

수학교육에서의 조작교구에 관한 연구

김 수 미 (인천교육대학교)

I. 들어가며

수학은 추상을 다루는 학문이다. 수학지도의 주요 목표는 학생들이 수학적 개념이나 기술을 단지 이해하도록 하는 것이 아니라 추상적·상징적 수준에서 그러한 것을 효과적으로 조작하도록 하는 것이어야 한다. 그러나 문제는 대부분의 아동들이, 심지어는 일부 성인들조차도 구체적 조력물 없이는 곧바로 추상의 세계로 들어서지 못한다는 것이다. Weaver와 Suydam(1972)은 의미로운 수학 지도에 대한 사람들의 입장과 그 동안의 연구결과를 분석하여, 구체적 대상의 사용이 의미의 개발과 밀접하게 관련되어있음을 밝혀내었다. 즉 아동이 구체적 대상과 더불어 작업하고, 자신이 하고 있는 것에 대해 말할 때, 의미는 창조되고 동화된다는 것이다. 더욱이 의미의 개발은 반복적인 훈련이나 연습에 선행되어야 하며, 따라서 교구와의 작업은 상징에 의한 연습에 선행되어야한다는 것이 지적되고 있다. 즉 수학 학습에서의 교구 사용의 목적은 학생이 자신의 구체적 환경과 수학의 추상적 수준 사이의 틈새를 연결하도록 하는 것이다(Fennema, 1973). 물론 이와 같은 본질적 목적 이외에도 조작교구를 통한 학생들의 실제적인 활동은 동기와 흥미를 유발하는 효과를 거둘 수도 있을 것이다. 따라서 조작교구는 수학교육 분야에서 매우 중요하고 필요한 연구 주제라 할 수 있을 것이다.

수학지도시 이용될 수 있는 교구의 개발은 50년대 말부터 몇몇 학자들에 의해 시작되었으며, 현재까지 매우 다양한 교구들이 개발되어 왔다. 그러나 문제는 조작교구에 대한 믿음이 반드시 행동으로 전이되는 것은 아니라는 사실이다. Suydam(1982)의 조사에 의하면 미국의 교사들은 대체로 조작교구가 아동이 수학적 개념을 형성하기 위한 기초를 세우는데 도움이 된다고 생각하고 있다한다. 그러나 Scott(1983)의 조사에서는 대부분의 교사들이 수학지도시 교과서 이외의 다른 교구를 그리 자주 사용하지 않는 것으로 드러났다. 그는 미국의 대도시 지역 75개 초등학교 교사들을 대상으로 수학교구의 사용 실태를 조사하였는데, 1

학년 교사들은 상대적으로 교구를 자주 사용하였으나, 학년이 상승하면서 교구사용의 빈도가 큰 폭으로 떨어지는 것으로 나타났다. 또한 자주 사용되는 교구의 종류도 자와 플래쉬 카드 등 단순한 교구 몇 가지에 한정되어 있어, 수학지도에서 교구 사용에 많은 문제점이 있음이 드러났다. 물론 이러한 조사는 80년대에 이루어진 것으로 오늘의 교육상황과 동일하다 할 수는 없지만, 그렇다고 그간 큰 변화가 있었다고도 할 수 없을 것이다.

제대로만 활용한다면 큰 효과를 거둘 수 있는 조작교구가, 그 본래의 목적을 달성하지 못하고 교실수업에서 외면 당하고 있는 이유는 무엇일까? 시간이나 경비의 제약, 교구의 종류나 질의 한계, 교구를 활용하고 감독·관리할 교사의 자질 문제 등 실로 많은 문제들이 실제적인 교구 활용을 방해하고 있는 듯 하다. 그러나 보다 근본적인 문제는 교사들의 의지를 뒷받침해줄 만한 체계적이고 실증적인 연구가 부족하다는 점이다. 어떤 문맥에서, 어떤 교구를 이용해, 어떤 식의 수업을 할 것인가와 같은 구체적 아이디어에 대한 연구가 아직은 충분히 축적되어있지 않기 때문에, 교사가 교구 사용에 대한 긍정적인 태도와 의지를 나타내 보이는 것만으로는 교구가 학교수업에 실제로 활용되리라 기대하는 것은 무리일 것이다. 물론 새로운 조작교구의 개발도 중요하지만 현시점에서 보다 중요한 것은 기존에 개발된 조작교구의 보다 충실한 활용방안에 대한 생각일 것이며, 그에 대한 연구가 진작되게 하는 것이 본고의 궁극적 취지라 할 수 있다. 즉 본고는 조작교구에 관해 관심을 갖고 그에 대한 연구를 시작하려는 사람에게 체계적인 안내서의 역할을 하고자 한다.

이에 따라 본고에서는 먼저 조작교구의 개념 정의와 배경학습 이론을 간략히 살펴본다. 이어 미국을 중심으로한 기존의 연구 문헌을 종합·분석하여, 그것을 다시 주제별로 9개의 영역으로 분류하였으며, 각각에 대한 현재까지의 연구결과를 간략히 정리하였다.

II. 조작교구의 정의

‘Manipulative Material’ 혹은 간단히 ‘Manipulative’로 불리는 조작교구는 글자 그대로 해석하자면 ‘손으로 다룰 수 있는 교구’가 될 것이다. 그러나 이것만으로는 손으로 다룬다는 것이 무엇을 의미하는지, 그리고 손으로 다룰 수 없는 교구란 과연 어떤 것인지에 대한 의문이 생길 것이다. 따라서 일반교구와 대비되는 조작교구의 진정한 의미를 이해하기 위해서는 우선 일반 교구에 대한 개념을 살펴 볼 필요가 있다.

먼저 Bruner는 교구의 개념을 매우 넓게 파악하여, ‘간접적 경험을 위한 교구’, ‘모형교구’, ‘극화 교구’, ‘자동화 교구’ 등으로 분류하였다. 이 분류에 의하면 영화, 텔레비전, 마이크로

필름, 녹음기, 책, 시범 실험, 삽화, 모형, 계열화된 학습 프로그램, 기록영화 등 교구의 범위는 실로 넓고 다양하다. 교구에 대한 이와 같은 입장은 어떤 자료 혹은 도구가 수업에 활용될 수만 있다면 곧 교구로 간주할 수 있다는 생각이 바탕에 깔려 있는 것이다.

교구에 대한 또 다른 분류로는 김응태 외(1984)의 것이 있는데, 조작교구의 의미를 이해하는데 다소 도움이 될 것이다. 첫째, 아동에게 구구를 암기시키기 위한 소위 '플래쉬 카드'나 계산 연습을 위한 학습 프로그램과 같은 기계적 훈련을 위한 교구가 있다. 둘째, 어떤 특정한 수학적 개념이나 원리 등을 이해시키기 위한 모형, 예를 들면 평행사변형의 넓이, 각주의 부피, 피타고라스의 정리, 투영도 등을 설명하기 위한 모형이나 입체모형 등을 생각해 볼 수 있다. 흔히 수학자료실에 보관되어 있는 교구는 대부분 이에 해당될 것이다. 그런데 이러한 교구를 교사의 일방적인 설명에 이용하는데 그침으로서 소기의 목적을 충분히 달성하지 못하는 경우가 흔히 있다. 물론 이러한 경우 교구를 이용하는 것이 이용하지 않는 것 보다 바람직하겠지만 보다 큰 효과를 얻어내기 위해선 아동에게 직접 그것들을 다루어 보도록 하는 경험을 제공해 주는 것이 중요할 것이다. 셋째로 수학적 구조 특히 수구조를 구체화한 'Cusinare 색막대'와 논리 혹은 Boole 대수 지도를 위한 Dienes의 '속성블럭' 등이 있다. 이는 1960년대 이후의 수학교육현대화 운동과 더불어 개발된 것으로 일단의 수학적 관계를 유기적으로 상호 관련시켜 이해시키고 발전시키도록 고안된 것이다.

교구에 대한 위의 분류는 분류기준이 그다지 명확하다고는 할 수 없지만, 수학적 구조를 어떤 식으로 내포하고 있는가에 주요 초점이 주어진 듯 하다. 즉 첫 번째 유형인 플래쉬카드나 계산 연습을 위한 학습 프로그램의 경우 교구 자체가 수학적 구조를 내포하고 있다고는 볼 수 없다. 이것은 주로 단순암기나 연습 등을 위한 반복 사용에 편리를 주는 것으로, 이것을 통해 아동이 수학의 어떤 구조를 발견하게 되리라고는 기대할 수 없을 것이다.

두 번째 유형인 모형 혹은 입체 모형의 경우는 수학적 구조를 그대로 표현하는, 하나의 수학적 아이디어에 대한 시각화라 할 수 있다. 예컨대 삼각뿔을 정의로만 설명한다면 아동이 삼각뿔이 무엇인지를 이해하기가 쉽지 않을 것이다. 물론 그림으로 보여줄 수도 있지만 실제로 나무나 플라스틱으로 만들어진 교구를 통해 삼각뿔 개념에 대한 보다 확실한 이해를 얻을 수 있을 것이다. 그러나 이것은 수학적 아이디어 혹은 구조가 너무 노골적으로 표현되어 있어서, 아동으로 하여금 스스로 수학적 아이디어나 구조를 발견하도록 하는 소위 수학적 활동을 촉발시키지는 못하는 듯하다.

위에서 분류된 교구의 마지막 유형은 이제까지 논의된 두 가지 유형과 달리 수학적 구조를 내포하고 있으나, 그 구조가 한눈에 포착되지는 못하게끔 고안되어있다. 즉 교구가 내포하고 있는 수학의 구조를 발견하기 위해서는 아동의 적극적 개입이 절대적으로 필요하며,

교구에 따라서 또한 교구를 사용하는 교사의 능력에 따라서 하나의 교구를 통해 몇 가지의 수학적 아이디어를 지도하는 것이 가능하다. 이 세 번째 유형의 교구가 바로 이 논문에서 다루고자 하는 조작교구와 근접한 개념이라 할 수 있다.

지금까지는 교구의 광의적 개념을 살펴보았고, 이제 본고의 주제인 조작교구의 개념으로 돌아가 보자. Cathcart(1977)에 의하면 조작교구는 '수학적 개념을 병합하고, 여러 가지 감각에 호소하며, 학생이 만질 수 있고 여기저기 옮길 수 있는 구체적 모델'이다. 이와 유사하게 Kennedy(1986)는 조작교구를 '몇 가지 감각에 호소하는, 만질 수 있고 여기저기 옮길 수 있으며, 재배열이 가능하며, 아동에 의해 조작될 수 있는 물체'로 정의하였다. 이 두 정의는 학생이 조작을 위해 교구를 소유함을 의미한다. 다시 말해 교사가 보조기구를 사용하여 실연하는 것을 학생이 관측하는 것만으로는 충분치 않다는 것이다. Young(1983)은 조작교구를 '물리적 참여를 통해 추상화되어질 수 있는 수학적 아이디어를 표현하는 물체'로 정의하므로써, 앞의 두 정의와 마찬가지로 학생의 활동을 강조하면서도 동시에 수학적 모델의 역할을 조작교구가 수행할 수 있어야함을 강조하고 있다.

정리하자면 조작교구라 불리기 위해서는 다음과 같은 몇 가지 특성을 지니고 있어야 한다. 첫째, 조작교구는 학생의 지각적 감각에 자극을 주어야 한다. 예컨대 여러 가지 울긋불긋한 색상으로, 혹은 여러 가지 기하적 도형으로 되어있어 학생의 시각을 자극하거나, 길이가 늘어났다 줄어들었다, 혹은 빠졌다 끼었다 할 수 있게 하여 학생의 촉각을 자극하는 것이어야 한다. 둘째, 학생이 만질 수 있어야 한다. 조작교구는 크기가 너무 작거나, 유리등의 깨지기 쉬운 재질로 되어 있어 학생이 만질 수 없는 것이어서는 안된다. 셋째, 이동과 재배열이 가능해야 한다. 조작교구는 학생의 책상 위에서 다루어지는 것으로 이 위치에서 저 위치로 가능한 자유롭게 옮겨질 수 있는 것이어야 한다. 예컨대 덧셈 혹은 뺄셈의 지도시 카운터의 이동과 재배열은 연산의 과정을 역동적으로 이해하는데 도움이 될 것이다. 넷째, 수학적 아이디어를 표현해야 한다. 예컨대 베이스 텐 블록으로는 자릿값 개념이 표현가능하며, 기하판으로는 여러 가지 도형의 기하학적 모양뿐만 아니라 도형의 넓이 개념이 지도 가능하다.

이상의 네 가지 기준에서 본다면, 베이스 텐 블록이나 저울 같이 수학적 개념을 가르치기 위해 특별히 고안된 것 이외에도, 돈이나 계측 도구 등과 같이 주변환경에서 차용된 것도 조작교구의 범주에 포함시킬 수 있을 것이다. 즉 사용하는 사람에 따라 그리고 사용되는 용도에 따라 조작 교구의 범주에 속할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있을 것이다.

III. 배경 학습 이론

수학교육 분야에서의 조작교구에 대한 관심은 사실상 새로운 것이라고는 할 수 없다. 학교현장에서 사용될 실제적 목적을 지닌 조작 교구의 개발은 1960년대에 비롯되었지만, 조작 교구가 수학 교수학습에 절대적으로 필요하다는 것을 뒷받침해 줄 이론적 토대는 그 이전인 1930년대의 유의미 이론에서부터 찾아볼 수 있다. 19세기와 20세기 초반까지 번창했던 정신훈련에 대한 연구와 자극 반응이론은, 1930년대 William Brownell에 의해 창안된 유의미 학습 이론에 의해 큰 타격을 받게 되었다. 유의미 학습 이론은 아동이 어떤 내용을 제대로 학습하기 위해서는, 현재 학습하고 있는 내용의 바탕이 되는 기본 개념을 먼저 이해해야 한다는 신념에 근거한다. 글자 그대로 학습 과정이 아동에게 의미를 주는 방향으로 진행되어야 한다는 것이다. Brownell의 이와 같은 주장은 아동이 수학 학습에 필요한 개념을 형성하도록 하는데 조작교구를 활용하는 문제에 처음으로 관심을 갖게끔 만들었다 할 수 있다.

Piaget(1952)와 Skemp(1982)의 연구는 공통적으로 모든 인간은 그들이 성장함에 따라 몇 단계를 통과한다는 결론을 내리고 있다. Piaget는 인지적 발달이 네 단계-감각운동기, 전조작기, 구체적 조작기, 형식적 조작기-에서 발생한다고 생각했다. 조작교구는 구체적 조작기 이전의 단계에서는 필수적이지만 그 이후의 단계에서도 역시 중요한 학습 조력물이 될 것이다. 학생이 획득하게 되는 정신적 이미지와 추상적 아이디어는 그들의 경험에 기초하는 것이다. 따라서 다양한 물체를 보고 다룬 경험이 있는 학생들은 빈약한 경험을 가진 학생들보다 명확한 정신적 이미지를 가지게 되며, 추상적 아이디어를 보다 완전하게 표현할 수 있게 될 것이다. Skemp(1982)는 학습을 지배하는 두 단계의 감독 시스템을 주장했다. 첫 번째 단계에서는 학습자가 학교의 안팎에서 물체를 조작하는 경험이, 학습을 심화시키고 아이디어를 내면화시키는 데 기초가 되는 물리적 행동을 학습자에게 제공한다. 두 번째 단계에서의 행동은 첫 번째 단계의 행동에 기초한 것으로, 물리적이기보다는 정신적인 것이라 할 수 있다.

Dienes(1960)는 아동에 의한 조작 교구의 사용을 절대적으로 옹호한 학자 중 한 사람으로, 그 자신이 직접 여러 가지 교구를 개발하기도 했다. 특히 아동의 수 이해를 형성하기 위한 멀티베이스 블록과 카운터 등의 교구들을 개발하고 그 사용을 상세화하였다. 그가 개발한 고안 도구들은 하나의 수학적 개념에 대한 적절하고 구체적인 표현을 제공한다. 또한 그는 한 개념에 대한 단일 표상보다는 다양한 형태의 표상을 아동들에게 제공하는 것이 보다 효과적임을 주장한다. 예컨대 자릿값 개념 하나를 학습시키기 위해서는 그것을 표현하는

여러 가지 학습 교구들을 아동에게 경험시키므로써, 아동이 그들의 공통성이 바로 자릿값 개념이라는 것을 스스로 터득할 수 있도록 해야한다고 주장한다. 또 다른 예로, 나무막대 묶음, 텐 프레임, 주판 등의 교구들은 그 형태는 다르지만 모두 힌두 아라빅 수 체계의 의미를 학습하는데 사용되어질 수 있는데, Dienes의 주장에 의하면 아동은 그와 같은 다양한 경험을 거쳐, 아라빅 수 체계에 대한 개념을 추상화시킬 수 있게 되는 것이다. 즉 보조기구를 조작하는 행위는 학생으로 하여금 수학의 초점인 패턴과 관계를 경험하도록 만든다 (Adler, 1966).

조작 교구 사용의 강점에 대한 이러 저러한 이론의 논의는 설득력 있다. 그러한 학습 이론은 공통적으로, 조작적 경험에 확고하게 기초한 아동들이 그렇지 못한 아동들에 비해 그들이 살고 있는 실세계와 수학의 추상적 세계 사이의 틈새를 더욱 잘 연결한다는 것을 제안하고 있다. 조작교구는 아동이 수학적 아이디어의 진정한 의미를 깨우치는데, 더 나아가 이러한 아이디어를 실세계에 적용하는데 모두 도움이 될 것이다.

IV. 조작교구 연구의 주요 연구 영역

지금까지는 주로 조작교구의 긍정적 측면을 기술하여왔다. 따라서 독자에 따라 조작교구 사용의 필요성이나 그 효용성에 대해 어느 정도 긍정적인 입장을 취하게 되었을지 모르겠다. 그러나 앞서 언급되었듯이, 조작교구의 실제적 적용을 위해선 그것을 뒷받침하는 이론적·실증적 연구가 아직은 부족하다. 조작교구와 관련된 다양한 측면의 문제가 교사나 학자들에 의해 논의되고 있으나, 명확하게 하나의 결론으로 도달하지 못한 채 아직까지 적지 않은 논쟁을 불러일으키고 있다. 이와 관련하여 Suydam(1982)과 Moser(1986)는 각각 조작교구와 관련하여 회자되고 있는 당시의 논쟁점을 몇 가지 항목으로 구분하였는데, 여기서는 그 둘을 종합하여, 다시 9개의 문항으로 구분하였다. 구체적 내용은 다음과 같다.

- 성취에 긍정적인 영향을 주는가?
- 모든 학습자에게 유익한가?
- 어떤 수학내용에 적합한가?
- 누구에 의해 다루어지는 것이 보다 효과적인가? 교사가나 학생인가?
- 하나의 수학적 개념을 이해시키기 위해 몇 가지 조작교구가 제시되어야하나?
- 어떤 방식의 수업이 조작교구 도입에 효과적인가? 개방인가 구조화인가?

- 교수에 통합되어야 하는가 아니면 보조적이어야 하는가?
- 어떤 조작교구가 사용되어야 하는가?
- 어디서 사용되어야 하는가? 수학실험실인가 교실인가?

이 논문에서 시도하고자 하는 것은 각 문항에 대한 답을 제공하고자 하는 것은 아니다. 여기서의 각 문항과 관련하여 현재까지 연구된 사항이 간략히 소개된다. 따라서 현재로는 각 문제에 대한 최종적인 판단은 독자 자신이 내릴 수밖에 없을 것이다.

1) 성취에 긍정적인 영향을 주는가?

조작교구와 성취와의 문제는 조작교구의 효용성과 직결되는 문제이기 때문에, 사실상 조작교구와 관련된 문제 중 가장 관심이 모아지는 문제일 것이다. Parham(1983)은 초등학교를 대상으로 하는 64편의 연구를 분석하여, 조작 교구를 사용하는 학생과 사용하지 않는 학생의 성취 점수에 확실한 차이가 있음을 보고하였다. 조작 교구를 사용한 학생은 85 퍼센트에서, 사용하지 않은 학생은 15 퍼센트에서 득점을 기록했다. 이 결과는 Suydam과 Higgins(1977)의 초기 연구와 일치하는데, 그 주요 결과는 조작 교구를 사용하는 수업이 사용하지 않는 수업에 비해 보다 큰 수학 성취를 기록했다.

세기, 자릿값, 기초 연산, 측량 그리고 기하 영역에서만뿐만 아니라, 문제해결이나 분수 영역에서도 교구가 성취를 개선시키는데 유용하다는 연구결과가 있다. Carny(1984)는 4학년 수학 내용의 도입에서 조작교구가 이용될 경우, 특히 문제해결 득점에서 차이가 높아짐을 발견했다. 뿐만 아니라 재강화를 목적으로 교구를 사용할 경우, 내용의 보습 테스트에서 상위의 득점을 유도한다는 연구결과가 나왔다. Driscoll(1984)은 구체적 교구의 지각 있는 사용은 분수에 대한 아이디어를 이해하는데 도움을 줄뿐만 아니라 태도 역시 강화시킨다는 연구결과를 얻어내었다. Hunting(1984)은 4, 6, 8 학년을 대상으로 동치 분수에 대해 조사했다. 그는 많은 학생들이 두 분수가 동치임을 증명하지 못하는 이유는 분수를 구체적 교구로 표현한 경험이 없었기 때문이라고 해석했다. 즉 동치에 대한 이해는 분수의 물리적 표상을 구성하기 위한 적절한 전략의 습득에 달려있기 때문에, 교사들이 분수를 지도하는 방법을 재고해야 할 필요가 있음을 지적했다.

정리하면 조작교구를 사용하는 수업은 그렇지 않은 수업에 비해 보다 높은 수학 성취를 양산할 가능성이 크다고 하겠다. 그러나 이제까지의 연구들이 주로 초등학교 학생들을 대상으로 한 것이므로 그 결과들을 중학교 이상의 학생에게 적용시키는 것은 무리가 따르리라

생각된다. 고등학교 학생을 대상으로 한 연구로는 Stallings-Roberts(1991)의 연구가 참고할 만하다.

2) 모든 학습자에게 유익한가?

조작 교구는 능력이나 발달 수준에 관계없이, 모든 학생에게 적절한가, 아니면 단지 첫 시간에 그것을 “이해하지 못한” 어떤 지체가 있는 학생들을 위한 것인가? 교구의 사용이 치료가 필요한 학생 혹은 부진 학생에게 잠재적으로 가치 있다는 것은 일반적으로 합의되고 있다(Moser, 1986). 학생들의 오개념, 오이해, 절차 사용의 무능은 빈약한 개념적 이해에 근거하는 경우가 많은데, 교구와의 경험은 그러한 개념적 이해를 위한 튼튼한 기초를 제공해 준다는 것이다. 사실, 발달 초기 단계에서의 조작 교구의 적절한 사용은 차후의 치료의 필요성을 제거해 줄 수도 있을 것이다. 그렇다고 해서 이러한 논의로부터 조작 교구가 우수한 아동에게는 부적절하다는 것을 추론해서는 안된다. 우수한 아동들 역시 학습의 초기 단계에서 조작교구 사용으로부터 이득을 얻을 수 있다는 것이 Suydam과 Higgins(1977)의 연구를 통해 밝혀졌다. 즉 상위 성취자는 하위 성취자와 마찬가지로 교구 사용으로부터 이득을 보며, 또한 상위 능력자는 하위 능력자와 마찬가지로 이득을 본다. 즉 우수한 학생과 그렇지 않은 학생의 차이는 학습의 구체적 단계를 건너뛰는 것이 아니라 단지 그 단계를 빠르게 통과한다는 것이다.

조작 교구는 모든 연령의 아동에게 사용되어야 하나? 사람에 따라서는 조작교구의 사용이 어린 아동에게는 적합하지만 초등학교 중학년이나 혹은 중·고등학교 학생에게는 부적합하다고 생각할 지 모른다. 이러한 생각은 ‘조작 교구’가 의미하는 바의 협의적 개념화에서 비롯된 것일지도 모른다. 카운팅 칩이나 큐브와 같은 간단한 물체는 나이든 학생들에게는 너무 초보적일지 모르지만, 3차원 기하를 지도하기 위해 이용되는 훌륭한 교구 예컨대, 막대와 코렉터, 고무줄로 연결될 수 있는 정다각형 모양의 카드 보드 패널 등을 생각해 볼 수 있다. 이러한 교구들은 그것이 내포하고 있는 수학적 개념이 어린 아동에게 너무 앞선 것일 뿐만 아니라, 그러한 교구를 조작하는데 필요한 신체적 조화가 어린 아동의 능력을 벗어나는 것이다. 특히 중고등학교의 확률 지도에 교구 사용이 적극 권장되고 있다. 주사위를 던지고, 책상 위에서 카드를 집어 들고, 동전을 위로 던지고, 압정을 뒤집고, 전화번호 책에서 이름을 선택하는 것이 허용되지 않는다면, 학생들이 확률에 대해 공부하기란 매우 어려울 것이다. 따라서 교구의 종류와 사용되는 빈도수가 문제이지, 교구를 사용해서 이익을 볼 수 있다는 점에서는 교구의 사용은 아동의 연령을 초월하는 문제인 듯 싶다.

3) 어떤 수학내용에 적합한가?

교구의 사용은 단지 산술 수업에 한정된 것인가 아니면 기하, 측량, 통계, 그리고 문제해결 등 광범위한 수학 영역에 모두 적용 가능한 것인가? 이 물음에 대한 답은 아마도 훌륭한 수학 프로그램을 구성하는 것은 무엇인가, 그리고 조작교구의 가치는 무엇인가에 대한 각자의 견해에 달려있을 것이다. 물론 지금까지 교구와 관련된 대부분의 연구는 산술 영역에 집중되어왔지만, 그렇다고 교구 사용이 그 외의 수학 영역에서 전무한 것은 아니다. 예컨대 Dienes(1960)는 대수와 함수 영역에서의 교구 사용의 가능성을 구체적인 예를 통해 보여주었다. Stallings-Roberts(1991)는 고등학생을 대상으로 자신이 개발한 교구를 활용하여 절대값 개념을 지도하므로써 그 효용성을 입증하였다. 이러한 보기들은 조작 교구의 적절하고 효과적인 사용을 위한 엄청난 가능성이 수학의 모든 영역에 존재한다는 사실을 암시해 주고 있다. 적지 않은 사람이 수학의 전 영역에 걸친 교구 사용의 가능성을 생각하고 있는 듯하다(Suydam, 1982; Moser, 1986).

4) 누구에 의해 다루어지는 것이 보다 효과적인가? 교사인가 학생인가?

이 문제는 본고에서 제시한 조작교구의 정의에 위배되는 것이다. 왜냐하면 그 정의에 의하면 조작교구는 학생의 직접적 개입을 필수 요건으로 하기 때문이다. 그러나 교실이라는 한정된 공간에서 많은 학생들에게 때마다 교구를 사용하게 하는 것에는 여러 가지 무리가 따르는 것이 사실이다. 따라서 적절한 시점에서 교사가 학생을 대신해 적절한 시범을 보인다면, 경우에 따라서는 학생에게 직접 교구를 만지게 하는 것 이상의 효과를 거둘 수 있을 것이다. 특히 최근 개발된 프로젝터용 조작교구는 투명한 플라스틱 제재로 되어있어 교사가 프로젝터를 이용해 학생들에게 시연해 보이는데 매우 효과적이다. Suydam(1982)은 아동의 주의를 집중시킬 수 있고, 그들이 교사의 시연에 따라 사고를 밝아 나아갈 수만 있다면, 아동이 교구를 직접 사용하는 것과 교사가 교구로 시범을 보이는 것을 지켜보는 것은 똑같은 효과를 가진다고 주장한다. 사실 이 문제는 조작교구 정의 자체를 위협하는 것으로, 이것을 입증할만한 질적으로나 양적으로 충분한 연구가 뒤따라야하겠지만, 다인수 학습이라는 우리의 현실을 생각할 때 충분히 훌륭한 대안이 될 수도 있을 것이다.

5) 하나의 수학적 개념에 대해 몇 가지 조작교구가 제시되는 것이 효과적인가?

이미 언급되었듯이 Dienes(1960)는 하나의 수학적 아이디어에 대해 가능한 많은 수의 다양한 구체물이나 표상을 사용하는 것이 수학 학습을 촉진시킨다고 주장하였다. 그는 소위 '지각적 다양성의 원리'를 표명하였는데, 이것은 아동으로부터 추상이라는 수학적 본질을 거두어들이기 위해서는, 그리고 개념 형성 과정에서 광범위한 개인차를 허용하기 위해서는, 동일한 수학적 개념 구조가 지각적 동치인 가능한 여러 가지 유형으로 학생에게 제시되어야 한다는 것을 의미한다. 예컨대 베이스 텐 블록이나 주판, 자릿값 차트 등은 모두 자릿값이라는 하나의 동일 개념을 표현하는 구체물이 될 수 있으며, 아동이 이와 같은 다양한 경험을 통해 자릿값 개념이라는 공통성을 스스로 발견할 수 있다면 이것은 명백한 수학적 활동이라 할 수 있다. 그러나 이것은 단지 Dienes의 이론으로서, 이것을 뒷받침할만한 실증적 연구는 그리 많지 않다. 특히 Suydam(1982)은 이에 반하는 주장을 내놓았다. 그는 기존의 연구결과를 정리하면서 하나의 수학적 아이디어에 대해 단 하나의 구체물이 제시되든 몇 개의 구체물이 제시되든 성취점수에는 많은 차이가 없음을 보고한 바 있다.

6) 어떤 방식의 수업이 조작교구 도입에 효과적인가? 개방인가 구조화인가?

사실 이에 대한 개인적 입장은 이 두 가지 선택에 대해 우리가 양자택일적인 입장을 취해서는 안된다는 것이다. 개방성의 강조는 발견적 접근에 대한 의지를 반영하며 교사의 직접적 감독 없이도 작업할 수 있는 성숙된 학생들에게 보다 적합할 것이다. 반면 모든 활동이 조심스럽게 계획되고 처방된 구조화된 접근은, 비록 효용성을 판단하기는 어려우나 장기적인 개념 발달과 기술 발달의 관점에서 볼 때 더욱 효과적일 것이다. 따라서 수업을 개방적으로 이끄는 것과 구조적으로 이끄는 것 중 어느 방식이 더욱 효과적인가에 대한 판단은 교구를 수업시간에 활용하고자 하는 교사의 판단에 전적으로 의존할 수밖에 없을 듯 하다.

7) 교수에 통합되어야 하는가 아니면 보조적이어야 하는가?

다음 유추는 이 질문을 보다 명확히 해 줄 것이다. 우리는 케익을 만들 때 먼저 빵을 굽고 그 위에 장식을 한다. 물론 장식 없이도 케익은 먹을 수 있다. 반면, 빵을 굽기전 반죽에 밀가루를 섞지 않고는 케익을 만들 수 없다. 즉 밀가루 없이는 케익을 얻지 못한다. 이제 여러분은 수업에 조작 교구를 혼합하는 것을 어떤 관점에서 보겠는가를 결정하면 된다. 조작 교구를 단지 '장식'으로 사용하는 것은 가능하다. 그것 없이도 수업은 앞으로 나아갈 수 있다. 따라서 시간에 압박을 느낀다면, 경우에 따라 교구를 사용하는 수업을 생략할 수도 있

다. 반대로 조작 교구를 이용한 학습 활동을 빵의 밀가루처럼 필수적인 것으로 간주할 수도 있다. 이러한 관점에 의하면 아동은 교구 없이는 제대로 학습할 수 없다.

수업을 계획하는 과정에서 교사가 먼저해야 할 일은 아마도 목표를 설정하는 일일 것이다. '나는 어디로 갈 것인가? 아동이 배우게 될 것은 무엇인가?'. 그리고 나면 교사는 그러한 목표를 달성하기 위해 어떤 계획을 세울지 생각해야 한다. 이러한 과정에서 그는 다음을 결정해야만 할 것이다. '조작 교구는 내 수업에서 단지 보충인가, 아니면 필수인가?

8) 어떤 조작교구가 사용되어야 하는가?

교실 수업을 위해 교구를 선택하는 과제는 교과서나 학습 소프트웨어 등과 연관된 매우 중요한 작업이다. 조작 교구를 선택하는 과제는 다음과 같은 질문에 답을 찾는 일이 될 것이다. '효과적인 조작 교구의 중요한 특성은 무엇인가?' Hynes(1986)는 조작 교구의 선별을 위한 비교적 체계적인 기준을 마련해 준 사람이다. 그의 기준은 크게 교육적 기준과 물리적 기준으로 구분된다.

교육적 기준의 첫 번째 항목이 '수학적 아이디어에 대한 명확한 표현'이다. 조작교구는 문제시된 아이디어를 명확히 표현하고 있을 때에 한해 아동을 도울 수 있다. 아이디어에 대한 표현은 자연스러워야하며 쉽게 이해되어야 한다(Sowder 1976). 정수의 곱셈에 대한 몇 가지 부자연스런 모델이 문헌에 제시되어 왔지만, '음의 정수 곱하기 음의 정수는 양의 정수'를 명쾌하게 설명해 줄 만한 조작 교구는 아직은 없는 듯하다.

두 번째 항목은 '학생의 발달 수준에 대한 적절성'이다. 모든 아동이 그들의 발달 수준과 학습 양식에 적합한 보조기구를 사용해 학습할 수 있도록 교구를 선택하는 것이 중요하다(Reys 1971). 예컨대 어떤 교구가 '길이'라는 한가지 속성만을 지니고 있을 경우, 길이에 민감하지 못한 학생은 교구사용에서 아무런 이득을 보지 못한다. 그러나 크기, 모양, 색, 두께 등의 여러 가지 속성을 동시에 지니고 있는 교재, 예컨대 속성블록의 경우는 여러 유형의 학습자에게 모두 이득을 줄 수 있게 된다. 교구를 선택하는데 있어 아동의 인지적 발달뿐만 아니라 운동 발달도 고려해야 한다. 예를 들어, 어린 아동은 센티미터 큐브와 같은 매우 작은 교구를 다루는데 어려움을 느낄 수 있다. 이런 상황에서는 보다 큰 큐브의 사용이 권장된다.

교육적 기준의 세 번째와 네 번째 항목은 '흥미'와 '유통성'이다. 조작적 보조기구는 학생의 관심을 불러일으키고 학습 동기를 고양시킨다(Fennema 1973). 동기는 이후에 논의될 교구의 물리적 특성에 의해서 유도되기도 한다. 한마디로 조작교구는 학생의 흥미와 관심을

자아내는 것이어야 한다는 것이다. 교구 중에는 여러 가지 감각을 동시에 자극하며, 또한 여러 학년에 걸쳐 수학적 개념을 가르치는데 사용될 수 있는 교구, 즉 융통성 있는 교구가 있다. 예를 들어, 전체수, 유리수, 그리고 기하 개념 등 수학의 여러 영역을 지도할 수 있는 교구가 있다. Grossnickle et al.(1983)은 주판, 속성 블록, 베이스 텐 블록, 지오보드, 패턴 블록, 유니픽스 큐브, 그리고 자리값 주머니 차트 등의 교구들이 얼마나 다양한 목적으로 사용가능한지를 우리에게 말해주고 있다.

조작 교구 선별에서 교육적 기준은 우선적으로 고려되어야 할 항목이지만, 물리적 기준 역시 아울러 고려되어야 할 항목일 것이다. 내구성, 단순성, 매력, 통제와 보관의 용이성, 합리적 비용은 교재를 선택하기에 앞서 반드시 고려되어야 할 사항이다.

조작 교구는 종종 비용이 많이 드는 투자이다. 따라서 교구는 일상적인 사용과 아동의 조작에 견딜 수 있도록 만들어져야 한다(Reys 1971; Grossnickle et al. 1983). 아동이 사용할 때 너무 쉽게 깨지는, 즉 내구성이 없는 교구는 거의 가치가 없다. 두 번째는 교구의 단순성이다. 교구는 조작하기 쉬워야 한다. 그 구성의 복잡성이 학습을 방해하거나 학생을 혼란시켜서는 안된다. 사실 교구의 단순성은 표현해야 할 수학적 아이디어가 어느 정도 복잡한가에 직접 관련된다. 복잡한 아이디어를 간단한 모델로 표현하는 것은 결코 쉬운 일이 아니지만, 그러한 일이 가능하다면 그것은 아마도 가장 쉽게 기억되어질 것이다(Dewdney 1985). 세 번째 항목인 매력은 학생의 동기와 흥미를 증가시키는 열쇠이다. 조작교구는 산뜻하고, 정확해야 하며, 심미적으로 기분이 좋은 것이어야 한다(Hamilton 1966; Reys 1971). 그렇다고해서 그 외양이 학생의 관심을 학습이외의 곳으로 분산시켜서는 안된다. 네 번째는 통제와 보관의 용이성이다. 수업 동안 교구의 분배와 수거에 대한 각별한 계획이 만들어져야 한다. 일부 보조기구는 개인 혹은 소그룹의 사용을 위해 포장되어 있어서 최소한의 시간과 소동으로 분배와 수거가 가능하다. 물론 교구에 따라 학생이 책상에 보관할 수도 있다. 교구 조작으로 야기되는 소음은 학생의 책상을 천으로 덮으므로 줄일 수도 있을 것이다. 보관 역시 반드시 고려되어야 한다. 조작적 보조기구 중 크기는 작고 수는 많다면, 적절한 보관함을 이용하지 않을 경우 분실되기 쉽다. 교사는 쉽고 안전하게 교실에 보관된 교구를 찾을 수 있어야 한다. 교실밖에 보관되어야만 하는 보조기구들은 사용되지 않는 경향이 있다. 마지막 기준은 비용의 합리성이다. 보조기구의 값을 지불할 때, 그 사용과 융통성, 그리고 수명을 고려해야 한다. 장기간 여러 가지 많은 수학 개념을 지도하는데 이용될 수 있는 보조기구는 일회용 활동 용지보다도 적은 비용이 들 수 있다. 주기적인 수리비 등의 간접적 비용 역시 고려되어야 한다. 일부 조작 교구는 분실되거나 대체가 필요하게 될 것이다. 교사의 재교육이 필요할 수도 있다. 그러나 반드시 모든 조작 교구들을 구입해야만 하

는 것은 아니다. 어떤 것은 교사나 학생이 만들 수도 있다. 콩막대, 펙보드, 지오보드 등은 교실에서 학생들에 의해 만들어질 수 있는 보조기구의 예이다. 물론 지금까지 논의된 교구의 선택 기준은 교사와 학생에 의해 만들어진 조작 보조기구에도 적용될 수 있다.

조작교구가 수학학습에 효과적이고 그 사용이 필요한 것이 명백하다면, 교구를 선택하는 것은 교사의 중요한 책무가 될 것이다. 따라서 이제까지 기술된 선택 기준을 목록화하여, 교구 선택시 각 항목을 점검해 보는 작업은 교사에게 도움이 되리라 생각한다.

9) 수학실험실에서 사용되어야 하는가 아니면 교실에서 사용되어야 하는가?

사실 이 질문은 이제까지 논의되어온 것에 비하면 그다지 중요한 것은 아니지만, 수업과 교수가 어떻게 조직되어야 하는가의 문제이기도 하다. 조작교구가 수업의 통합적 부분이라면 교실 밖에서 이것을 사용한다는 것을 상상하기 어려울 것이다. 그러나 관리적이고 재정적인 문제가 해결된다면 모든 교구가 한자리에 모여있고, 그것을 사용하기 편리한 커다란 공간이 주어져 그곳에서 활동적인 수업을 하는 그림을 떠올릴 수도 있을 것이다.

V. 맺음말

우리가 의미있는 수학학습을 지향하고 있다면, 학생의 발달 수준 혹은 능력 수준을 고려하는 것은 필수이다. 이제까지의 많은 연구에서 뒷받침되었듯이, 대부분의 아동들은 추상적이고 형식적인 내용을 어떤 구체적 경험이나 활동없이 곧바로 이해하는데 많은 어려움을 느끼는 듯하다. 조작교구의 유용성은 이와 같이 대부분의 아동이 추상을 경험하기에 앞서 구체적 경험이라는 중간 단계를 필요로 한다는 사실에 근거한다. 실제로 조작교구의 사용이 아동의 수학성취에 긍정적인 역할을 한다는 것이 여러 연구에서 입증되기도 했다. 그러나 그러한 연구들은 연구대상, 연구내용, 사용된 교구의 종류 등의 측면에서 매우 제한적이라 할 수 있다. 아직은 조작교구에 대한 이론적 연구나, 과연 조작교구는 어떤 식으로, 어떤 내용에, 어떤 아동에게, 어떤 장소에서, 어떤 시점에 사용되어야 하는가 등에 대한 구체적 연구가 너무나 미흡한 실정이다. 이 논문에서는 조작교구와 관련된 기존의 연구를 종합·분석하여, 현재까지의 결과를 간략히 제시하였지만 아직은 하나의 결론을 도출할 시점이 아닌 듯 하다. 이 논문을 통해 조작교구에 대한 관심이 증가되고, 앞으로 조작교구를 연구하고자 하는 사람들에게 조작교구 연구에 대한 기초적인 정보와 더불어 전체적 조망을 제공하였다

면 이 논문이 의도하는 소기의 목적이 달성된 셈이다. 이후 각 영역에 대한 보다 구체적이고 체계적인 연구가 후속되길 희망한다.

참 고 문 헌

- 김응태, 박한식, 우정호(1984). 수학교육학개론. 서울: 서울대학교 출판부
- Adler, I.(1966). Mental growth and the art of teaching, *Arithmetic Teacher* 13(Nov 1966), 576-84.
- Bailey, L.(1998). Using base ten blocks to teach computation, NCTM Annual Meeting Presentation(Unpublished).
- Canny, M. E.(1984). The relationship of manipulative materials to achievement in three areas of fourth-Grade mathematics: Computation, concept development and problem-solving. *Dissertation Abstracts International* 45A, 1984 Sep, 775-776.
- Cathcart, G. W.(ed)(1977). *The mathematics laboratory: Readings from the arithmetic teacher*. Reston, VA.: NCTM.
- Dewdney, A. K.(1985). Computer recreations: Analog gadgets that solve a diversity of problems and raise an array of questions. *Scientific American* 252(June), 18-29.
- Dienes, Z. P.(1960). *Building up mathematics*. Hutchinson Educational.
- Driscoll, M.(1984). What research says. *Arithmetic Teacher* 31(Feb), 34-35, 46.
- Fennema, E.(1973). Manipulatives in the classroom. *Arithmetic Teacher* 20(May), 350-352.
- Grossnickle, F. E., John R., Lelanc M. P., & Noreen S. G.(1983). *Discovering meanings in elementary school mathematics*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Hamilton, E. W.(1966). Manipulative devices. *Arithmetic Teacher*(Oct), 461-67.
- Heddens J. W.(1986). Bridging the gap between the concrete and the abstract. *Arithmetic Teacher*(Feb), 14-17.
- Hunting, R. P.(1984). Understanding equivalent fractions. *Journal of Science and*

- Mathematics Education in Southeast Asia* 7(July), 26-33.
- Hynes M. C.(1986). Selection criteria. *Arithmetic Teacher*(Feb 1986), 11-13.
- Kennedy L. M.(1986). A rationale. *Arithmetic Teacher*(Feb), 6-7.
- Moser J. M.(1986). Curricular issues. *Arithmetic Teacher*(Feb), 8-10.
- Parham, J. L.(1983). A meta-analysis of the use of manipulative materials and student achievement in elementary school mathematics. *Dissertation Abstracts International* 44A, July 1983.
- Reys R. E.(1971). Considerations for teachers using manipulative materials. *Arithmetic Teacher* 18(Dec 1971), 551-558
- Scott, P. B.(1983). A survey of perceived use of mathematics materials by elementary teachers in a large urban school district. *School Science and Mathematics*, 83(1), 61-68.
- Sowder, L.(1976). Criteria for concrete models. *Arithmetic Teacher* 23(Oct), 468-470.
- Stallings-Roberts V.(1991). An absolutely valueable manipulative. *Mathematics Teacher*(April), 303-307.
- Suydam M. N.(1982). *Using manipulative materials to learn mathematics*. ERIC/SMEAC Mathematics Education Fact Sheet Number 2.
- _____(1986). Manipulative materials and achievement. *Arithmetic Teacher*(Feb), pp.10, 32.
- Suydam, M. N. & Higgins, J. L.(1977). *Activity-based learning in elementary school mathematics: Recomendations from research*. Columbus, OH: ERIC: ED 144 840.
- Thornton C. A. & Wilmot, B.(1986). Special learners. *Arithmetic Teacher*(Feb), 38-41.

A Study on Manipulative Materials in Mathematics Education

Kim, Soo-mi (Inchon National University of Education)

It has been said that concrete materials are useful and necessary when children learn mathematics. But it has been proved by several researches that teachers don't often use them even if they agree that they are useful. This article focuses on the lack of systematic and applicable research on manipulatives. Therefore, it tries to identify the state of current research and to present the concrete domains which need more study in the future, *in order to induce both qualitative and quantitative research*. The following nine domains cover almost all the research on manipulatives so far: affect of manipulatives on achievement, types of learners, mathematical topics, subjects of operation, variety of manipulatives, instructional method, degree of involvement of manipulatives in class, selection criteria, and place for use.