대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.2, 403~426, September 2000

수학적 사고·태도에 중점을 둔 학교수학수업의 구성 사례

김 남 희 (난곡중학교)

I. 머리말

학생들에게 '의미있는' 수학학습이라는 논제는 이제까지의 수학교육 연구에서 비중있게 다루어져 온 학교수학교육의 중심 주제이며 앞으로도 이에 대한 연구는 계속 진행될 것이다. 그와 동시에 수학을 배우는 학생들에게 의미있는 수학학습을 제공하기 위한 교사들의 연구와 노력 역시 끊임없이 요구될 것이다. 그 동안 의미충실한 수학학습에 대한 논의들은 주로 수학교수학의 이론과 적용의 문제로 다루어져 왔다. 그러한 논의가 최근 몇 년 전부터는 보다 구체적으로 열린수학교육, 구성주의 인식론에 따른 수학교육이라는 논의로 활발히 전개되어 오고 있다. 이러한 상황 속에서 학교현장에서는 제 7차 교육과정 개정에 따른 교육과정의 변화, 수행평가의 도입과 같은 평가의 변화, 프로젝트 수업, 수준별 수업 도입 등의 교수·학습 방법상의 변화가 실제로 나타나고 있으며 현재의 수학교사들에게는 보다 의미있는 수학수업의 구성이라는 과제가 더욱 절실하게 요구되고 있는 실정이다.

본 논문에서는 이러한 변화의 상황 속에서도 학교수학의 지도에서 항상 변함없이 고려되어야 할 학교수학교육의 목적과 관련된 문제에 대해서 다루어보고자 한다. 수학교육에 종사하는 사람들이라면 누구나 의식하고 있는 '수학적 사고교육'이라는 학교수학교육의 목적은 의미있는 수학수업의 구성이 지향해 나아가야 할 수업의 기본 전제라고 할 수 있다. 그러나 수업 시간의 부족, 학습 내용의 과다, 지도되어야 할 많은 학생들, 그리고 무엇보다도 입시와 관련된 문제 등의 여러 가지 현실적인 상황 속에서 학교수학의 목적은 쉽게 간과되어져 왔다. 또한 최근 수학교육의 동향이 요구하는 변화에 힙겹게 발맞춰가고 있는 교사들에게 때때로 그에 대한 고려가 잊혀지기까지도 했다.

본 논문에서는 간단한 실험조사를 통해 우리나라 학생들의 수학적 사고의 수준을 진단해

볼 것이다. 그리고 실험결과를 통해 학생들의 수학적 사고의 실태에 대한 문제의식을 갖고 수학적 사고에 중점을 둔 수학교육의 필요성에 대해서 주장하고자 한다. 이를 위해 수학적인 사고교육의 목적과 그에 대한 중요성을 최근 수학교육의 동향에서 요구하고 있는 학교수학교육의 방향 속에서 재확인해 볼 것이다. 그리고 수학적 사고교육을 지향하는 학교수학의 수업은 어떻게 구성되어야 하는가에 대한 안목을 얻기 위해 수학적인 사고·태도에 중점을 둔 지도사례를 문헌을 통해 살펴볼 것이다. 이를 바탕으로 수학적인 사고·태도에 중점을 두어 연구자가 수행한 수업의 구성사례를 소개해 보고자 한다. 제시된 수업사례들은 학생들에게 지도되어야 할 수학 내용의 근원이 되는 수학적 사고의 지도에 중점을 둔 것이다. 다시 말하면, 수학의 내용과 관련된 수학적 사고를 발동시키는 원동력이 되는 수학적 태도를 학생들에게 직접 경험시켜, 태도를 바탕으로 한 수학적 사고를 해나가면서 수학의 내용을 학습할 수 있도록 지도한 수업 구성의 예라고 할 수 있다.

본 논문의 수업구성사례를 통해 수학적 사고의 지도는 학년, 내용의 난이도, 학생의 학습수준, 차시 분량 등에 관계없이 수학의 내용을 다루는 어떠한 경우에라도 가능하다는 사실을 밝히고자 한다. 그리고 이러한 수업의 구성이 바로 학교수학교육의 목적에 부합될 뿐 만 아니라 최근의 수학교육의 동향에서 요구하고 있는 수학교육의 방향에도 적합한 수업 방법의 한 예가 될 수 있음을 주장하고자 한다.

II. 문제의식

1999년 춘계 수학교육학연구논문발표대회에서 발표된 '수학교육의 진보와 전망'이라는 제목의 특별강연내용[1]은 수학교육에 관심을 갖고있는 많은 사람들에게 상당한 감명을 주었던 것으로 기억된다. 특히 독일의 수학교육자 비트만(Wittmann, E. Ch)의 수업단위(Teaching Unit) 사상에 주목하여 제시된 새로운 수학교재론에 관한 내용은 바람직한 수학적 사고·수학적 태도의 육성을 위한 시도의 한 예로 수학을 가르치는 교사들에게 새로운 수업구상의 아이디어를 제공한 것이었다. 내용의 핵심은 수학교과서의 장과 절에 따라 그다지 관계없는 문제를 따로따로 학습하는 것에서 벗어나 일련의 관계를 가진 문제들을 차례로 해결해 나가는 형태의 학습을 통해 수학적인 사고를 경험하고 수학적 지식의 의미를 바르게 깨닫게 한다는 것이다(平林一榮, 1999a, pp.28-30).

위와 같은 형태의 학습이 학생들의 수학학습에 긍정적인 영향을 줄 것으로 생각하고 연

---

1) 특별강연자는 히로시마대학(廣島大學)의 명예교수 平林一榮이다.

구자는 현재 재직하고 있는 중학교의 학생들을 대상으로 수업단위에 의한 지도를 생각해 보게 되었다. 그러한 시도를 위해 우선적으로 平林一榮 교수가 강연내용에서 구체적으로 제시해주었던 학습내용(그의 주장으로는 비트만이 의미하는 '수업단위'의 한 예로 이해될 수 있는 내용)을 가지고 중학교 3학년생들을 대상으로 실제 수업을 진행하여 보았다[2].

<그림 1>과 <그림 2>의 자료에 제시된 바와 같이 연구자가 수업에서 사용한 수학문제(平林一榮, 1999a, p.29에서 발췌)[3]는 平林一榮 교수의 설명에 따르면 일본의 초등학교 5학년 교과서에 제시된 문제를 바탕으로 계속 발전된 문제를 덧붙인 형태의 것으로 조건의 일부를 다른 것으로 바꾸어 새롭게 구성된 문제를 계속 해결해 나가면서 경험된 수학적 사고를 형식적으로 정리해 나가는 것이다.

연구자가 수업을 통해 얻고자 한 것은 수업단위의 계획에 의한 수업을 진행하였을 때 기존의 수업과 달리 수업진행과정에서 특별히 고려해야 할 사항들이 무엇인가, 학생들의 이해 정도는 어떻게 나타나는가 그리고 이러한 수업에 대한 학생들의 반응은 어떠하며 학습효과는 어떻게 나타나는가에 대한 충분한 정보를 얻는 것이었다. 그러나 수업을 통해 이러한 결과에 대한 만족할만한 해답을 얻기보다는 형식적 조작기의 인지수준에 있는 중학교 3학년 학생들의 수학적 사고력이 상당히 우려할 만한 수준에 있다는 결론을 내리게 되었다. 물론 몇 학급의 학생들을 대상으로 한 간단한 실험 결과로 위와 같은 결론을 내리는 것에 대해 그 결론의 일반성에 문제가 제기될 수 있는 여지가 충분히 있다. 그러나 오랜 동안 학교현장에서 수학을 지도해오면서 연구자는 우리나라 학생들에게 수학적 사고력이 부족하다는 느낌을 자주 받아왔던 것이 사실이다. 아마도 다른 수학교사들도, 연구자와 마찬가지로, 그 동안의 지도 경험으로부터 위 결론에 공감할 수 있으리라고 생각한다.

일정한 규칙을 발견하고 변수를 사용해 일반화된 식을 구성해 내는 것은 중학교 3학년 학생들의 수준[4]에서는 그리 새로운 과제가 아니었기 때문에 연구자는 '수업단위'에 의한 수업의 시도에서 학생들이 비교적 쉽게 문제를 해결하리라고 예상했으나 그러한 예상 역시

2) 각 학생들에게 그림 1, 2에 제시된 바와 같은 자료를 1장씩 나누어 준 후, 문제파악을 위한 설명을 해주고 학생들에게 적절한 답을 쓰게 하면서 수업을 진행하였다.

3) 平林一榮는 이 문제를 초등 고학년~중학교 1학년 정도의 수준에 적합한 문제라고 설명하고 있다.

4) 중학교 3학년 수준에 있는 학생들은 이미 중학교 1학년 과정에서 일반화된 공식(예를 들면, 특수한 다각형에서의 여러 가지 예를 통해 n각형의 대각선의 개수, n각형의 내각의 합 등을 구하는 공식)을 구성하고 구성된 식을 구체적인 경우에 적용해보는 학습을 하였고 그 이후의 학습에서도 수학의 문제 해결에 일반화의 내용을 다루고 이를 형식화하는 경우를 여러 번 학습한 상태이다.

크게 빗나갔다. 그 동안의 수학학습을 통해서 충분히 길러졌을법한 수학적 사고와 수학적인 태도를 학생들에게서 발견해내기가 어려웠던 것이다.

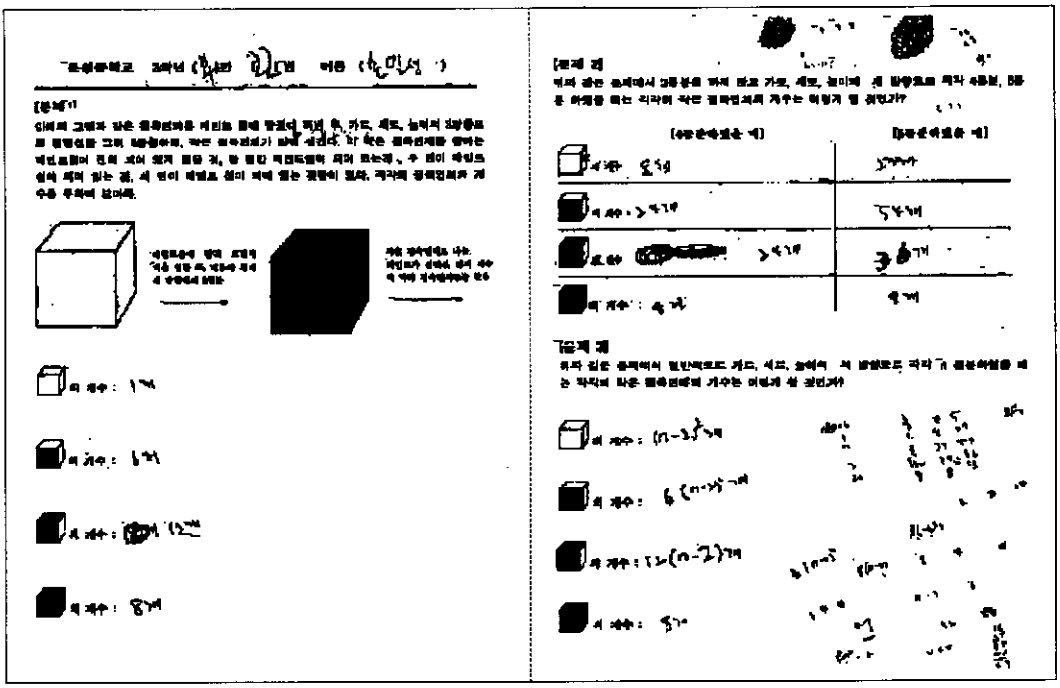
학생의 답안을 예를 들어 설명해보자. <그림 1>, <그림 2>, <그림 3>에서 확인할 수 있듯이 각 정육면체의 수를 세는 과정이 비교적 간단한 [문제 1]에 대해서는 대부분의 학생들이 옳은 답을 내었다. [문제 2]의 해결에서도 학생들은 각 정육면체의 개수를 일일이 세는 과정을 통해 답을 내고 있는데, 이들 중에는 문제를 잘못 이해하고 개수를 세는 학생들, 이해는 잘 했으나 개수를 세는 과정에서 오류를 보이는 학생들이 발견된다. 맹목적으로 개수를 세어나가는 학생들이 대부분이었지만 개수를 세는 과정에 일정한 규칙이 있을 것을 예상하고 그것을 발견해보려는 학생의 답안이 몇몇 관찰되었다. 이것이 바로 규칙찾기를 바탕으로 한 일반화의 과정인데 이를 스스로의 힘으로 할 수 있는 학생의 수가 극히 적다는 사실은 <그림 1>과와 같은 답안이 한 반에 2~3 정도 밖에 나오지 않는다는 사실에서 쉽게 설명된다. <그림 2>의 학생답안과 같이 간단한 일부 규칙을 발견한 경우도 있지만 역시 대다수의 학생들이 <그림 3>의 문제 3에 대한 답안처럼 일반화를 형식화해내지 못하였다.

다음 2차시 때에 <그림 4>의 내용을 담은 자료[5]를 나누어주고 일반화의 사고과정을 진단해 보았으나 <그림 5>에 제시된 답안의 경우처럼 일반화를 형식화해내지 못한 답안이 1차시 때와 마찬가지로 상당히 많이 발견되었다. <그림 4>에서의 문제는 <그림 1>, <그림 2>에서의 문제보다 훨씬 간단한 규칙을 가지기 때문에 학생들이 일반화를 비교적 쉽게 할 수 있으리란 예상을 하였으나 결과는 기대에 미치지 못하였다. 특히 문제의 이해를 돕기 위해 교사가 학생들에게 문제파악을 위한 설명을 한 후, 규칙을 발견하여 수를 체계적으로 세어보라는 조언을 해주었음에도 만족스러운 결과가 나오지 못한 것이다.

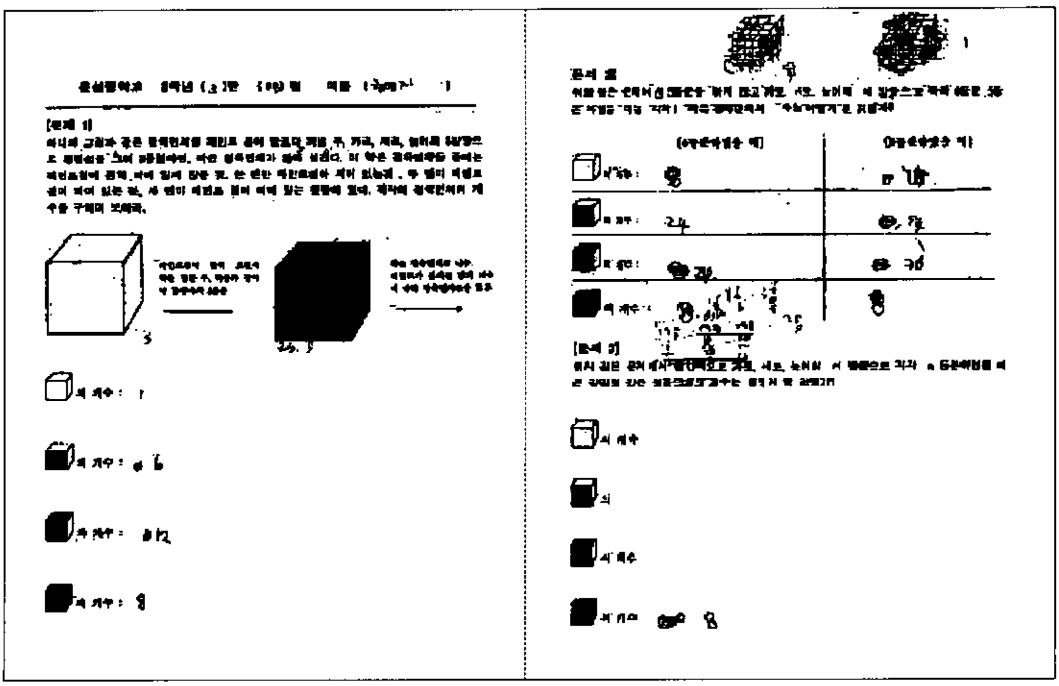
사실 다음 그림에서 제시하고 있는 학생 답안의 예는 수학 수준별 이동수업에서 상반에 해당하는 학생들의 답안이라는 사실이 더욱 충격적이다. 일반화하는 수학적 사고의 뒷받침이 되는 수학적인 태도 예를 들면, 규칙을 발견하려는 태도나 문제를 체계적으로 정리하여 해결하려는 태도 또는 사고와 노력을 절약하려는 태도가 학생들에게 상당히 부족하다는 사실을 인정하지 않을 수 없다.

연구자는 위와 같은 결과를 통해 다음과 같은 문제를 보다 심각하게 고려해야할 필요가 있음을 생각하게 되었다. 즉, 그 동안 학생들이 학교수학을 통해 받아왔던 수학학습은 어떠한 것이었나? 학생들이 수학학습을 통해 습득한 지식과 태도는 어떤 형태의 것인가? 수학교육에서 그토록 강조하는 수학적인 사고교육이란 목적은 정말 달성되고 있는 것인가? 이

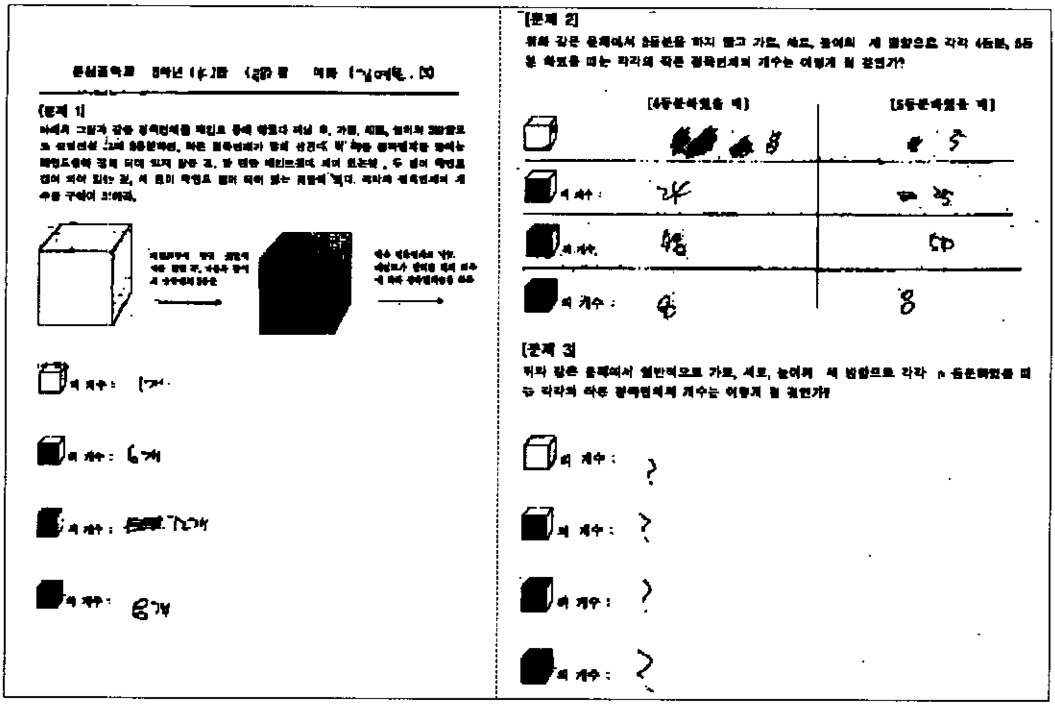
5) 平林一榮(1999a) 교수가 제시한 문제의 일부로서 1차시 때 제시한 <그림 1>, <그림 2>의 문제 내용을 새로운 관점에서 확장시킨 것이다.



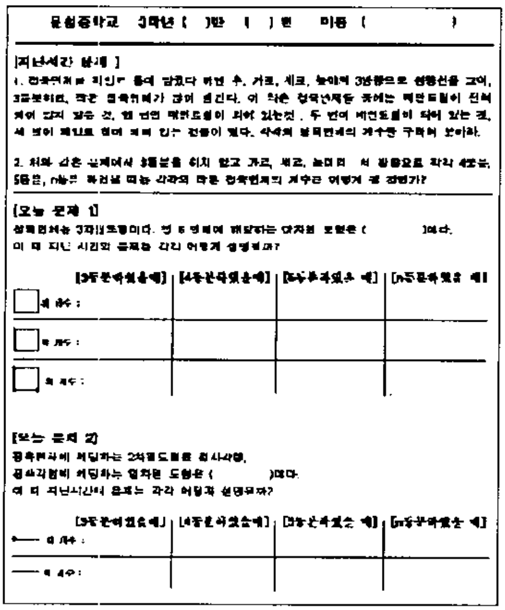
<그림 1> 문제 1, 2, 3을 모두 바르게 해결한 학생의 예



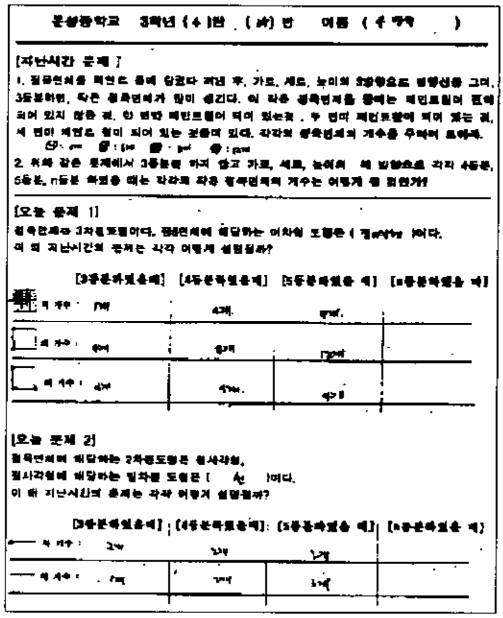
<그림 2> 문제 3의 해결(일반화 및 형식화)에서 곤란을 보이는 학생의 예



<그림 3> 문제 2, 3에서 곤란을 보이는 학생의 예



<그림 4> : 2차시 수업자료
(平林一榮, 1999a, p.29에서 발췌)



<그림 5> : 2차시 수업자료에 대한
학생 답안의 예

러한 문제가 의문시되는 시점에서 현재 우리의 수학교육, 학교 현장의 수학수업은 어떻게 이루어지고 있는 것인가? 교사인 우리가 한 번 쯤 자신의 수업을 되돌아보고 반성을 해보지 않을 수 없는 현실이다. 수학의 내용 속에 들어있는 아이디어의 핵심, 수학을 만들어내고 다듬어내는데 근본이 되는 사고, 그러한 사고를 유발하는 수학적인 태도의 육성과는 동떨어진 지도 속에서 수학교과서에 제시되어있는 내용 전달에만 급급했던 것은 아닌가? 개념 이해나 수학적 지식의 구성(발견)을 통해 길러질 수 있는 수학적인 사고과 수학적인 태도의 육성보다는 공식을 암기하고 공식에 맞추어 계산을 하는 학습, 수학의 개념을 의미 없이 학습하는 지식전달위주의 학습이 주가 되었던 적은 없는가? 수학교육에서 오래도록 논의되어 온 수학적 사고력의 개발을 위한 교사의 노력이 진정으로 요구되는 시점이라 생각된다.

아래에서는 수학적 사고와 수학적인 태도에 중점을 둔 수학수업의 필요성을 주장하고자 한다. 이러한 주장의 타당성을 최근의 수학교육 동향과의 관련을 통해서 설명해 보고자 한다.

III. 최근 수학교육의 동향에서 본 학교수학의 방향

최근 수학교육의 동향을 살펴보면, 학교수학이 지향해 나아가야 할 방향을 쉽게 파악할 수 있다. 현재 수학교육의 현장에는 수학의 지도원리로 소개되는 수학교수학과 관련된 다양한 이론과 더불어 구성주의라는 새로운 수학교육 이데올로기가 소개되면서 수학과 교육과정의 측면에서, 평가의 측면에서, 교수–학습을 바라보는 관점의 측면에서 상당한 변화가 일고 있음이 사실이다.

특히 최근 몇 년 사이에 초등학교를 중심으로 학교 현장의 수학수업의 변화에 상당한 영향을 주고 있는 열린교육운동은 수학과의 경우에 수학적 사고력의 육성, 수학적 개념의 이해에 초점을 맞춘 수학교육이라는 수업의 본질적인 변화를 요구하고 있다. 열린교육에 대한 이해와 해석, 현장 학교수업에서의 구현과 관련된 여러 문제에 대한 찬성과 우려의 목소리가 여전히 공존하고 있기는 있지만 교사들은 열린수학수업의 구성 속에서 수업의 외적 조건의 변화 대신에 수학수업의 본질적인 변화를 요구받고 있다(이경화, 1998, pp.80-89). 여기서 수학수업의 본질적인 변화라는 것은 그동안 소홀히 해왔던 수학의 개념적 지식 지도로의 변화로서 단순한 모방과 암기 위주로의 수학수업에서 수학적 사고를 통해 수학적 지식을 깨닫게 하는 수학수업으로의 변화로 생각된다.

구성주의 수학교육론 역시 학교수학의 전통적인 교수 방법의 타당성에 의문을 제기하면서 학생 자신의 문제해결활동을 통한 수학적 지식의 구성을 주장하며 학교수학의 학습이 학생의 자주적인 문제해결 활동속에서 수학적 사고를 경험할 수 있는 방향으로 자리매겨지기를 기대한다.

현재 시행중에 있는 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에서도 학교수학교육이 나아가야 할 방향을 재확인할 수 있다[6]. 학교 현장 여건에 적합한 수학과 단계형 수준별 교육과정 운영방안을 마련한다는 목적아래 한국교육과정평가원에서 실시된 '제 7차 교육과정을 위한 교수-학습자료 개발 연구'에서는 수학과의 수준별 교수-학습 자료의 구성 방향을 점진적 수학화의 원리, 역사 발생적 원리, 구성주의의 원리로 채택하고 이에 따른 예시자료를 제시하고 있는데 이는 지식전달중심의 수학교육에서 벗어나 다양한 수학적 문제상황 속에서 수학적 개념의 아이디어와 문제해결의 바탕이 되는 수학적 사고를 학생들에게 풍부히 경험시키고자 한다는 의도를 반영하고 있다(한국교육과정평가원, 1998, pp.29-33).

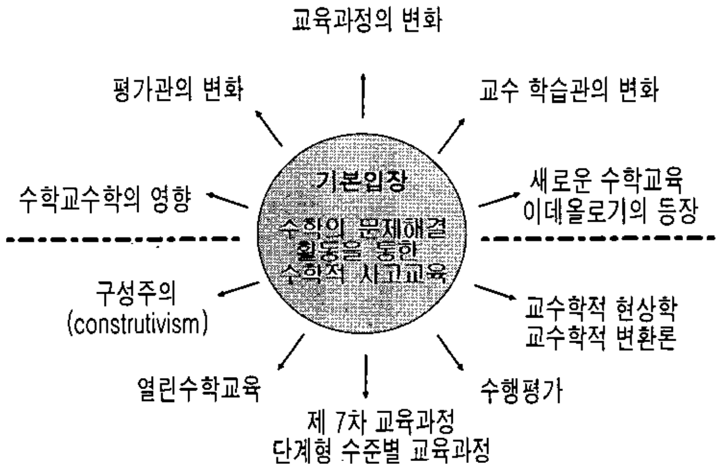
또한 학교현장에서 실시되고 있는 수행평가는 학생들이 수학적 지식을 얼마나 알고 있는 나를 평가하는 양적 평가에서 벗어나 학생들이 수학을 하는 활동을 통해 그들의 사고과정과 문제해결 능력을 평가하는 질적인 평가방법으로 학교수학의 평가방향이 수학적인 사고과정을 평가하는 방법으로 나아가야 한다는 것을 함의하고 있다. 그리고 이러한 평가관은 교수-학습 활동의 개선 다시말하면 학교수학수업에 있어서의 질적인 변화를 요구하고 있는 것이다.

이와같이 구성주의라는 수학교육 이데올로기의 등장과 더불어 교수학습관에서, 교육과정에서, 평가에서 나타나고 있는 변화들은 수학의 문제해결활동을 통한 수학적 사고교육을 지향한다는 공통의 기본입장아래 각 영역에서 학교수학교육이 나아가야 할 방향을 구체적을 제시해주고 있는 것이다(<그림 6> 참조).

사실상 수학적인 사고교육이라는 학교수학의 목적은 최근의 수학교육의 동향에서 새롭게 등장한 것은 아니다. 일찍이 수학교육자 Schoenfeld가 "학교수학을 지도하는 근본적인 목적은 수학적 사고를 훈련시키는 것이다"라고 말했듯이 그것은 오래 전부터 있어온 수학교육의 기본원리였고 다만 현재 입시위주의 주입식 학교교육에 대한 우려 속에서 그 중요성이

---

6) 제 7 차 수학과 교육과정은 단계형 수준별 교육과정으로서 초등학교 1학년에서부터 고등학교 3학년까지의 10년 동안을 국민기본공통교육기간으로 정하고 학생의 인지발달 수준을 고려해서 수학의 기본적인 필수 학습내용을 선정, 학습 위계와 난이도에 따라 수학의 학습을 단계별로 구성하여 학생 개인의 학습능력과 속도에 따른 자기주도적 학습을 꾀하게 하고 있다.



<그림 6> 최근 수학교육의 동향

이 더욱더 새롭게 부각되고 있는 것으로 이해될 수 있다.

학교수학에서 교사인 우리가 수학의 어떤 영역의 내용이나 개념을 다루더라고 항상 교수 학습의 기본원리가 되어야 할 것이 바로 수학적 사고교육이라는 것을 받아들인다면, 현재 우리의 학교수학수업의 모습은 점차적으로 변화되어가야 할 필요성이 있다는 것에는 누구나 동의할 수 있을 것이다. 학교수학의 학습에서 중요시되어야 할 점은 학생들이 수학을 만들고 다듬어 가는데 바탕이 되는 수학적인 사고를 경험하는 것이며 이를 통해 수학의 내용을 이해해 나가는 것이다. 따라서 교사인 우리는 수학적인 사고와 태도에 초점을 맞춘 수학수업의 구성을 꾀하여야 한다는 사실을 받아들이고 이를 위한 노력을 아끼지 않아야 하는 것이다.

최근 일본의 수학교육의 예를 보더라도 교육과정의 내용을 의미없이 전달하는 수학교육에서 탈피하여 수학의 학습은 "수학을 하는 것(數學をすること; Doing Mathematics)"이라는 주장 아래 실제로 학생의 활동을 통해서 스스로 수학을 구성해 나가야 한다는 구성주의의 기본적인 생각을 받아들이고 있다. 그리고 일본의 초등학교 교사들은 대체로 수학의 지도는 "아동 나름대로 생각해 보게 한다(子供なりに考えさせる)"는 기본 전제 하에 이루어져야 하며, 수학은 "아동이 만들어 가는 산수(子供のつくる算數)"이어야 한다고 보고 있다(平林一榮, 1999b, p.4).

이와 같이 '수학적 사고 교육'이라는 학교수학의 목적과 그에 대한 중요성을 최근 수학교육의 동향에서 요구하고 있는 학교수학교육의 방향 속에서 쉽게 재확인해 볼 수 있는 바,

이제는 수학적 사고교육을 지향하는 학교수학의 수업이 어떻게 구성되어질 수 있는 것인지에 대해 알아볼 시점이다.

아래에서는 수학적인 사고 · 태도에 중점을 둔 지도사례를 문헌을 통해 살펴보고자 한다. 문헌에 제시되어 있는 지도사례의 수업구성 아이디어를 바탕으로 수학적인 사고 · 태도에 중점을 두어 연구자가 직접 수행한 수업의 구성사례도 제시해 보고자 한다.

IV. 수학적 사고 · 태도에 중점을 둔 수학수업의 구성 사례

학교수학에서 수학적 사고교육을 위한 지도는 수학의 내용이 형식화되기 이전인 초등학교의 수업에서부터 이루어질 수 있고 실제로 그 지도가 가능한 소재들이 많이 있다. 아래에서는 문헌에 제시되어 있는 초등 저학년에서 이루어진 실험수업의 예와 초등 고학년에서 이루어진 실험수업의 예를 한 가지 씩 들어보고자 한다. 그리고 본격적인 형식화가 이루어지는 중학교 수준의 수업에서도 수학의 개념과 내용을 지도하는 과정 속에서 수학적인 사고와 태도에 중점을 둔 수학수업이 충분히 가능하다는 것을 연구자의 지도사례로 제시해 보고자 한다.

1) 실험수업의 예 1

다음의 예는 일본의 片桐重男교수가 筑波大學부속초등학교에서 3학년 학생들을 대상으로 실시한 실험 수업의 예(이용률 외 3인 역, 1992, pp.94-100)로 원의 의미와 원에서 사용되는 용어의 지도과정에서 수학적인 사고에 중점을 둔 수업을 진행한 사례이다. 수학적인 사고와 태도를 유발하는 교사의 적절한 발문을 통해 학생들이 수학적인 태도를 바탕으로 사고를 해 나가도록 이끌어가는 과정이 잘 드러나 있다. 또한 학생들로 하여금 그들 스스로 적절한 지식이나 기능을 이용해야 할 필요성을 깨닫게 하면서 수업을 진행시키고 있다. 학습목표 3에 수학적인 사고의 경험을 명확히 제시하고 있는 것이 특징이다.

사례 1: 원의 의미 지도(초등 3학년)

학습목표 1: 원, 중심, 반지름의 의미를 안다

학습목표 2: 명확한 용어사용의 필요성을 깨닫는다

학습목표 3: 귀납적인 생각을 하는 경험을 시킨다

[과제] 오늘은 보물찾기놀이를 합니다
(7cm 떨어진 두 점 가, 나만을 인쇄한 종이 배부) 이 종이는 넓은 모래사장입니다.
이 모래사장의 어딘가에 보물이 감추어져 있습니다. 그곳을 찾아보세요.

힌트 1: 보물은 점 '가'로부터 5m 떨어진 곳에 있다.
힌트 2: 보물은 점 '나'로부터 4m 떨어진 곳에 있다.

문제해결의 단계에 따른 수업의 진행 속에서 실험자가 학생들에게서 경험되길 기대하는 수학적인 사고와 태도가 무엇인지에 중점을 두어 수업의 진행과정을 요약하여 정리해 보면 <표 1>과 같다.

<표 1> '원의 의미' 지도 수업의 예

문제 해결단계	교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동	수학적인 사고/태도
문제 파악	**교사:** (판서) 「모래사장에서 보물찾기」 여기 어딘가에 보물이 묻혀 있습니다.여러분이라면 어디를 파보겠습니까? **학생:** 어디일까? 모르겠네... **교사:** 보물은 점 '가'에서 5m 떨어져 있읍니다(힌트 1) **학생:** 5m? 도저히 무리다. 이 종이에서는 5m를 축소해서 생각해야겠다. **교사:** 그럼 5m를 이 종이에서 어떻게 나타내면 될까요? **학생:** 5m를 5cm로 해요 **교사:** 그렇게 하는 이유는 무엇인가요? **학생:** 5m는 5cm의 100배로 5cm는 표시할 수 있죠	문제를 명확히 하려한다 단순화의 생각
해결방안의 구상 및 실행 I	**교사:** 5m를 이 종이에서는 5cm로 합시다. 그러면 어디를 파보면 될까요? 자신이 파 보려는 곳에 표시를 하세요. **학생들:** 자로 재어 5cm가 되는 곳에 점을 찍는다. (한점만 찍는 학생도 있고 여러 개의 점을 찍는 학생도 있다. 친구들과 서로 다른 점을 찍은 사실을 지적하는 학생들이 있다) **교사:** 이렇게 몇 개의 점들만으로 충분할까요? (점을 30개 정도 찍은 학생을 가리키며) 30군데 정도 파보면 보물이 나올까요? **학생:** 아직도 파야 할 곳이 많이 남아있읍니다. **교사:** 그럼 어디를 파보겠읍니까? **학생:** 둥근모양으로 돌아가며 파 보면 될 것 같아요	해결방안을 수립 특수화의 생각 해결방안을 구상 **귀납적인 생각**

문제 해결단계	교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동	수학적인 사고/태도
논리적조직화	**교사:** 그럼 둥근모양을 어떻게 하면 그릴수 있을까요? 압정과 TP자료 [· · · · · · · · ·] 를 주고 사용법을 알려준다. 원, 반지름, 중심의 용어를 지도한다. 원과 타원과의 차이점 설명 **교사:** 그런데 보물을 찾으려면 원의 둘레 전체를 파지 않으면 안되겠군. 그래서 힌트를 하나 더 주지요. 보물은 점 '나'에서 4m 떨어져 있읍니다(힌트 2). 어떻게 생각하면 될까요?	해결 방안의 구상
해결방안구상 및 실행 II	**교사:** 지금까지 공부한 것을 이용할 수는 없을까? **학생:** 힌트 2뿐이라면 원입니다. **교사:** 좀 더 명확하게 말할 수 없을까요? **학생:** 반지름이 4cm, 중심이 점 '나'인 원입니다. **교사:** TP로 중심이 '나', 반지름이 4cm인 원을 그린다. 답은 어떻게 될까요? **학생:** 겹쳐지는 곳입니다. **교사:** 좀 더 정확히 말해봐요. **학생:** '가'의 원과 '나'의 원이 겹쳐지는 곳입니다. **교사:** 몇 군데 이지요? **학생:** 두 군데 입니다(이하 생략)	합리적이고 체계적으로 생각한다. 유추적 사고 **명확히 나타내려고 한다.**

2) 실험수업의 예 2

다음의 예는 일본의 新潟市立南万代小學校에서 木宮교사가 5학년 학생들을 대상으로 실시한 실험 수업의 예(이용률 외 3인 역, 1992, pp.161-169)로 평행사변형의 구적공식을 발견시키는 지도과정에서 수학적인 태도와 사고를 학생들에게 경험시키는 수업을 진행한 사례이다(<표 2>). 위의 사례 1에서와 마찬가지로 수학적인 사고와 태도를 유발하는 교사의 적절한 발문을 통해 학생들이 수학적인 태도를 바탕으로 사고를 해 나가도록 지도하는 과정이 잘 드러나 있다. 학습목표 2에 수학적인 태도와 사고력 지도를 위한 내용이 학습목표에 명확히 제시되어 있는 것이 눈에 띤다.

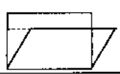
사례 2: 평행사변형의 구적(초등 5학년)

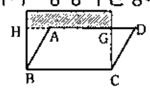
학습목표 1: 평행사변형의 구적 공식을 발견시킨다

학습목표 2: 보다 나은 것을 구하려는 태도 및 유추적인 생각을 육성한다.

준비물: 모눈종이, 평행사변형을 인쇄한 종이(학생들에게 배부)

<표 2> '평행사변형의 구적' 지도 수업의 예

문제 해결단계	교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동	수학적인 사고/태도
문제파악	**교사:** (그동안 학습했던 정사각형, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴 등의 여러 사각형을 그려 놓는다) 이 중에서 넓이를 구할 수 있는 것은 어떤 것인가요? **학생:** 정사각형과 직사각형입니다. **교사:** 오늘은 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 생각하기로 해요. 평행사변형이란 어떤 모양인지 그려보아요. (학생들이 그려보게 하고 평행사변형을 인쇄한 종이를 배부한다.)	
해결방안의 구상	**교사:** 어떻게 하면 구할 수 있을 것 같나요? **학생들:** (반수 가량) 두 변의 길이를 곱하면 됩니다. **교사:** 어째서 그렇게 생각했나요? **학생:** 가로와 세로의 길이를 곱했던 직사각형의 경우와 비슷하게 하면 될 것 같아요. **교사:** 그 밖의 다른 방법은 없나요? **학생:** 한 변이 1cm인 정사각형이 몇 개있나 보면 됩니다. **교사:** 왜 그렇게 생각하나요? **학생:** 직사각형에서 그렇게 했거든요. **교사:** 자투리가 생길걸요 **학생:** 직사각형의 경우와 비슷하게 생각하여 한 변이 1cm인 마름모가 몇 개있나 보면 됩니다.	개괄적인 해결방안을 구상하게 한다. **유추적 사고** **유추적 사고**
해결의 실행	**학생:** 각자의 방법으로 넓이를 구한다. 두 변의 길이를 곱한 학생(5×7=35㎠), 모눈을 세어 본 학생(자투리의 문제가 있다. 26㎠? 27㎠?), 한 변이 1cm인 마름모로 나누어 넓이를 구한 학생(35㎠) **교사:** 두 변을 곱한 경우는 직사각형과 같은 경우로 생각했군요. 어떤 직사각형의 넓이와 같은가요? **학생:** 가로가 7cm이고 세로가 5cm인 직사각형과 같아요. **교사:** 그것이 옳다는 이유는 무엇인가요? 한 번 비교해 볼까요?(평행사변형과 직사각형을 포개서 그리도록 한다). 직사각형의 넓이가 얼마나 더 크죠? **학생:** (빗금친 부분)이만큼 더 큽니다. 	왜 그렇게 하는 것이 옳은가? 합리적으로 생각 연역적. 조작의 의미를 바탕으로 생각

문제 해결단계	교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동	수학적인 사고/태도
논리적조직화	**학생:** 아! 빗금친 부분의 넓이를 뺀 직사각형의 넓이와 평행사변형의 넓이가 같다. CG의 길이가 4이므로 7×4＝28입니다. 	**보다 나은 방법을 구하려는 태도**
	교사: 틀림없이 BC와 CG를 곱하면 되는 것일까요? 어떻게 설명하면 될까?	합리적으로 생각하게 한다.
	학생: △ABH와 △DCG의 크기가 같으면 됩니다.	
	교사: (한 쪽 삼각형을 오려내어 포개 보도록 한다) 높이, 밑변의 의미를 가리키고 넓이공식으로 정리한다.	
	[한 변이 1cm인 마름모로 나누어 넓이(35㎠)를 구한 학생에 대한 지도]	
	교사: 왜 마름모를 세어서 35㎠가 나온 결과가 왜 정답과 다른 것일가?	
	학생: 한 변이 1cm인 마름모의 넓이를 1㎠로 한 것은 마름모의 넓이를 1×1로 본 것이다. 처음에 평행사변형의 넓이를 생각할 때, 두 변을 곱해서는 안되는 것과 마찬가지여서 잘못된 것입니다. (이하생략)	연역적인 사고

3) 실험수업의 예 3

다음의 예는 실험수업의 예 1, 2에서의 수업구성 아이디어를 기초로 하여 연구자가 재직하였던 있는 서울 소재 문성중학교에서 중학교 1학년 학생들을 대상으로 실시하였던 실험수업의 예(김남희, 1999, pp.442-446)이다. 연구자는 수량이나 수량 사이의 관계를 문자를 써서 간단한 식으로 나타내는 방법을 지도하는 과정(김연식, 김흥기, p.94)에서 학생들의 수학적인 사고와 태도를 유발할 수 있는 적절한 발문을 구상하고 수업중 그러한 발문을 던지면서 학생들이 수학적인 태도를 바탕으로 수학의 내용을 학습할 수 있도록 지도하고 있다. 아래<표 3>의 오른쪽에 기록되어 있는 수학적인 사고· 태도에 관한 설명은 수학적인 생각·태도와 그 지도에 관한 책 「문제해결과정과 발문분석」에 제시되어 있는 수학적인 생각·태도에 관한 발문분석일람에 따라 기록한 것이다(이용률 외 3인 역, 1992, pp.102-106).

사례 3: 문자식의 구성(중학교 1학년)

학습목표 1: 문자를 사용하여 수량 사이의 관계를 간단히 나타낼 수 있게 한다.

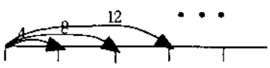
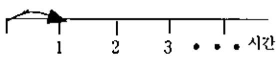
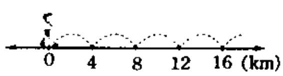
학습목표 2: 문자사용의 필요성과 유용성을 인식시킨다.

학습목표 3: 명확히 하려는 태도, 보다 나은 방법을 구하려는 태도의 육성

준비물: 노트, 필기도구

학습문제 : 한 시간에 4km씩 걷는 사람이 일정한 시간만큼을 걸었다. 일정한 시간 동안 그가 걸은 거리를 문자식으로 나타내어라

<표 3> '문자식의 구성' 지도 수업의 예

문제 해결단계	교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동	수학적인 사고/태도
문제파악 및 해결방안의 구상	**교사:** (학습문제 제시) 한 시간에 4km씩 걷는 사람이 일정한 시간 동안 걷게 된 거리를 구할 수 있는 표현을 여러분 생각대로 만들어 봅시다 (학생 나름대로의 생각해 보도록한다) **학생들:** 시간과 거리를 기록한 표를 그리거나 직선에 수직선처럼 눈금을 매겨서 거리를 표현  거리,시간을 직선상에 같이 표현한 그림도 있다.  4×1=4,4×2=8,4×3=12,...로 식을 나열한 경우 '일정한 시간을 걸었으니까, 거리=속력×시간'이라는 식으로 표현하는 경우 '시간=X, 거리=4×X' 등 다양한 표현을 만들어낸다	개괄적인 해결방안을 구상해 보게 한다.
해결방안의 구상	**교사:** 자신이 생각한 방법을 나와서 설명해볼까요? **학생:** (동료의 표현방법과 자신이 한 표현을 비교한다.) **교사:** 자! 같은 문제에 대해서도 이렇게 다양한 표현이 있을 수 있구나. 그런데 어느 방법이 가장 간단하면서도 명확한 방법일까?	**명확히 하려는 태도** 식에 관한 생각
해결계획의 수립	**교사:** 여러분이 한 방법들 하나하나를 살펴볼까요?  먼저 문제를 수직선과 같은 그림으로 나타내어 표현한 경우는 어떤 점이 좋은가요? **학생들:** 시간에 따라 거리가 일정하게 늘어나는 규칙을 눈으로 쉽게 확인할 수 있어요	다양한 문제표현의 장단점을 비교를 통해 문자사용의 필요성 인식

문제 해결단계	교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동	수학적인 사고/태도
해결계획의 수립	**교사:** 그런데 1, 2, 3 시간과 같이 자연수가 아닌 시간을 다루게 될 때는 어떻게 그리면 될까요? **학생들:** 음! 조금 복잡하고 어려워질 것 같네요. **교사:** 문제를 말로 표현하는 경우는 어떤가요? 문제가 길고 복잡할 때에도 쉽게 이해될까요? **학생:** 말로하면 복잡한 문제는 뭐가뭔지 잘 이해가 안될때가 있어요. **교사:** 4×□, 4×△, 4×○ (km) 등 걸은 시간 수를 □, △, ○ 등의 기호를 사용해서 식으로 표현하는 것은 어떤가요? 문제의 구조가 표현되나요? **학생들:** 네. 그런 것 같아요. 그리고 문제를 간단히 나타내서 좋아요. 문제를 식으로 나타내는 것이 가장 간단하고 명확할 것 같아요. **교사:** 그런데 만약 문제에서 다루어야 할 대상이 여러개 일 때는 □, △, ○ 의 기호만으로 어떻게 다 나타내지요?	(그림표현의 한계인식) (언어표현 한계 인식) (문자식 필요성 인식) **명확히 하려는 태도** 식에 관한 생각
해결계획의 수립	**학생들:** 기호가 부족해지네요. 그럼 어떠하나요? 좋은 방법이 없을까요? **교사:** 그래서 수학에서는 □, △, ○같은 몇 개의 기호 대신데 개수가 많은 알파벳문자를 이용하고 있어요. 알파벳을 이용한 식으로 문제의 구조를 나타낼 수 있겠지요? **학생들:** 네!	**보다 나은 방법을 구하려는 태도**
해결의 실행	**학생들:** 그렇다면 4×□의 식에서 □ 대신 x를 쓰면 거리는 4× x가 되네요. **교사:** 그렇죠. 이때 중요한 것은 식에 사용된 문자 x가 무엇을 나타내는 것인가를 분명히 해 놓아야 해요. **학생들:** x는 걸은 시간이지요.	식에 관한 생각 **명확히 하려는 태도**
검증 및 확장	**교사:** 식 4× x로 표현될 수 있는 문제를 또 만들어볼까요? **학생들:** (식 4× x로 표현될 수 있는 주변의 여러 가지 문제상황을 만들어 본다) 식당에 있는 식탁들의 다리개수의 합, 우리반 학생들에게 사탕을 4개씩 나누어 주기위해 필요한 사탕의 개수 등 다양한 답안이 나옴 **교사:** 친구들의 답안을 서로 비교해 보세요. 여러분이 만든 문제들은 서로 다르지만 모두 4× x라는 식으로 정리되지요? **학생들:** 식 4× x는 x를 무엇으로 정하느냐에 따라 여러 가지 문제상황을 나타낼 수 있네요. **교사:** 그래요. 문자를 사용한 식은 4× x와 같이 간단한 식이라도 그 구조에 주목하면 실제로 다양한 문제 상황을 일반적으로 나타내는 표현이 될 수 있겠지요?. (이하생략)	발전적인 생각 식을 읽으려는 생각 (어떤 문제를 만들어낼 수 있는가) 통합적인 생각 일반화의 생각

4) 실험수업의 예 4

다음의 예 역시 실험수업의 예 1, 2에서의 수업 구성 아이디어를 기초로 하여 연구자가 재직하였던 서울 소재 문성중학교에서 1학년 11반 학생들을 대상으로 1999년 10월 1일에 실시한 실험 수업(1차시분)의 예이다.

연구자는 다각형의 대각선의 총수에 대한 일반식을 구성하는 학습(김연식, 김흥기, p.228)에서 지도될 수 있는 수학적인 태도와 사고를 학생들에게 경험시키기 위한 적절한 발문을 구상하고 계획된 수업안에 따라 수업을 진행하였다. 아래의 <표 4>에서 학생의 학습 활동에서 의도하는 수학적인 사고나 태도에 대한 설명은 실험수업의 예 3에서 언급한 바 와 같이 수학적인 생각 · 태도에 관한 발문분석일람에 따라 기록한 것이다(이용률 외 3인 역, 1992, pp.102-106).

사례 4: 다각형의 대각선의 총수(중학교 1학년)

학습목표 1: 다각형에서 대각선의 총수를 구하는 방법을 알게 한다.

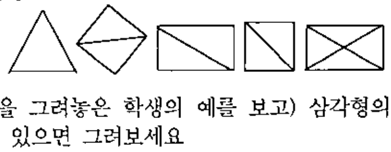
학습목표 2: 여러 가지 다각형의 대각선의 총수를 구할 수 있게 한다.

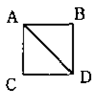
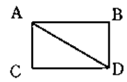
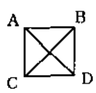
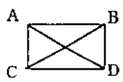
학습목표 3: 함수적 사고, 일반화의 사고를 경험하게 한다.

준비물: 노트, 필기도구

학습문제 : 다각형의 대각선의 총수를 구하여 보자.

<표 4> '다각형의 대각선의 총수' 지도 수업의 예

문제 해결단계	교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동	수학적인 사고/태도
문 제 제 시 및 문 제 파 악	**교사:** (학습문제 제시) 문제에 제시되어 있는 대각선이란 무엇인가요? 초등학교때 배운 대각선을 도형 위에 그려 보세요. **학생들:** 대부분이 정사각형이나 직사각형을 그리고 대각선을 그린다. 삼각형만 그려 놓은 학생도 몇몇 있다 : (학생 답안의예)  **교사:**(삼각형을 그려놓은 학생의 예를 보고) 삼각형의 경우엔 대각선이 있나요? 있으면 그려보세요 **학생들 :** 삼각형에는 대각선이 그려지지 않아요 **교사:** 여러분이 그린 사각형에 다음과 같이 꼭지점의 이름을 붙여봅시다. 점 A에서 대각선을 그으면 점 B, C, D 중 어떤 점과 연결되나요?	문제를 명확히 하려고 한다. 구체화의 생각 (예를 들면 어떤 것인가?)

문제 해결단계	교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동	수학적인 사고/태도
문제제시 및 문제파악	  **학생:** 점 D입니다. **교사:** 자! 점 A에 바로 옆에 있는 점 B나 C에 대각선을 그을 수 있나요? **학생:** 그을 수 없어요! 바로 옆에 있는 점끼리 연결하면 대각선이 되지 않아요. **교사:** 맞아요.! ('바로 옆에 있는 점'에 대하여 '이웃하는 점'이란 용어를 사용할 것을 지도) 한 꼭지점에서 이웃하는 두 꼭지점과는 대각선을 그을 수 없어요. (이 때 교사는 대각선의 정의를 설명한다). 다각형에서 대각선이란 이웃하지 않은 두 꼭지점을 이은 선분이예요. **교사:** 그럼 사각형에는 대각선이 모두 몇 개 있나 그려보세요. **학생:** 그려보면 사각형에는 대각선이 총 2개 있습니다.   **교사:** 그럼, 오각형에는 대각선이 총 몇 개있나요? **학생:** (오각형을 그리고 대각선의 개수를 센다) 오각형의 대각선은 총 5개예요. **교사:** 자! 오늘 우리가 해결해야 할 문제는 바로 사각형, 오각형 등의 여러 가지 다각형에서 대각선의 총 개수를 구하는 것이예요.	문제를 명확히 하려는 태도
해결계획의 수립	**교사:** 자! 육각형의 대각선은 총 몇 개인 지를 앞에서와 같이 그림을 그려서 알아볼까요? **학생:** (육각형을 그리고 대각선의 수를 센다) 9개예요. **교사:** 사각형, 오각형의 경우와 비교하여보면 대각선의 총 개수에 어떤 변화가 있나요? **학생:** 변의 개수가 늘어나니까 대각선의 개수도 따라서 증가하네요. **교사:** 그럼, 삼십이각형이나 오십각형 등의 대각선의 총 개수는 더 커질텐데 그 개수를 그림을 그려서 쉽게 셀 수 있을까요? **학생:** 아니요! 개수가 너무 많아 쉽게 구하기는 어려울 것 같아요. **교사:** 그렇죠? 그러니까 대각선의 개수를 쉽게 구할 수 있는 방법을 궁리해 봅시다. 대각선의 총수를 구하는데 일정한 규칙이 있는지 알아보려면 어떨까요?	구체화의 생각 보다 나은 방법을 구하려는 태도

<table>
<tr><th>문제
해결단계</th><th>교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동</th><th>수학적인 사고/태도</th></tr>
<tr><td>해결
계획
의
수립</td><td>

학생들: "좋아요!" 또는 "글쎄요!" (반응 없음)

교사: 방금 해 보았던 사각형, 오각형, 육각형의 몇 가지 경우에서 규칙이 있는지 찾아볼까요?

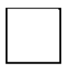
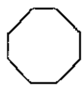
학생들: 사각형, 오각형, 육각형의 경우에서 규칙이 발견되었으면 좋겠어요.

</td><td>합리적이고 체계적으로 생각한다.</td></tr>
<tr><td>해
결
의
실
행</td><td>

교사: 표를 그려보면 규칙을 발견하기 쉽죠.

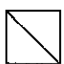
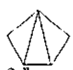
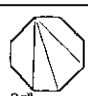
학생: 어떻게 표를 그리지요?

교사: 자! 표를 잘 만들어야 규칙을 쉽게 찾아 쓸 수 있어요.(아래와 같은 표를 노트에 그리도록 지도)

<table>
<tr><td>다각형</td><td>사각형</td><td>오각형</td><td>육각형</td><td>...</td><td>n각형</td></tr>
<tr><td>한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 수</td><td></td><td></td><td></td><td>...</td><td></td></tr>
<tr><td>꼭지점의 개수</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>대각선의 총수</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

교사: 각 도형의 한 꼭지점에서 대각선을 그려 보세요.

학생: (각자 대각선을 그리고) 교사의 안내에 따라 반 칸에 적당한 수를 적는다.)

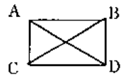
<table>
<tr><td>다각형</td><td>사각형</td><td>오각형</td><td>육각형</td><td>...</td><td>n각형</td></tr>
<tr><td>한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 수</td><td>
1개</td><td>
2개</td><td>
3개</td><td>...</td><td>
(n-3)개</td></tr>
<tr><td>꼭지점의 개수</td><td>4개</td><td>5개</td><td>6개</td><td></td><td>n개</td></tr>
<tr><td>대각선의 총수</td><td>2개</td><td>5개</td><td>9개</td><td></td><td></td></tr>
</table>

교사: 한 꼭지점에서 그은 대각선의 수, 꼭지점의 개수, 대각선의 총 수 사이에는 어떤 관계가 있을까요?

한 꼭지점에서 그은 대각선의 수가 꼭지점의 수만큼 반복될텐데 (한 꼭지점에서 그은 대각선의 수)×(꼭지점의 수)가 바로 대각선의 총 수가 되나요? .

학생: 아니오! 곱한 결과의 ½이 대각선의 총수인데요.

교사: 왜 ½을 해야 할까요. 그 이유는 무엇일까요? 꼭지점 A, B, C, D를 따라 대각선을 차례차례 그려 보면서 잘 생각해 보세요.

학생: 

그려보면 꼭지점 A(B)에서 그린 대각선과 꼭지점 D(C)에서 그린 대각선은 같은 것이예요.

</td><td>간단한 경우를 생각해 본다(단순화의 생각)

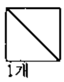
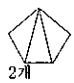
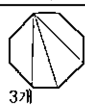
어떤 규칙이 있을 것 같은가? 자료를 모아 보아라 (귀납적인 생각)

함수적 사고
(이들 사이에는 어떤 관계가 있는가)

합리적으로 생각하려는 태도(왜 이렇게 하는 것이 옳은가?)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>문제
해결단계</th><th>교사의 지도와 발문에 따른 학생의 학습 활동</th><th>수학적인 사고/태도</th></tr>
<tr><td>해
결
의
실
행</td><td>

교사: 그럼 꼭지점마다 그릴 수 있는 대각선의 개수를 모두 합하여 반으로 나누어야 겠군요. 사각형, 오각형, 육각형의 대각선의 총수를 식으로 나타내어 써보면서 n각형의 경우에는 대각선의 총수가 어떤 식으로 나타나타나야 하는지 써 보세요(학생의 활동 유도)

<table>
<tr><td>다각형</td><td>사각형</td><td>오각형</td><td>육각형</td><td>...</td><td>n각형</td></tr>
<tr><td>한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 수</td><td>
1개</td><td>
2개</td><td>
3개</td><td>...</td><td>
(n-3)개</td></tr>
<tr><td>꼭지점의 개수</td><td>4개</td><td>5개</td><td>6개</td><td>...</td><td>n개</td></tr>
<tr><td>대각선의 총수</td><td>2개
$\frac{4\times1}{2}$</td><td>5개
$\frac{5\times2}{2}$</td><td>9개
$\frac{6\times3}{2}$</td><td>...</td><td>$\frac{n(n-3)}{2}$</td></tr>
</table>

</td><td>알고리즘의 생각
(이런 것은 어떻게 처리하면 좋겠는가)

일반화의 생각</td></tr>
<tr><td>검
증
및
일
반
화</td><td>

교사: 대각선의 총수를 구하는 식 $\frac{n(n-3)}{2}$ 에서 n은 무엇을 의미하는 것인가요?

학생: 다각형의 변의 개수(또는 꼭지점의 개수)지요.

교사: 그럼 사각형의 경우엔 꼭지점이 4개니까 n의 값이 4가 되겠군요.

학생: 네!

교사: 대각선의 총수를 구하는 식 $\frac{n(n-3)}{2}$ 을 사각형의 경우에 적용해 볼 수 있을까요?

학생: 네 n 대신에 4를 써서 식을 구하면 되지요. 사각형의 대각선의 총수를 구하는 식은 $\frac{4\times1}{2}$=2(개)이어요. 표에서 구한 답하고 같아요.

교사: 그럼! 오각형, 육각형..의 경우에도 식 $\frac{n(n-3)}{2}$ 을 이용하면 표에서 구한 답과 같나요?

학생: 네! 표에서 구한 값과 식 $\frac{n(n-3)}{2}$ 으로 계산한 값이 같아요.

교사: 문자 n 대신에 4, 5, 6....등의 수가 대신 들어갈 수 있으니까 식 $\frac{n(n-3)}{2}$ 은 n각형의 대각선의 총수를 구하는데 일반적으로 나타내는 식이 됩니다. 그럼 십오각형, 오십각형의 대각선의 총수도 구해볼까요?

학생: (식 $\frac{n(n-3)}{2}$ 을 이용하여) 90개, 1175개요.

(이하생략)

</td><td>명확하게 하려는 태도

특수한 경우를 생각해 보아라(특수화의 생각)

일반화의 생각
(일반화로 사용된 변수의 의미 파악)</td></tr>
</table>

이상에서 제시한 4가지의 수업사례는 학년이나 수학의 내용 등에 관계없이 수학적 사

고·태도의 지도가 수학의 어떤 내용을 다루는 수준에서도 가능하다는 것을 잘 보여주고 있다. 여기서는 고등학교 수학의 지도 내용에 대한 예가 제시되어 있지는 않지만 고등학교 수준에서도 교사의 수업연구를 바탕으로 위와 같은 맥락의 수업이 행해질 수 있을 것이다. 만약 학생들이 초등학교, 중학교 수준에서 교사의 적절한 발문과 그에 따른 학생의 수학적 사고가 연결되는 위와 같은 수업 형태를 경험하였다면 이같은 수학수업 방식에 익숙해져 있어서 고등학교 수준에서도 수학적 사고·태도에 의한 수학 내용의 학습이 수월하게 이루어질 수 있을 것이다.

위와 같은 수업 구성을 계획하고 수업을 진행하면서 연구자가 경험한 바는 무엇보다도 수업이 교사의 발문에 따른 학생들의 반응으로 진행되는 특성으로 인해 수학수업에 대한 학생들의 참여도가 상당히 높아졌다는 점이었다. 또한 수업 준비과정에서 교사의 교재연구가 상당히 충실해질 수 있었다는 점도 들 수 있다. 그 과정에서 교사는 수학의 내용을 지도해 나갈 때 학생들의 사고과정이 학습을 통해 어떻게 진행되어 나갈 것이며 그들의 사고를 교사가 어떠한 방향으로 이끌어 나가는 것이 자연스러운 것인가에 대해 많은 고민을 하게 된다. 그리고 그러한 고민을 바탕으로 상당한 주의를 기울여 수업 계획을 세워나가게 된다. 연구자는 수업구성을 위한 계획을 세우는 단계에서부터 실제로 수업을 실시하는 과정을 마칠 때까지 구성주의에서 강조하는 '지식의 구성' 다시 말하면 학생들 나름대로의 주관적 지식에서 출발하여 객관화된 수학적 지식을 형성해 나가기까지의 일련의 사고 과정의 주체가 바로 교사가 아닌 학습자이어야 한다는 것이 수학수업을 이끌어가는 교사에게 주어진 중요한 과제라는 것을 인식하게 되었다. 그리고 이러한 과제가 여러 가지 현실적인 어려움을 잠시 접어두고 수학적인 사고·태도의 중점을 둔 위와 같은 수학수업을 전개해 보는 시도 속에서 어느 정도는 해결 가능하다는 것을 나름대로 깨달을 수 있었다.

위와 같은 수업 구성에서 교사는 학생들이 보이는 그들 나름대로의 주관적인 지식을 확인하고 이를 수정 또는 보완해 나가면서 객관화된 지식으로 바꾸어나가는 과정에 주안점을 두고 있기 때문에 학생들은 교사의 안내 속에 나름대로 수학적 지식을 만들어가는 과정에 자연스럽게 참여할 수 있게 된다. 연구자는 이것이 바로 학교수학수업의 모습이어야 하며 이제까지 소개되어 온 여러 수학교수학의 이론 및 열린수학교육, 구성주의 수학교육론에서 공통적으로 주장하고 있는 수학교육방법의 핵심이라고 생각한다.

이러한 맥락에서 위에서 제시된 실험수업의 예들은 현재의 학교현실 상황에 안주하여 자칫 수학적 사고의 고려 없이 단순한 지식전달에 그칠 수 있는 학교수학의 내용들을 수학적 사고·태도와 관련지어 학생의 사고과정과 수학적 지식의 발견과정을 중요하게 다룬 의미 있는 수업구성이었다는 점에 큰 의의가 있다고 생각한다.

V. 맺음말

본 논문은 우리나라 학생들의 수학적 사고의 실태에 대한 문제의식을 연구의 배경으로 하여 '수학적 사고교육'이라는 학교수학교육의 목적을 최근 수학교육의 동향에서 재확인하고 수학적 사고에 중점을 둔 수학교육의 필요성에 대해서 주장하고 있다.

수학적인 사고·태도에 중점을 둔 지도사례를 제시하면서 그러한 구성의 수업이 수학적 사고교육을 지향하는 학교수학 수업의 구체적인 형태 중의 하나가 될 수 있음을 보이고 있다. 수학의 내용은 가르칠 수 있는 위치에 있는 사람 즉, 교사의 입장에서는 지극히 간단하고 평이한 내용일 수 있지만 그 내용을 처음 배우는 학생들에게는 도달하기 힘겨운 새로운 도전이다. 따라서 교사는 학습자가 수학의 개념을 보다 쉽고 자연스럽게 학습해 나갈 수 있도록 적절한 안내를 해 주어야 할 의무가 있는 바, 여기서 제시된 지도사례들이 바로 수학적 지식으로의 안내과정을 적절히 실현해내려는 시도의 한 예로 설명될 수 있다.

수학적 사고· 태도에 초점을 둔 수업의 사례로 제시된 4가지의 예는 전통적인 하향식 지도 수업에서와는 달리 교사의 신중한 수업 계획에 따른 적절한 발문을 통해 학생의 사고과정과 수학적 지식의 발견과정이 학생에 의해서 활발하게 이루어질 수 있음을 보이고 있다. 앞장에서도 언급하였듯이 수학적 사고·태도에 중점을 둔 수업에서는 학생의 능동적인 수업 참여를 유도하면서 수학의 내용과 관련된 수학적 사고의 경험 및 그러한 사고를 바탕으로 한 수학적 지식의 구성을 꾀하고 있다. 그리고 그러한 수업의 시행을 통해서 단순한 지식 전달 위주의 수업을 지양하고 교사의 적절한 안내 하에 학생들이 새로운 수학의 내용을 자연스럽게 이해해 나가며 객관화된 수학적 지식에 접근해 나갈 수 있다는 가능성을 보여주고 있다.

본 논문에서는 수학적 사고·태도에 중점을 둔 위와 같은 수업 사례들이 최근 수학교육의 동향에서 요구하고 있는 학교수학교육의 방향에 따른 수업의 한 형태가 될 수 있음을 주장하고자 한다. 여기서 제시된 수업사례의 기본 전제인 수학적 개념이나 아이디어의 바탕이 되는 수학적인 사고의 경험은 바로 다름아닌 열린수학교육에서 요구하는 수학 내적인 열림이며 학생들이 수학적인 사고를 바탕으로 새로운 수학의 내용을 만들어나가는 과정은 다름아닌 구성주의 수학교육에서 주장하는 수학적 지식의 구성에 가깝게 접근하고자하는 시도라고 할 수 있다.

현재의 수학교사들은 학교수학교육의 변화를 요구하고 있는 여러 가지 외적상황에 상당히 혼란을 느끼며 힘겨워하고 있는 상태이다. 구성주의 수학교육론, 열린교육의 이념, 교육

과정과 평가방법의 변화가 현실화되면서 교수 · 학습 방법상에 미치는 변화에서 요구하는 조건에 만족되는 수학수업의 구성에 때로는 불만섞인 어려움을 호소하기도 한다. 이러한 불만과 어려움은 최근의 수학교육의 동향으로부터 학교현장과 교사들에게 요구되는 변화들을 서로 독립된 관점에서 바라보고 각기 다른 영역에서 별도의 방법으로 접근되어야 하는 것으로 생각하는 것에서 비롯되는 듯하다.

최근 수학교육의 동향은 예나 지금이나 다름없는 수학적 사고교육이라는 학교수학교육의 목적을 교수 · 학습 방법상의 측면에서, 평가의 측면에서, 교육과정의 측면에서 새롭게 강조하고 있는 것으로 보는 것이 타당하다. 이들을 서로 독립된 것으로 받아들이지 말고 수학적 사고교육이라는 공통의 틀 아래에서 학교수학의 교육을 자리매겨가겠다는 다각적인 시도로 받아들이는 것이 바람직하다고 생각하는 것이다.

따라서 학교수학교육에서 일어나야 할 변화는 팀 학습, 학습지 이용, 적절한 보상과 경쟁 체제 도입 등의 수업 외적 조건의 변화가 아니라 수업 내적인 변화 즉, 수학적 사고교육으로의 수학수업의 본질적인 변화이다. 이러한 맥락에서 본 논문에서 제시하고 있는 4 가지의 수업사례는 학교현장의 수학수업에서 수업의 특별한 외적 조건의 변화 없이도 최근에 요구되는 수학교육의 요구들을 충분히 반영해 나갈 수 있음을 잘 보여주고 있는 실질적인 예가 될 수 있다고 생각한다.

본 논문을 통해 어떤 특별한 결론을 얻어내겠다는 바램보다는 수학교사인 우리가 학교수학교육의 목적을 다시 한 번 확인하고 의미있는 수학수업에서 고려되어야 할 점들을 생각하면서, 자신의 수업을 한 번 쯤 되돌아보고 현재 우리의 수학 수업의 모습에 대한 반성을 해보기를 기대한다. 이러한 반성을 통해 그 동안 지적되어왔던 단순한 지식전달위주의 학교수학수업의 모습이 점차로 변화되어야 갈 필요성이 있다는 점에 많은 수학교사들이 의견을 같이 할 수 있길 바란다. 더불어 교실여건과 관련된 여러 가지 현실적인 어려움에 대한 토로를 잠시 접어두고 학생들에게 의미있는 수학학습을 제공하기 위한 바람직한 수학 수업의 구상을 한 번 쯤 시도해보길 기대한다.

참 고 문 헌

교육부(1996). 초등학교 수학 1-1, 수학 2-1, 수학 5-1. 서울: 교육부

김남희(1999). 대수적 언어학습으로서의 문자식의 지도 -중학교 1학년 문자와 식 단원의 지도계획안 구성 및 수업사례-. 대한수학교육학회 논문집 제 8권 제 2호,

pp.439-452
김연식, 김흥기(1998). 중학교 수학 Ⅰ. 두산동아
이경화(1998). "열린"수학교육과 "열린수학"의 교육. 대한수학교육학회 수학교육연구 발표회 자료집 「열린수학교육의 이론과 실제」, pp.79-96
이용률 외 3인 역(1992). 數學的인 생각 · 態度와 그 指導 Ⅱ: 問題解決過程과 發問分析. 경문사
한국교육과정평가원(1998). 제 7차 교육과정 개정에 따른 수학과 수준별 교육 과정 적용 방안과 교수-학습 자료 개발 연구.
平林一榮(1999a). 數學教育の進歩と展望. 대한수학교육학회 1999년도 춘계 수학교육학연구발표대회논문집, pp.1-32.
平林一榮(1999b). 數學教育の諸問題 - 新しい教材開發を中心に. 초청강연자료. 서울대 수학교육과.

The Teaching of School Mathematics Focusing on the Mathematical Thinking and Attitude

Kim Nam Hee (Nangok Junior High School)

In this study, we tried to suggest a meaningful teaching method that is a mathematical thinking-oriented. After referring to the recent trend of mathematics education, we examined the direction that school mathematics should go. Next, we considered previous studies that deals with teaching methods focusing on the mathematical thinking. On the basis of the above examination, we accomplished case studies that aims at mathematical thinking-oriented teaching. And we explained that these case studies reflects the key points didactics of mathematics such as the education of 'open mathematics', constructivism etc. Finally, we proposed the necessity of mathematical thinking-oriented teaching in the current state of school mathematics.