램이 준비되어 있다면 조각을 분할하는 활동을 통해서 분수의 개념을 간단하게 구체화하여 다룰 수 있게 된다. 특히 같은 크기의 삼각형이라도 전체 크기(단위)가 무엇이냐에 따라 그것을 나타내는 분수 표현이 달라질 수 있음을 탱그램의 구체화에 의해서 쉽게 지도할 수 있다. <그림 15>과 같이 같은 크기의 삼각형은 그것이 포함되어 있는 전체의 넓이에 따라 1/2로 또는 1/4로도 표현 가능한 것이다.



<그림 15> 탱그램의 분할활동을 통한 분수의 표현

(부분)/(전체)로의 분수의 표현을 이해하고 나면 학생들에게 부분을 주고 전체를 만들어 보라는 활동도 제시해 볼 수 있다.



가장 작은 직각 이등변삼각의 크기가 1/4일 때,
1의 크기를 만들어보아라.
크기 1에 해당하는 탱그램조각도 찾아보아라.

<그림 16> '부분'을 통한 '전체'의 구성

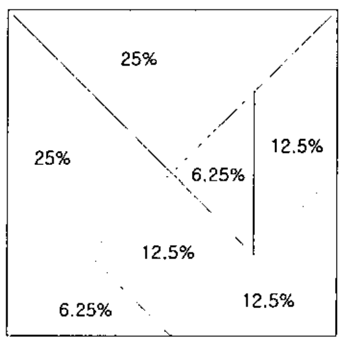
<그림 16>과 같이 부분을 통해 전체를 구성해 보는 활동은 배의 개념을 이해시킬 수 있는 훌륭한 학습상황이 될 수 있다. 특히 초등수준에서 배의 개념을 도입할 때 탱그램을 가지고 넓이의 개념을 구체화하여 다루어보는 것은 학생들이 수 개념과 기하개념을 연관지어 이해하게 하는데 도움을 준다.

나. 수의 다양한 표상

분수, 배의 개념과 더불어 탱그램으로 수의 다양한 표상을 시도해 볼 수 있다. 비와 비례의 개념도 다루어볼 수 있다. 비와 비례, 퍼센트 등의 개념은 초등 고학년 수준에서부터 소개되고 발달되는데 학생들에게 수와 수관계에 대한 지속적인 감각을 제공하기 위해서는 아래와 같은 구체적인 자료를 사용한 학습상황이 제공되어야 할 필요가 있다.

<퍼센트 문제>

탱그램의 각 조각은 전체 사각형 넓이의 몇 %를 차지하는지 구해 보아라.



탱그램 조각의 넓이 사이의 관계를 학생들이 분수로 또는 소수로 때로는 퍼센트로 표상 하여 다루는 경험은 같은 양에 대해서 다양한 표상을 생성하고, 읽고, 사용하는 능력을 개발하는데 도움이 된다. 이러한 능력은 수학을 이해하고 수학을 행하는 학습에 있어서 결정적이다(구광조 외, 1992, p.127). 탱그램의 조각은 분수와 소수, 퍼센트 사이의 관계를 탐구할 수 있도록 하는 훌륭한 학습자료로 이용될 수 있으므로 이를 적절히 활용하면 학생들은 다양한 상황 속에서 비와 비례, 퍼센트 등을 이해하고 적용할 수 있게 된다.

다. 간단한 연산

탱그램에 들어있는 7개 도형의 변의 길이와 넓이 사이에 성립하는 관계를 이용하면 초등 수준에서 다룰 수 있는 연산의 학습 활동도 가능하다. 아래의 문제가 연산과 관련된 문제상황의 한 예이다.

<연산문제>

가장 작은 직각이등변삼각형의 무게가 50 g 이라고 한다면 나머지 조각의 무게는 각각 얼마인가?

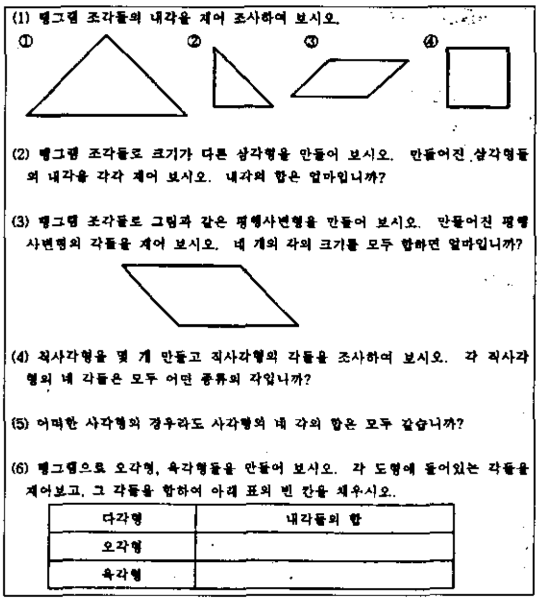
<해답>

정사각형, 평행사변형, 중간크기의 직각이등변삼각형: 100 g,

가장 큰 직각이등변삼각형: 200 g

(3) 측정 지도에 활용

기하는 수 개념뿐 만 아니라 측정개념의 발달에도 기여한다. 측정은 일상생활에서 수학의 유용성을 가장 잘 보여주는 수학의 영역이다. 탱그램을 이용한 측정은 변의 길이, 넓이뿐 만 아니라 각의 측정 영역도 포함될 수 있다. <그림 17>과 같이 제시된 문제상황은 학생들에게 실제적인 활동을 통해 각도를 측정하는 측정기능을 익히고, 각도에 대한 양감을 가질 수 있게 한다. 나아가 다각형의 각도를 재면서 크기가 같은 각들을 알게되고 대칭을 이해하게 된다. 내각의 합을 구하는 활동을 통하여 내각의 합을 구하는 과정에 일정한 패턴이 있음을 알게되고 내각의 합을 구하는 공식도 발견할 수 있는 기회를 제공받게 된다.


(1) 탱그램 조각들의 내각을 재어 조사하여 보시오.
① ② ③ ④

(2) 탱그램 조각들로 크기가 다른 삼각형을 만들어 보시오. 만들어진 삼각형들의 내각을 각각 재어 보시오. 내각의 합은 얼마입니까?

(3) 탱그램 조각들로 그림과 같은 평행사변형을 만들어 보시오. 만들어진 평행사변형의 각들을 재어 보시오. 네 개의 각의 크기를 모두 합하면 얼마입니까?

(4) 직사각형을 몇 개 만들고 직사각형의 각들을 조사하여 보시오. 각 직사각형의 네 각들은 모두 어떤 종류의 각입니까?

(5) 어떠한 사각형의 경우라도 사각형의 네 각의 합은 모두 같습니까?

(6) 탱그램으로 오각형, 육각형들을 만들어 보시오. 각 도형에 들어있는 각들을 재어보고, 그 각들을 합하여 아래 표의 빈 칸을 채우시오.

다각형	내각들의 합
오각형	
육각형	

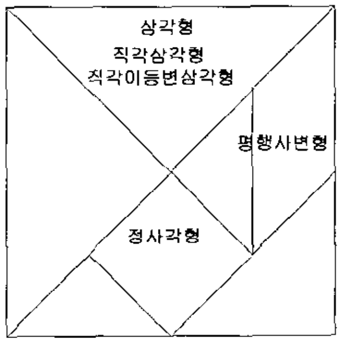
<그림 17> 각의 측정활동(이인환 외, 1999, p.152)

(4) 평면도형의 지도에 활용

공간에 대한 이해는 우리가 살고 있는 고유의 기하적 세계를 해석하고 이해하고 음미하는데 필요하다. 2차원, 3차원의 도형과 그들의 특징에 대한 직관, 통찰, 도형 사이의 상호관계 그리고 도형의 변화는 공간감각의 중요한 측면이다. 공간관계에 대하여 좋은 감각을 가진 아동들과 기하에 대한 개념과 언어를 바르게 습득한 학생들은 수의 개념과 측정의 개념 뿐 만 아니라 다른 상위 수준의 수학내용을 배우는 데에도 훨씬 더 유리한 위치에 있게 된다. 평면도형의 학습에 탱그램을 적극 활용해보자.

가. 평면도형의 성질 탐구 모델

평면과 입체도형의 모델을 분류하고, 구분하여 이해하는 것은 학생들의 기하학적 사고의 발달을 위한 기본이다. 기하개념의 발달은 위계적 관계를 거치면서 진행되는데 먼저 전체 도형을 인식하고 그 다음에 도형에 관련된 성질을 분석한다. 그러한 후에야 도형들 사이의 관계를 알 수 있으며 간단한 연역을 할 수 있게 된다((구광조 외, 1992, p.74).



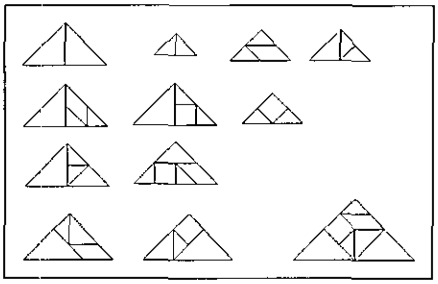
<그림 18> 탱그램 속의 평면도형

탱그램에 들어있는 조각들은 기본적인 평면도형을 여러 위치에서 시각화하고 비교해볼 수 있는 훈련을 제공해 준다. 탱그램에는 모든 평면도형이 포함되어 있는 것은 아니지만 초등수학교육과정에서 중요하게 다루어지고 있는 삼각형, 사각형(정사각형), 평행사변형의 도형들이 포함되어 있다(<그림 18> 참조).

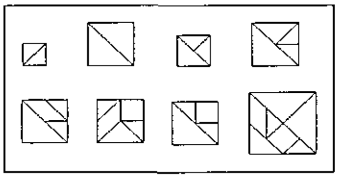
초등 저학년 수준에서 도형을 지도하기 위해 교사는 먼저 학생들로 하여금 탱그램의 조각의 형태에 주목하게 하고 그 형태를 관찰하고 비교해 보도록 한다. 그 과정에서 학생들은 조각들 사이의 비교, 대조를 통해 각 도형들이 가지는 중요한 성질을 간단히 설명할 수 있게 된다. 이 단계를 지나면 도형의 고유한 용어를 설명해야 할 필요성이 생기게 된다. 기하는 삼각형, 사각형, 평행사변형과 같은 고유의 용어를 가지고 있는데, 학생들이 이러한 새롭고 고유한 용어를 정확히 사용하기 위해서는 충분한 시간이 필요하다. 도형의 정의는 도형을 시각화하고, 측정하며, 도형의 성질을 관련짓고 그들의 성질에 따라 도형을 분류하는 경험으로부터 유도되어야 한다. 탱그램은 삼각형, 정사각형, 평행사변형의 모델을 제공하므로 구체를 통해 삼각형, 사각형(정사각형), 평행사변형의 성질을 탐구하는 활동을 제공해준다.

보다 높은 단계에 이르러서는 탱그램의 구성요소인 7개의 조각을 적절히 이용하여 또다른 평면도형들을 구성해 보는 학습활동을 제공해 볼 수도 있다.

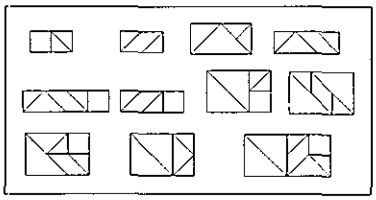
<그림 19>~<그림 23>과 같은 도형의 구성활동을 통해 학생들은 삼각형, 정사각형, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴의 도형이 가지는 기본적인 특징들을 확실하게 인식할 수 있다. 뿐만 아니라 이러한 활동 속에서 탱그램 조각들의 변의 길이와 넓이를 비교하고 이를 바탕으로 도형을 구성하게 되므로 공간감각과 측정 개념, 추론적 사고가 발달될 수 있는 풍부한 경험을 제공받게 된다. 결국 학생들은 창의적인 구성력을 바탕으로 교실수업에서 종이 위에 평면도형을 그리거나 단지 도형의 성질을 말로 설명하면서 도형을 이해해 나가는 것보다 훨씬 더 공간감각을 발달시킬 수 있을 것이다.



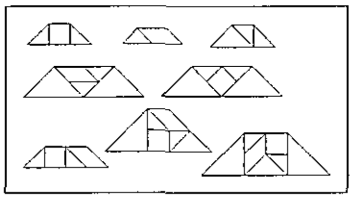
<그림 19> 탱그램으로 구성된 삼각형



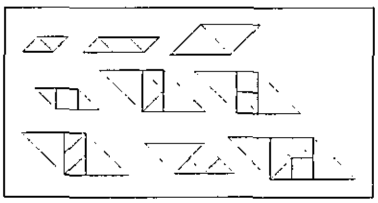
<그림 20> 탱그램으로 구성된 정사각형



<그림 21> 탱그램으로 구성된 직사각형



<그림 22> 탱그램으로 구성된 등변사다리꼴



<그림 23> 탱그램으로 구성된 평행사변형

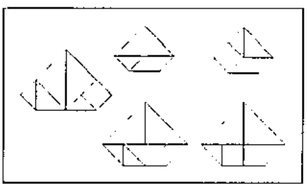
나. 다각형의 구성

위와 같은 맥락에서, 탱그램은 현행 중학교 1학년 수학교육과정에 다각형 단원을 지도하는 데에도 활용될 수 있다. 탱그램의 구성요소인 7개의 조각은 평면도형의 기본이 되는 다각형들로서 이들을 적절히 혼합하여 구성하면 새로운 다각형을 구성해 낼 수 있다. 학생들은 삼각형, 사각형 등 간단한 도형의 이름을 이미 초등학교 때부터 사용하였지만 다각형에 대한 정의를 처음 학습하는 시기는 중학교 1학년 '평면도형' 단원을 배우는 때이다. 학교수학에서 지도되는 다각형의 정의는 다음과 같다.

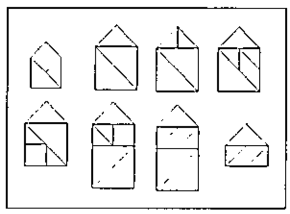
여러 개의 선분으로 둘러싸인 도형을 다각형이라고 한다. 이 때 선분의 개수가 3, 4, 5...인 다각형을 각각 삼각형, 사각형, 오각형.....이라고 하며 선분의 개수가 n인 다각형을 n 각형이라고 한다(김연식, 김흥기, 1994, p.227)

위의 정의를 학습하고 난 후, 탱그램을 가지고 여러 가지 다각형을 구성해 보는 탐구활동을 제시하면 학생들이 다각형의 정의를 확실하게 인식할 수 있을 뿐 만 아니라 공간구성력 및 창의적인 사고를 훈련하는 데에도 상당한 도움을 얻을 수 있다.

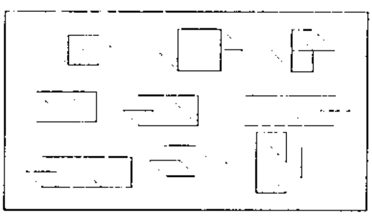
<그림 24>~<그림 27>은 탱그램으로 구성된 다각형의 일부를 보여주고 있다.



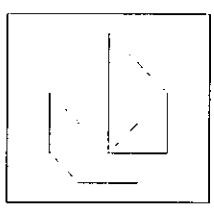
<그림 24> 탱그램으로 구성된 오각형



<그림 25> 탱그램으로 구성된 오각형(밑이 사각형)

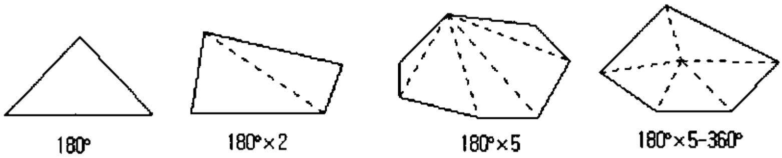


<그림 26> 탱그램으로 구성된 육각형



<그림 27> 칠각형

도형을 결합하고, 쪼개며 변화시킨 결과를 탐구하고 예측하는 것은 기하와 공간감각의 발달을 위한 중요한 활동이다. 탱그램 조각으로 다각형을 구성하는 활동은 그 역 방향의 활동인 다각형을 분해하는 활동과도 긴밀하게 연결될 수 있다. 중학교 1학년 시기에 다각형의 정의를 학습하고 난 후 곧바로 다각형의 내각의 합을 구하는 과정에서 주어진 도형을 몇 개의 삼각형으로 분할하는 활동이 그 예이다(<그림 28>). 탱그램으로 도형을 구성하고 분할하는 활동을 경험한 학생들은 이러한 학습을 상당히 자연스럽게 해 나갈 수 있을 것이다.



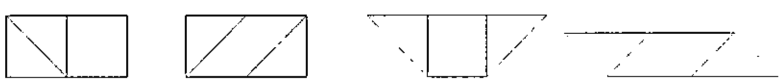
<그림 28>도형의 분할을 이용하여 다각형의 내각의 합 구하기

탱그램의 퍼즐 기능을 활용하여 다음의 <그림 29>와 같은 문제를 구성해 볼 수도 있다.

아래의 힌트를 이용하여 도형을 만들어보아라 **〈힌트〉** 이 모양은 세 조각으로 만들어졌습니다. 이 모양은 네 개의 변으로 이루어져 있습니다. 세 조각 중 한 조각은 삼각형이 아닙니다. 세 조각 중 두 조각은 합동입니다.

<그림 29> 퍼즐형태의 도형 구성 문제

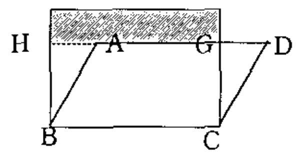
이러한 문제가 수행평가의 일부로 활용된다면 <그림 30>의 예와 같이 학생들이 구성한 답안의 개수가 몇 개인가에 따라 점수에 차등을 두어 평가하는 것도 가능하다.



<그림 30> <그림 29> 퍼즐문제에 대한 답안의 예

(5) 평행사변형의 넓이 공식 지도에 활용

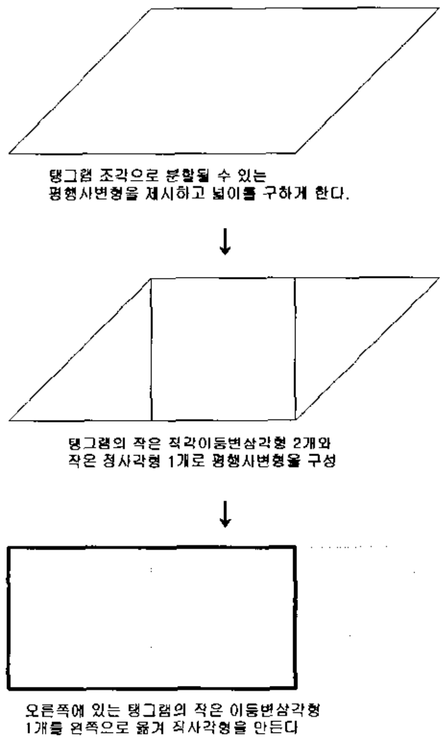
탱그램은 초등 고학년 시기에 평행사변형의 구적공식을 발견시키는 지도과정에서도 활용될 수 있다. 수학적인 태도와 사고를 학생들에게 경험시키고 있는 수업사례(이용률 외 3인 역, 1992b, pp.161-169)를 보면 평행사변형의 넓이와 직사각형의 넓이의 비교를 통해 평행사변형의 넓이공식을 발견시키는 과정을 확인할 수 있다.



<그림 31> 평행사변형과 직사각형의 넓이 비교

평행사변형의 넓이공식을 발견시키는 과정은 <그림 31>과 같은 상황을 안내한 후, △ABH와 △DCG의 크기를 비교해 보도록 하는 활동을 통해 이루어지고 있다. 이 그림은 학생들이 생각한 잘못된 해결방안을 지적하고 빗금친 부분의 넓이를 뺀 직사각형의 넓이와 평행사변형의 넓이가 같다는 것을 이해시키는 과정을 나타내는 것으로서 수업사례에서 교사는 학생들에게 합리적으로 사고하는 태도를 유발시키는 발문을 하고 있다.

탱그램의 작은 직각이등변삼각형 2개와 작은 정사각형 1개를 이용하면 평행사변형의 넓이 공식을 '조작의 의미를 바탕으로 생각'하여 쉽게 이해시킬 수 있다.



<그림 32> 평행사변형의 넓이 지도에 활용

<그림 32>와 같은 과정을 통해 학생들은 평행사변형의 넓이와 새로 구성된 직사각형의 넓이가 같음을 인식할 수 있다. 문제해결과정에서 탱그램의 작은 두 직각이등변삼각형의 넓이가 같다는 사실을 합리적으로 이용하면 간단한 조작의 의미를 바탕으로 평행사변형의 넓이공식을 유도해 낼 수 있는 것이다. 교사는 이 과정에서 평행사변형의 높이와 밑변의 의미를 지도할 수 있다. 문헌의 실험수업에서 제시된 바와 같이 이러한 수업의 과정 속에서 학생들은 이미 알고 있는 직사각형의 넓이를

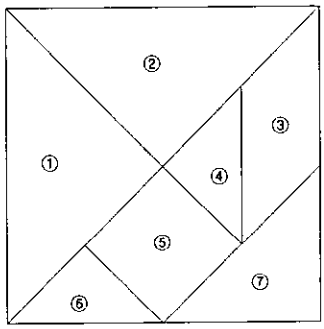
구하는 방법을 바탕으로 문제를 해결하려는 유추적인 생각을 키워나가면서 평행사변형의 구적 공식을 발견할 수 있는 기회를 제공받게 된다(이용률 외 3인 역, 1992b, p.162, p.166).

(6) 피타고라스의 정리 지도에 활용

기하에서 가장 중요한 성질인 피타고라스의 성질은 중학교에서 도입된다. 탱그램에 들어 있는 5개의 크고 작은 삼각형들은 모두 피타고라스의 정리가 적용 가능한 직각삼각형들이다. 따라서 탱그램을 이용한 적절한 문제상황을 만들면 현행 중학교 3학년 수학교육과정에 포함되어 있는 '피타고라스의 정리'를 지도하는데 상당한 도움을 얻을 수 있다.

가. 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계 발견 (귀납적 사고)

우리가 학교수학에서 지도 할 수 있는 귀납적 사고는 구체적으로 주어진 여러 가지 사례에서 파악되는 공통의 성질이 종류가 같은 모든 사례에서 성립할 것으로 보고 그에 대해 일반적인 주장을 하는 것이다. 귀납적 사고의 전형적 형식은 첫째, 개개의 사례 사이의 유사점을 알아내고 둘째, 모든 사례에서 일반적인 관계를 도출하는 일반화의 단계가 이어진다. 셋째, 그 일반적인 관계가 단지 하나의 잠정적인 추측에 지나지 않는다는 사실을 인식하는 것이다. 따라서 그 추측한 일반성이 참임을 보다 확실히 하기 위해서는 새로운 자료를 모아 확인할 필요가 있다. 보다 형식적인 사고수준에 이르러서는 추측한 일반성을 연역적 사고에 의해 증명을 하는 것도 가능하다.



<그림 33> 탱그램의 구성요소

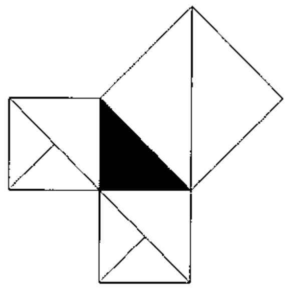
피타고라스의 정리를 증명하는 것은 연역적 사고에 의한다. 교사는 많은 수의 학생들이 어려워하는 증명과정을 곧바로 지도하기보다는 학생들이 모든 직각삼각형에서 성립하는 세 변의 길이 사이의 관계를 형식적으로 증명하여야 할 필요성을 느낄 수 있도록 하는 문제상황을 제공해 줄 필요가 있다. 다시 말하면 구체적으로 주어진 몇 개의 직각삼각형에서 세 변의 길이 사이의 관계를 탐색해 보도록 하는 것이 필요하다는 것이다. 교사는 먼저 <그림 33>의 ①, ②, ④, ⑥, ⑦ 과 같은 탱그램의 직각삼각형 조각들을 학생들에게 나누어준다. 그리고 측정과 간단한 계산을 통해 주어진 직각삼각형들에서 세 변의 길이 사이의 관계인 $a^2+b^2=c^2$을 학생들이 발견해낼 수 있도록 적절한 발문을 던져 지도한다[9]. 이 단계가 있

9) 실제 삼각형의 세 변의 길이를 측정하여 주어진 직각삼각형들에서 모두 $a^2+b^2=c^2$가 성립

은 후에 발견된 관계가 임의의 모든 직각삼각형[10]에서 성립할 것이라는 귀납에 이르도록 한다. 그리고 귀납에 의한 추측이 참임을 보장받기 위해 연역 즉, 피타고라스 정리의 증명이 필요함을 인식시킨다. 마지막으로 피타고라스정리를 교과서에 제시되어 있는 다양한 증명방법을 지도하는 것이 바람직하다.

나. '피타고라스 정리' 증명을 위한 모델구성

피타고라스 정리의 증명 방법은 교과서에 소개된 여러 가지 방법 이외에도 다양한 방법이 있다. 그러나 탱그램의 조각을 이용하면 각 조각의 변의 길이와 넓이에 대한 간단한 계산을 이용하여 피타고라스의 정리를 쉽게 증명할 수 있는 모델을 구성해 볼 수 있다. 그러나 이 방법은 탱그램 한 세트 안의 7개의 조각만을 가지고는 할 수 없다. 방법은 두 세트의 탱그램에서 큰 직각이등변삼각형 두 개, 중간 크기의 직각이등변삼각형 두 개, 가장 작은 직각이등변삼각형 네 개를 이용하여야 한다. 학생들에게 먼저 <그림 34>에 가운데 위치한 직각이등변삼각형[11]을 주고(탱그램 조각으로 연결될 수 있는 직각이등변삼각형을 종이 위에 그려서 제시할 수도 있다) 그것의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 탱그램 조각으로 구성하도록 한다. 그러면 학생들은 <그림 34>와 같이 피타고라스 정리의 증명방법에서 우리가 가장 익숙하게 보아 온 모델을 쉽게 완성해 낸다. 증명은 가운데 위치한 삼각형의 세 변의 길이를 제곱하고, 정사각형의 넓이를 계산함으로써 간단하게 이루어진다.


<그림 34> 피타고라스정리의 증명모델 (탱그램 두 세트 이용)

학생들이 직접 이러한 모델을 제작하고 자신이 구성한 모델에서 피타고라스의 정리를 증명해 낸다면 그 결과는 교과서에 주어진 증명과정이나, 교사의 설명으로 주어진 증명 보다 훨씬 더 강력하게 학생들의 사고에 남아있게 될 것이다. 이러한 탱그램의 활용은 학생들의 조작활동, 공간감각과 수 개념을 이용하여 그들의 자연스러운 직관을 자극하고 탐구적 경험을 제공한다. 피타고라스 정리의 증명을 상당히 어려워하는 대부분의 중학교 3학년 학생들에게 위와 같은 활동경험은 수학에 대한 자신감을 높여줄 수 있는 좋은 기회가 될 것이다.

함을 관찰하는 과정이 교사의 지도아래 학생들의 활동으로 주어져야 한다.

10) 탱그램의 삼각형들을 모두 직각 이등변 삼각형으로 직각삼각형의 특수한 경우에 해당되는 것이다.

11) 탱그램에서 중간 크기의 직각이등변삼각형의 크기이다.

다. 제곱근의 연산 지도에 활용

탱그램의 조각들로 정사각형을 만들어 보게 한 후에 자신이 만든 정사각형의 한 변의 길이를 계산해 보도록 하는 과정은 피타고라스 정리의 적용과 더불어 무리수를 계산하는 학습상황을 제공해줄 수 있다. 아래의 <제시문제 1>을 보자.

<제시문제 1>

탱그램의 조각들 중의 몇 개를 이용하여 만들어질 수 있는 모든 정사각형을 구성해 보아라. 구성된 정사각형의 모형을 그리고 정사각형의 한 변의 길이와 정사각형의 넓이를 구해 보아라. [조건: 탱그램 안에 있는 정사각형 조각의 한 변의 길이는 2이다.]

위의 문제를 해결상황에서 학생들은 변의 길이를 구하기 위해 피타고라스 정리를 이용하고 문제에 계산과정에서 무리수의 합과 곱을 개념을 적절히 다룰 수 있게 된다. <제시문제 1>에 대한 해결은 <그림 35>에 제시되어 있다.

무리수와 유리수가 혼합되어 있는 문제를 지도하는 과정에서 교사들은 다음과 같은 문제를 다룬다.

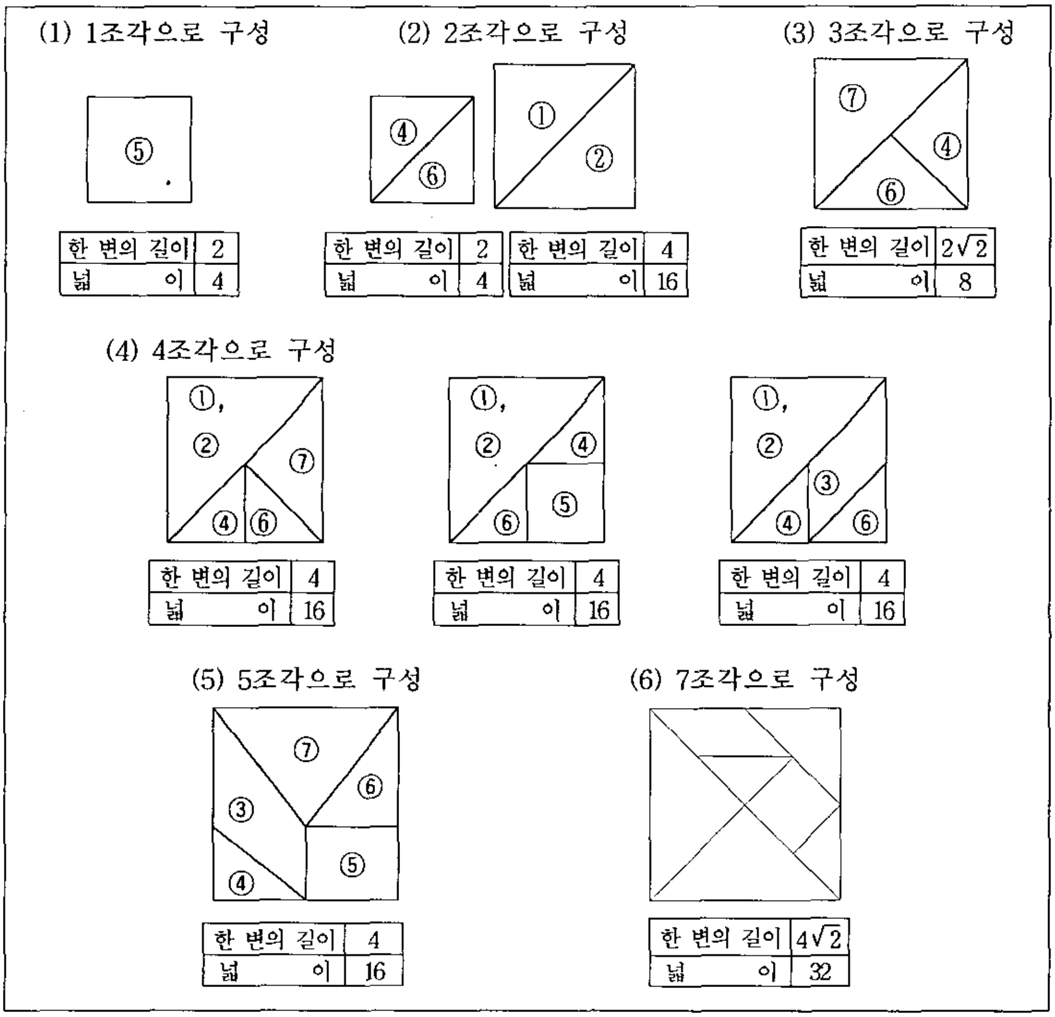
$(2+5\sqrt{2})$ + $(4+11\sqrt{2})$를 계산하시오

그러나 아래의 <제시 문제 2> 와 같이 구체적 상황에서 무리수와 유리수가 적절히 혼합되어 그 합을 구해야 할 필요성이 있는 문제상황을 학생들에게 던져주는 것이 보다 의미있어 보인다.

<제시문제 2>

탱그램 7조각을 모두 사용하여 만든 정사각형의 둘레와 내부에 그어진 모든 선분의 길이의 합을 구하시오. (정답: $10+9\sqrt{2}$)

위의 <제시문제 1, 2>는 평가 대상의 수준에 따라 조건을 달리하여 활용될 수도 있다. 예를 들면, 정사각형의 한 변의 길이를 2가 아닌 $a\sqrt{b}$ 꼴(예를 들면, $6\sqrt{2}$ 와 같은)로 주면 학생들에게는 보다 복잡해진 계산상황이 제공되는 것이다. 상 수준에 있는 학생들을 위해서는 변의 길이를 $a+b\sqrt{c}$ 꼴로 제시할 수도 있다. 또한 정사각형의 한 변의 길이라는 조건 대신에 정사각형의 넓이 조건을 줄 수도 있다.



<그림 35> 제시문제 1에 대한 해결 : 탱그램으로 만든 정사각형

위의 <제시문제 1, 2>에 그치지 않고 분석적 사고를 요하는 문제상황을 보충하여 제시하는 것도 가능하다. <제시문제 3>이 그 예이다.

<제시문제 3>

탱그램의 각 조각의 넓이를 이용하여 생각해보면, 탱그램 6조각을 가지고서는 어떠한 정사각형도 구성될 수 없음을 알 수 있다. 그 이유를 설명하여 보아라.

위의 문제를 해결하기 위해서는 학생들은 참이라고 알려져 있는 기지의 사실을 이용하여

연역적인 설명을 하여야 한다. 특히 문제해결의 전략 가운데 분석적 사고의 핵심인 '거꾸로 생각하기(working backward)'를 하면 보다 쉽게 문제를 해결할 수 있게 된다.

<제시문제 3 풀이>

(1) 탱그램의 각 조각의 넓이를 구하면 ①과 ②의 넓이는 8, ③, ⑤, ⑦의 넓이는 4, ④, ⑥의 넓이는 2이다.

(2) 7조각 모두를 가지고 만들어진 정사각형의 넓이가 32였으므로 6조각으로 정사각형을 만들때, 가능한 넓이는 전체 넓이 32에서 각 조각 하나의 넓이를 뺀 수 즉, 24 또는 28 또는 30이 가능하다.

(3) 정사각형의 넓이가 24, 28, 30이 되기 위해서는 정사각형의 한 변의 길이가 $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{7}$, $\sqrt{30}$ 이라는 조건이 필요하다. 그러나 탱그램 각 조각들의 변의 길이는 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, 4 뿐이므로 이들 길이를 더하여서는 $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{7}$, $\sqrt{30}$ 이라는 수를 만들 수 없다.

(4) 따라서 탱그램 6조각으로는 정사각형을 만들 수 없다.

위와 같은 문제를 학생들 스스로가 잘 해결해 나갈 수 있도록 교사가 적절한 발문을 제시한다면 학생들에게 연역적으로 사고하는 것을 경험시킬 수 있는 훌륭한 학습상황을 연출할 수 있다. 학생들이 이러한 학습을 적절히 해 나갈 수 있을 때 그들은 어떤 주장의 근거가 되는 설명을 하기 위해서 연역적으로 생각해야 할 필요성을 스스로 느끼게 된다. 그리고 현재의 문제상황을 의문의 시각으로 바라보면서 주어진 조건을 이용하고 불충분한 조건이 무엇인지를 파악해가며 자신의 설명에 대해 확신을 갖거나 주장을 펼 의욕을 갖게 되는 것이다.

Ⅳ. 맺음말

본 고는 수학교사들로 하여금 탱그램을 수학의 학습에 어떻게 활용할 수 있는가에 대한 안목을 갖게 하는데 목적을 둔 것이다. 이러한 입장아래 수학수업에 탱그램을 효과적으로 활용할 수 있도록 하는 지도 방법의 예를 제시하는데 중점을 두고 수, 연산, 측정, 도형, 추론 등 다양한 영역에서의 탱그램 활용방법을 소개함으로써 그것의 수학교육적 가치를 드러내 보고자 하였다. 탱그램이 수학교육의 소재로 자주 취급되어가고 있는 최근의 상황에 비추어 보았을 때, 수학의 문제해결과정과 수학적 사고의 교육에 탱그램을 적절하고 효과적으로 활용하는 방안을 모색해 보는 것은 상당히 의미 있는 작업일 것이다.

본 논문에서 설명된 바와 같이, 탱그램의 구성요소인 7개의 조각은 평면도형의 기본이

되는 다각형으로 이루어져 있고 7개의 다각형들이 도형의 넓이와 변의 길이 사이의 일정한 비로 이루어져 있다는 사실을 이용하면 수학교사들은 초등학교, 중학교 수준에서 다루어지는 여러 가지 수학적 개념과 내용을 구체화하여 다룰 수 있게 된다. 특히 기하교육의 초기 단계에서 탱그램을 유용하게 활용할 수 있다. 이러한 사실이 분명함에도 불구하고 탱그램을 단순히 모양을 맞추는 퍼즐놀이수준에서만 다루게 된다면 이는 학생들이 탱그램을 이용한 수학의 실제적 활동에서 얻을 수 있는 수많은 이점을 경험할 수 없도록 하는 것이다.

탱그램을 수학수업의 보조자료로 사용하려는 교사는 그것을 통해 수학의 내용을 어떻게 하여 구체화할 수 있는가, 그 과정에서 학생들로 하여금 수학적인 생각을 어떻게 인식해 나갈 수 있도록 도와줄 수 있는가에 초점을 맞추어 교재연구 및 지도활동을 해 나가는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤(1998). 초등수학교육론. 동명사.
구광조, 오병승, 류희찬 공역(1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 경문사.
금종해, 이만근, 이미라, 김영주(2000). 중학교 수학 7-나. 고려출판.
김연식, 김흥기(1994). 중학교 수학 1. 두산동아.
김용태 외 3인 편역(1998). 초등교사를 위한 진단과 처방수학. 경문사.
김효정(1995). 구체적 조작물을 이용한 활동 지향적 수학 수업에 관한 연구. 교육학 석사 학위 논문. 이화여자 대학교 교육대학원.
수학사랑(2000). 저널 수학사랑. 통권 23호, pp.72-75
신항균(2000). 중학교 수학 7-나. 형설출판사.
이용률 외 3인 역(1992a). 數學的인 생각·態度와 그 指導 I: 數學的인 생각의 具體化. 경문사.
이용률 외 3인 역(1992b). 數學的인 생각·態度와 그 指導 II: 問題解決過程과 發問分析. 경문사.
이인환, 류기천, 이석희(1999). 수학교육과 탱그램 활동. 한국수학교육학회시리즈 F <수학교육학술지> 제 3집, pp. 139-168
이준영, 장훈, 최부림, 이상은(2000). 중학교 수학 7-나. (주)도서출판 디딤돌
조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재(2000). 중학교 수학 7-나. (주)금성출판사
황석근, 이재돈(2000). 중학교 수학 7-나. 한서출판사