

기하학적 형태 변환을 보장하는 퍼지 수학적 형태학

Fuzzy Mathematical Morphology Ensuring Geometric Morphological Transformations

윤창락 · 김황수*

Chang-Rak Yoon and Hwang-Soo Kim*

한국전자통신연구원 컴퓨터소프트웨어기술연구소 영상처리연구부 클라이밍연구팀

* 경북대학교 자연과학대학 컴퓨터학과

요 약

본 논문은 영상에서 형태적 정보를 추출하는데 사용되는 수학적 형태학(mathematical morphology)에 퍼지 집합 이론을 적용하여 새로운 퍼지 수학적 형태학을 제안한다. 일반적인 수학적 형태학은 이진 영상에만 적용되는 한계를 가지고 있었다. 이를 그레이 스케일 영상에도 적용가능하도록 한 Sinha와 Dougherty[8]이 제안한 방법도 기하학적 형태 변환을 보장하지 못하는 결점이 있었는데 본 논문에서는 그 결점을 제거하는 새로운 수축(erosion)과 확장(dilation) 연산을 정의하고 그 특성을 연구하였다. 본 논문이 제안한 방법과 [8]의 방법을 실제 영상에 대한 실험으로 비교하였다.

ABSTRACT

This paper proposes fuzzy mathematical morphology, which combines mathematical morphology with fuzzy set theory and it is used to extract morphological information from images. Conventional morphology is applicable only to binary images. Sinha and Dougherty[8] extended it to fuzzy mathematical morphology which is applicable to gray-scale images morphological transformations. However their method does not ensure geometric morphological transformations. We defined new erosion and dilation operators which do not have such defects. The characteristics of our operators are presented, and the results are compared to [8].

1. 서 론

수학적 형태학(mathematical morphology)은 형태에 기반한 영상 처리 기법이다[1-4,6,9]. 수학적 형태학은 집합 이론에 근거하여 영상과 구성 요소(structuring element)를 집합 연산으로 표현한다. 수학적 형태학의 연산들 중 erosion 연산은 기하학적 수축 연산을 행하고 dilation 연산은 기하학적 확장을 행한다. 이들 연산은 다른 형태학적 연산들의 기본이 된다[1-4,6,9]. 그러나, 일반적인 수학적 형태학은 이진 영상에서만 적용되는 한계가 있었다. 따라서, 그레이 스케일 영상에 대하여 정확한 형태 변환을 수행하기 위해서는 퍼지 집합 이론을 도입한 퍼지 수학적 형태학(fuzzy mathematical morphology) 연구가 필요하다. Sinha와 Dougherty[7,8]는 퍼지 집합들간의 포함 정도를 계산하는 퍼지 집합 포함 함수(fuzzy set inclusion function)를 이용하여 퍼지 erosion 연산과 퍼지 dilation 연산을 정의하였다. 이들이 제안한 퍼지 erosion 연산은 기하학적 수축 변환을 보장하지 못하며, 퍼지 dilation 연산은 기하학적 확장 변환을 보장하지 못하였다. 즉, 퍼지 erosion 연산의 경우 퍼지

구성 요소의 화소들 중에서 퍼지 값이 1인 화소가 하나도 없으면 퍼지 영상에서 퍼지 값이 0인 화소는 연산 수행 후 퍼지 값이 0보다 큰 값이 되어 수축 변환이 이루어지지 않고 오히려 확장 변환이 이루어질 수 있다. 또한, 퍼지 영상에서 0보다 큰 퍼지 값을 가지는 화소가 퍼지 dilation 연산 수행 후 퍼지 값이 0이 되어 확장 변환이 아닌 수축 변환이 이루어질 수 있다. 이러한 결과는 퍼지 수학적 형태학의 연산을 적용한 후의 결과에 대한 신뢰성을 떨어뜨린다.

본 논문에서 정의한 퍼지 수학적 형태학의 연산들 중 퍼지 erosion 연산은 erosion 연산의 특징인 수축 변환을 보장한다. 다시 말해, 퍼지 erosion 연산의 경우 퍼지 영상에서 0의 퍼지 값을 가지는 화소는 퍼지 구성 요소의 화소의 퍼지 값에 관계없이 퍼지 erosion 연산 수행 후 퍼지 값이 0이 되며, 퍼지 영상에서 0보다 큰 값을 가지는 화소도 퍼지 erosion 연산 수행 후 퍼지 값이 0이 될 수 있다. 따라서, 퍼지 erosion 연산은 이차원 형태 정보의 기하학적 수축 변환을 보장한다. 퍼지 dilation 연산의 경우 퍼지 영상에서 0보다 큰 값을 가지는 임의의 화소는 퍼지 dilation 연산 수행 후 퍼지 값이 0보다 큰 값을 가지며, 퍼지 영상

에서의 0인 퍼지 값을 가지는 임의의 화소는 퍼지 dilation 연산 수행 후 0보다 큰 값을 가질 수 있다. 따라서, 퍼지 dilation 연산은 확장 변환을 보장한다.

본 논문에서 정의한 퍼지 수학적 형태학의 형태학적 연산들은 다양한 특성들을 가지며, 이러한 특성들을 고찰함으로써 퍼지 수학적 형태학을 체계화 할 수 있고, 응용 분야에서의 편리성을 도모할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 본 논문에서 제안하는 퍼지 수학적 형태학을 설명하고 그 특성을 고찰하며, 3절에서는 실험 결과를 제시하고 [8]과 비교, 고찰한다. 4절에서는 결론을 맺으며 특성들에 대한 증명을 부록으로 첨부하였다.

2. 퍼지 수학적 형태학

본 절에서는 먼저 퍼지 수학적 형태학에서 사용하는 퍼지 영상과 퍼지 구성 요소에 대해 설명하고 다음으로 퍼지 형태학적 연산들을 정의하고 그 특성들을 고찰한다.

2.1 퍼지 영상

수학적 형태학에서 다루는 퍼지 영상은 각 화소가 0에서 1 사이의 퍼지 값을 가진다. 본 논문에서는 각 화소의 값이 0과 $n(n > 0)$ 사이의 정수 값을 가지는 그레이 스케일 영상을 퍼지 영상으로 변환하였다.

본 논문의 실험에 사용한 그레이 스케일 영상에서 임의의 화소가 가지는 그레이 값이 작을수록(검을 수록) 그 화소가 물체에 속하는 정도가 크고 임의의 화소가 가지는 그레이 값이 클수록 그 화소가 물체에 속할 정도가 작다고 가정한다. 따라서 퍼지 영상은 다음 식으로 얻는다.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in E^N\} \quad (1)$$

$$\mu_A(x) = 1 - \frac{g(x)}{n} \text{ for } 0 \leq g(x) \leq n$$

여기서 A 는 퍼지 영상, x 는 픽셀의 위치, $\mu_A(x)$ 는 그 위치의 퍼지 값, E^N 은 N 차원 유클리드 공간, $g(x)$ 는 그레이(밝기)값, n 은 그레이 값의 최대치이다.

퍼지 수학적 형태학의 연산들을 정의하기 위해 다음과 같은 변환을 정의하자.

식 (2)는 벡터 v 에 의한 퍼지 영상 A 의 이동 변환을 정의한다.

$$(A;v) = \{(x, \mu_{(A;v)}(x)) \mid x \in E^N\} \quad (2)$$

$$\mu_{(A;v)}(x) = \mu_A(x-v)$$

식 (2)에서 $(A;v)$ 는 퍼지 영상 A 를 벡터 v 만큼 이

동시킨 후의 결과 퍼지 영상이다.

식 (3)은 퍼지 영상 A 의 원점에 대한 대칭 변환을 정의한다.

$$-A = \{(x, \mu_{-A}(x)) \mid x \in E^N\} \quad (3)$$

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x)$$

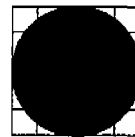
2.2 퍼지 구성 요소

수학적 형태학을 이용하여 영상으로부터 형태 정보를 추출할 때, 구성 요소의 형태는 형태학적 변환의 결과에 중요한 영향을 미친다. 본 논문에서는 구성 요소의 각 화소가 0에서 1 사이의 연속적인 값을 가지게 하고 이를 퍼지 구성 요소라 한다. 퍼지 구성 요소는 식 (4)와 같이 정의한다.

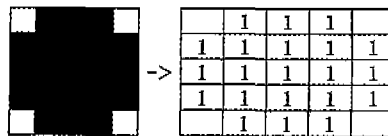
$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in E^N\} \quad (4)$$

$$\mu_B(x) = \int_x f(x) dx$$

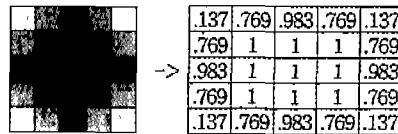
식 (4)에서 B 는 퍼지 구성 요소이며, $f(x)$ 는 퍼지 구성 요소의 형태를 표현한 식으로서 퍼지 구성 요소의 화소가 가지는 퍼지 값은 구성요소가 그 화소를 차지하는 면적비율이다. 이차원 영상에서 임의의 화소가 가질 수 있는 최대 면적을 1로 하면 퍼지 구성 요소에서 임의의 화소는 0에서 1까지의 값을 가질 수 있다. 그림 1(b)는 그림 1(a)의 이차원 형태 정보에 대한 수학적 형태학에서의 구성요소이고, 그림 1(c)는



(a) 이차원 형태 정보 (2D morphological shape)



(b) 수학적 형태학에서의 구성요소 (structuring element)



(c) 퍼지 수학적 형태학에서의 구성요소 (fuzzy structuring element)

그림 1. 구성 요소와 퍼지 구성 요소(structuring element vs. fuzzy structuring element)

그림 1(a)의 이차원 형태 정보에 대한 퍼지 수학적 형태학에서의 퍼지 구성 요소이다.

2.3 퍼지 erosion

Sinha와 Dougherty[8]에서는 퍼지 수학적 형태학의 퍼지 형태학적 연산들 중 퍼지 erosion 연산을 식 (5)와 같이 정의하였다.

$$A \ominus B = \{(x, \mu_{A \ominus B}(x)) \mid x \in E^N\} \quad (5)$$

$$\mu_{A \ominus B}(x) = \inf_{z \in E^N} \min[1, \mu_A(z) + \mu_{B^c(x)}(z)]$$

식 (5)에서 A 는 퍼지 영상이고 B 는 퍼지 구성 요소이다. 식 (5)에 따르면 퍼지 erosion 연산 후 임의의 화소 x 에서의 퍼지 값은 항상 다음 식을 만족한다.

$$\mu_{A \ominus B}(x) \geq 1 - \sup_{z \in E^N} \mu_B(z) \quad (6)$$

식 (6)에 따르면 퍼지 구성 요소의 화소들 중에서 퍼지 값이 1인 화소가 존재하지 않으면 퍼지 영상 A 에서 0의 퍼지 값을 갖는 임의의 화소 x 가 퍼지 erosion 연산을 수행한 후 0보다 큰 퍼지 값을 가지므로 이차원 형태 정보의 기하학적 수축 변환을 할 수 없다.

본 논문에서 제안한 퍼지 수학적 형태학은 기하학적 수축 변환을 보장하기 위해 퍼지 erosion 연산을 식 (7)과 같이 정의한다.

$$A \ominus B = \{(x, \mu_{A \ominus B}(x)) \mid x \in E^N\} \quad (7)$$

$$\mu_{A \ominus B}(x) = \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{B(x)}(z))]]$$

여기서,

$$\text{MRF}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{if } b = 0 \\ \frac{a}{b} & \text{otherwise} \end{cases}$$

정의된 퍼지 erosion 연산의 의미는 화소 x 에서의 연산 결과 값을 구하기 위해 퍼지 구성 요소를 벡터 x 만큼 이동시킨 후 모든 화소들에 대해 퍼지 구성 요소의 퍼지 값과 퍼지 영상의 퍼지 값들의 비율(ratio)을 구하여 각 화소에서의 퍼지 구성 요소가 퍼지 영상에 포함되는 정도를 구한다. 이렇게 구해진 비율들 중 최소 값을 화소 x 에서 퍼지 구성 요소가 퍼지 영상에 포함되는 정도로 간주하여 화소 x 에서의 퍼지 값으로 한다.

식 (7)에서 MRF는 보완된 비율 함수(modified ratio function)로서 임의의 화소에 대해 퍼지 구성 요소의 퍼지 값을 분모로 하고 퍼지 영상의 퍼지 값을 분자로 하여 비율을 구하는 함수이다. MRF 함수에서 분모가 0인 경우 결과 값을 1로 하는 이유는 임의의

화소 x 에 대해 퍼지 구성 요소의 퍼지 값이 0일 경우 퍼지 영상에서의 퍼지 값에 상관없이 화소 x 에서의 포함 정도를 1로 볼 수 있기 때문이다.

제안된 퍼지 erosion 연산은 이차원 형태 정보의 기하학적 수축 변환을 보장한다. 식 (7)에서 MRF함수의 분자는 퍼지 영상의 퍼지 값이다. 따라서, 퍼지 영상의 퍼지 값이 0인 경우 퍼지 구성 요소의 화소들의 퍼지 값에 상관없이 퍼지 erosion 연산의 결과값은 0이 되므로 이차원 형태 정보의 기하학적 수축 변환이 보장된다.

제안된 퍼지 erosion 연산은 증가 특성(increasing property), 이동 불변성(translation invariance), 분배법칙(distributive laws)을 만족한다. 이러한 특성들에 대한 증명은 부록에 있다.

특성 1. 퍼지 erosion 연산의 증가 특성

$$\text{만약 } A \subseteq B \text{ 이면, } A \ominus C \subseteq B \ominus C \text{ 이다.} \quad (8)$$

특성 2. 퍼지 erosion 연산의 이동 불변성

$$\text{벡터 } \tau \in E^N \text{에 대해 } (A; \tau) \ominus B = ((A \ominus B); \tau) \text{ 이다.} \quad (9)$$

특성 3. 퍼지 erosion 연산의 분배 법칙

$$A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C) \text{ 이고,} \quad (10)$$

$$(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C) \text{ 이다.}$$

2.4 퍼지 dilation

Sinha와 Dougherty[8]에서는 퍼지 dilation 연산을 다음과 같이 정의하였다.

$$A \oplus B = \{(x, \mu_{A \oplus B}(x)) \mid x \in E^N\} \quad (11)$$

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \sup_{z \in E^N} \max[0, \mu_A(z) + \mu_{B(x)}(z) - 1]$$

식 (11)에 따르면 임의의 화소 x 는 퍼지 dilation 연산 수행 후 식 (12)를 만족하는 값을 가지게 된다.

$$\max[0, \alpha + \beta - 1] \leq \mu_{A \oplus B}(x) \quad (12)$$

여기서

$$\alpha = \sup_{z \in E^N} \mu_B(z)$$

$$\beta = \inf_{z \in E^N} \mu_A(z)$$

식 (12)에 따르면 퍼지 영상에서 0보다 큰 퍼지 값을 가지는 화소 x 는 퍼지 dilation 연산을 적용한 후 0의 퍼지 값을 가질 수 있다. 따라서, [8]에서 제안한 퍼지 dilation 연산은 이차원 형태 정보의 기하학적 확장 변환을 보장하지 못한다.

본 논문에서는 퍼지 dilation 연산을 다음과 같이

정의한다.

$$A \oplus B = \{(x, \mu_{A \oplus B}(x)) \mid x \in E^N\} \quad (13)$$

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \sup_{z \in E^N} \{\mu_A(z) \times \mu_{(-B; x)}(z)\}$$

식 (13)의 의미는 퍼지 dilation 연산 후 퍼지 영상의 화소 x 에서의 퍼지값은 퍼지 구성 요소를 원점에 대해 대칭 변환한 다음 벡터 x 만큼 이동시켜 $(-B; x)$ 를 구한 후 모든 화소들에 대해 퍼지 구성 요소의 화소와 퍼지 영상의 화소를 곱한 값들 중 가장 큰 값을 가진다는 것이다.

제안된 퍼지 dilation 연산은 의미적으로 퍼지 영상을 퍼지 구성 요소의 퍼지 영상의 각 화소의 값만큼 곱하고 그 중 가장 큰 값을 취해 퍼지 영상을 기하학적으로 확장시킨다. 이렇게 함으로서 0보다 큰 퍼지값을 가지는 임의의 화소가 퍼지 dilation 연산 수행 후 0이 되는 것을 방지하여 이차원 형태 정보의 기하학적 확장변환을 보장하게 된다.

제안된 퍼지 dilation 연산은 교환 법칙(commutative law), 증가 특성, 이동 불변성, 분배 법칙을 만족한다.

특성 4. 퍼지 dilation 연산의 교환 법칙

$$A \oplus B = B \oplus A \quad (14)$$

특성 5. 퍼지 dilation 연산의 증가 특성

만약 $A \subseteq B$ 이면, $A \oplus C \subseteq B \oplus C$ 이다. (15)

특성 6. 퍼지 dilation 연산의 이동 불변성

벡터 $\gamma \in E^N$ 에 대해, $(A; \gamma) \oplus B = ((A \oplus B); \gamma)$ 이다. (16)

특성 7. 퍼지 dilation 연산의 분배 법칙

$$A \oplus (B \cup C) = (B \cup C) \oplus A = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \text{이다.} \quad (17)$$

2.5 퍼지 opening과 퍼지 closing

수학적 형태학에서 opening 연산과 closing 연산은 erosion 연산과 dilation 연산을 반복 적용하여 정의한다. 수학적 형태학에서 opening 연산은 영상에서 구성 요소에 적합하지 않은 부분들을 제거하는 연산이고, closing 연산은 영상에서 구성 요소에 적합하지 않은 부분들을 구성 요소의 형태 정보를 이용하여 채우는 연산이다[1-5].

수학적 형태학에서의 opening 연산은 식 (18)과 같이 정의되며, closing 연산은 식 (19)과 같이 정의된다[1].

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (18)$$

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B \quad (19)$$

본 논문에서도 제안한 퍼지 수학적 형태학의 퍼지 opening 연산과 퍼지 closing 연산도 수학적 형태학에 서와 같이 식 (18),(19)와 같이 정의하여 [13]에서도 같이 정의하였다.

제안된 퍼지 opening 연산과 퍼지 closing 연산은 증가 특성과 이동 불변성을 만족한다. 이들에 대한 증명은 부록에 있다.

특성 8. 퍼지 opening 연산의 증가 특성

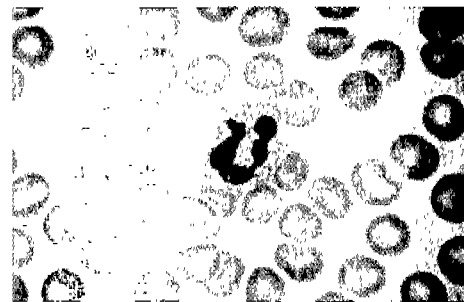
만약 $A \subseteq B$ 이면, $A \circ C \subseteq B \circ C$ 이다. (20)

특성 9. 퍼지 closing 연산의 증가 특성

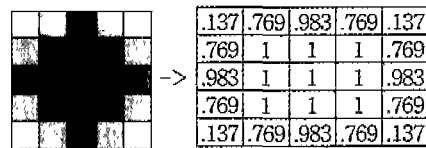
만약 $A \subseteq B$ 이면, $A \bullet C \subseteq B \bullet C$ 이다. (21)

특성 10. 퍼지 opening 연산의 이동 불변성

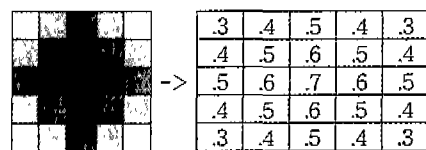
벡터 $\gamma \in E^N$ 에 대해, $(A; \gamma) \circ B = ((A \circ B); \gamma)$ 이다. (22)



(a) 퍼지 영상 A (Fuzzy image A)



(b) 퍼지 구성 요소 B (Fuzzy structuring element B)



(c) 퍼지 구성 요소 C (Fuzzy structuring element C)

그림 2. 퍼지 형태학적 연산에 사용한 퍼지 영상과 퍼지 구성 요소들(Fuzzy image and fuzzy structuring elements)

특성 11. 퍼지 closing 연산의 이동 불변성
 벡터 $\gamma \in E^N$ 에 대해, $(A; \gamma) \circ B = ((A \circ B); \gamma)$ 이다. (23)

3. 실험 결과 및 고찰

그림 2는 [8]과의 비교실험에 사용된 원 영상 및 퍼지 구성 요소들이다. 원 영상은 식 (1)을 사용하여 퍼지 영상으로 변환하였고 결과는 (1)의 역변환을 사용하여 다시 그레이 스케일 영상으로 변환하였다. 그림 3은 erosion 및 dilation 결과를 비교한 것인데 각 연산에서 윗첨자 S는 [8]의 방법을, 윗첨자 Y는 본 논문에서 정의된 방법을 나타낸다. 그림 3의 (a), (b)와 (e), (f)에서 보듯이 퍼지 구성요소의 화소들 중 1의 퍼지값을 가지는 화소가 있는 그림 2(b)를 사용하였을 때, [8]과 본 논문의 결과는 비슷하다. 그러나, 퍼지 구성 요소의 화소들 중 1의 퍼지값을 가지는 화소가 없는 그림 2(c)를 사용한 경우 그림 3(g)에서 보듯이 [8]에서 제안한 퍼지 erosion 연산은 전체적으로

로 더 검어져(확장됨) 이차원 형태 정보의 기하학적 수축 변환을 보장하지 못함을 알 수 있다.

퍼지 dilation의 경우 그림 3의 (c), (d)에서 볼 수 있듯이 최대 퍼지값이 1보다 작은 구성요소 C를 사용하였을 때 [8]의 방법은 개체의 크기를 오히려 줄이기도 하고 전체적으로 희게 만들어 확장변환의 의미에 맞지 않는 반면 제안된 방법은 그 변환이 보장되어 있다.

그림 4는 퍼지 opening 및 closing 연산의 결과를 비교한 것이다. 이들 연산은 erosion과 dilation 연산을 기본으로 하여 조합한 것이므로 기본되는 연산의 영향을 받지 않을 수 없다. 따라서 그림 4(g)에서 보듯이 [8]은 결함이 있다고 할 수 있다.

그림 5는 세포영상에 본 논문에서 정의한 연산들을 적용한 결과이다. 5(a)는 원 영상이며 5(b)는 사용된 퍼지 구성 요소이다. 본 논문에서는 검은 부분이 물체라고 생각하므로 erosion의 결과인 5(c)에서는 검은 부분이 줄어들었으며 dilation의 결과인 5(d)에서는 늘어났다. 또한 opening의 경우 5(e)에서 보듯이 가는

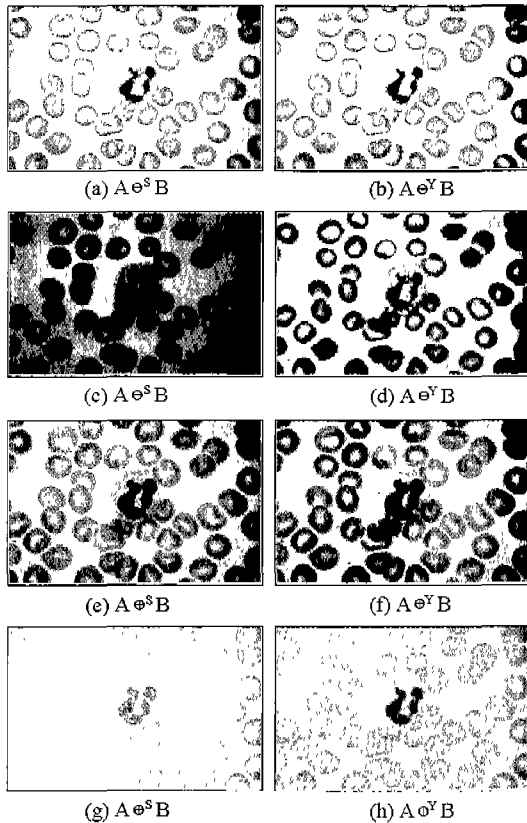


그림 3. 퍼지 erosion 및 dilation의 비교 (Results of fuzzy erosion and fuzzy dilation)

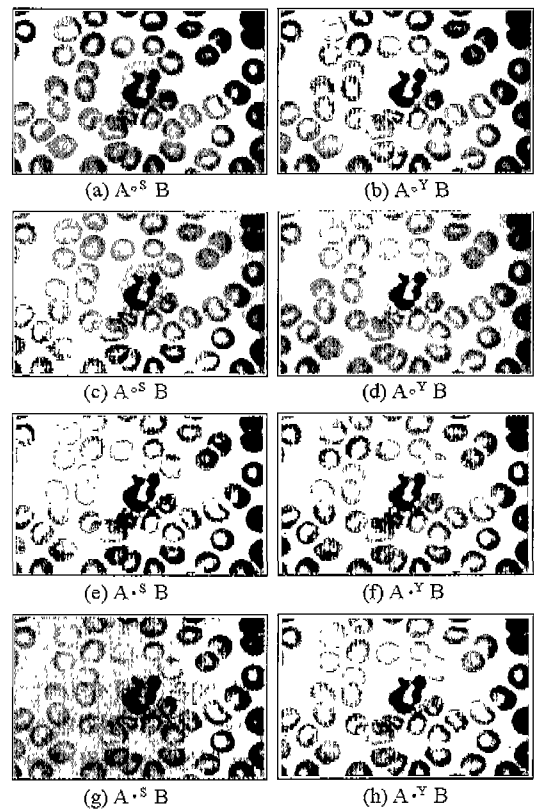


그림 4. 퍼지 opening 및 closing 의 비교 (Results of fuzzy opening and fuzzy closing)

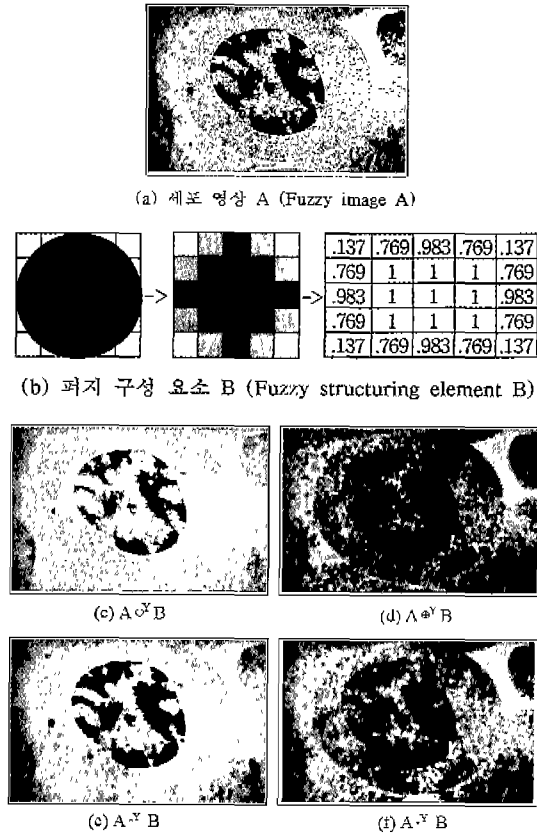


그림 5. 세포 영상에 대한 실험 결과 (Results of morphological operations)

가지들이 많이 없어졌으며 closing의 경우 5(f)에서 보듯이 작은 구멍들이 많이 메워졌다. 이들 결과는 본 논문에서 제안된 방법이 올바른 형태 변환을 수행할 수 있음을 보여준다.

4. 결론 및 향후 과제

본 논문에서는 여러 값을 가지는 실세계의 이차원 형태 정보를 표현하고 형태 변환을 통해 유용한 형태 정보를 획득하기 위해 수학적 형태학에 퍼지 집합 이론을 도입하여 퍼지 수학적 형태학을 제안하였다.

퍼지 수학적 형태학에 대한 [8]은 실세계의 이차원 형태 정보를 표현할 수 있다는 장점은 있지만, 퍼지 형태학적 연산인 퍼지 erosion 연산이 이차원 형태 정보의 기하학적 수축 변환을 보장하지 못하고 퍼지 dilation 연산이 이차원 형태 정보의 기하학적 확장 변환을 보장하지 못한다는 단점이 있다.

본 논문에서 제안한 퍼지 erosion 연산의 이차원 형태 정보의 기하학적 수축 변환을 보장하고 퍼지 dilation 연산은 이차원 형태 정보의 기하학적 확장 변환을 보장한다. 퍼지 erosion 연산과 퍼지 dilation 연산이 퍼지 수학적 형태학의 다른 형태학적 연산들의 기본이 되므로 이들 연산에 기초한 opening 및 closing 연산도 신뢰성이 더 높다고 할 수 있다. 또한, 제안된 퍼지 수학적 형태학의 형태학적 연산들의 여러 특성들을 고찰하여 퍼지 수학적 형태학을 체계화하고 응용 분야에서의 편리성을 지원하였다. 본 논문에서 제안한 퍼지 수학적 형태학은 형태에 기반한 영상 처리 분야와 물체 인식 분야에서 유용하게 사용할 수 있으며 그래프 이론과 퍼지 집합 포함 연산자로서도 사용할 수 있다.

본 논문에서는 퍼지 수학적 형태학의 형태학적 연산에 많은 비중을 두었다. 앞으로는 적응적인 퍼지 영상에 대한 연구가 함께 진행되어야 하며, 본 논문에서 제안한 퍼지 형태학적 연산들을 이용한 다른 형태학적 연산들에 관한 연구도 필요하다. 또한, 본 논문에서 고찰한 퍼지 형태학적 연산들의 특성들 이외의 다른 특성들에 관한 고찰도 병행되어야 한다.

부 록

특성 1. 퍼지 erosion 연산의 증가 특성

만약 $A \subseteq B$ 이면, $A \ominus C \subseteq B \ominus C$ 이다.

<증명>

$A \subseteq B$

$$\Rightarrow \mu_A(z) \leq \mu_B(z)$$

$$\Rightarrow \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{(C;x)}(z)) \leq \text{MRF}(\mu_B(z), \mu_{(C;x)}(z))$$

$$\Rightarrow \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{(C;x)}(z))] \leq \min[1, \text{MRF}(\mu_B(z), \mu_{(C;x)}(z))]$$

$$\Rightarrow \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{(C;x)}(z))] \leq \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_B(z), \mu_{(C;x)}(z))]$$

$$\Rightarrow \mu_{A \ominus C}(x) \leq \mu_{B \ominus C}(x)$$

$$\Rightarrow \mu_{A \ominus C}(x) \leq \mu_{B \ominus C}(x)$$

특성 2. 퍼지 erosion 연산의 이동 불변성

벡터 $\tau \in E^N$ 에 대해 $(A; \tau) \ominus B = ((A \ominus B); \tau)$ 이다.

<증명>

$$\mu_{(A \ominus B); \tau}(x)$$

$$= \mu_{A \ominus B}(x - \tau)$$

$$= \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{(B;x-\tau)}(z))] = \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{(B;x)}(z + \tau))]$$

$$= \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{(B;x)}(z + \tau))] = \inf_{u \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(u - \tau), \mu_{(B;x)}(u))]$$

$$= \inf_{u \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_{(A;\tau)}(u), \mu_{(B;x)}(u))] = \mu_{(A;\tau) \ominus B}(x)$$

$$= \mu_{(A;\tau) \ominus B}(x)$$

$$= \mu_{(A;\tau) \ominus B}(x)$$

특성 3. 퍼지 erosion 연산의 분배 법칙
 $A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$ 이고,
 $(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$ 이다.

<증명>

$$\begin{aligned} & \mu_{A \ominus (B \cup C)}(x) \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{(B \cup C)}(z))] \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \max[\mu_{B \cup C}(z), \mu_{C \cup B}(z)])] \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[1, \min[\text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{B \cup C}(z)), \\ & \quad \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{C \cup B}(z))] \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[\min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{B \cup C}(z))], \\ & \quad \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{C \cup B}(z))] \\ &= \min[\inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{B \cup C}(z))], \\ & \quad \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{C \cup B}(z))] \\ &= \min[\mu_{A \ominus B}(x), \mu_{A \ominus C}(x)] \\ &= \mu_{(A \ominus B) \cap (A \ominus C)}(x) \end{aligned}$$

또한

$$\begin{aligned} & \mu_{(A \cap B) \ominus C}(x) \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_{A \cap B}(z), \mu_{C \cup B}(z))], \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\min[\mu_A(z), \mu_B(z)], \mu_{C \cup B}(z))] \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[1, \min[\text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{C \cup B}(z)), \\ & \quad \text{MRF}(\mu_B(z), \mu_{C \cup B}(z))] \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[\min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{C \cup B}(z))], \\ & \quad \min[1, \text{MRF}(\mu_B(z), \mu_{C \cup B}(z))] \\ &= \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_A(z), \mu_{C \cup B}(z))], \\ & \quad \inf_{z \in E^N} \min[1, \text{MRF}(\mu_B(z), \mu_{C \cup B}(z))] \\ &= \min[\mu_{A \ominus C}(x), \mu_{B \ominus C}(x)] \\ &= \mu_{(A \ominus C) \cap (B \ominus C)}(x) \end{aligned}$$

특성 4. 퍼지 dilation 연산의 교환 법칙
 $A \oplus B = B \oplus A$

<증명>

$$\begin{aligned} & \mu_{B \oplus A}(x) \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_B(z) \times \mu_{(-A)}(z)\} \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_B(z) \times \mu_A(-z)\} \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_B(z) \times \mu_A(-z+x)\} \\ &= \sup_{u \in U} \{\mu_B(-u+x) \times \mu_A(u)\} \\ &= \sup_{u \in U} \{\mu_B(u-x) \times \mu_A(u)\} \\ &= \sup_{u \in U} \{\mu_{(-B)}(u) \times \mu_A(u)\} \\ &= \sup_{u \in U} \{\mu_A(u) \times \mu_{(-B)}(u)\} \\ &= \mu_{A \oplus B}(x) \end{aligned}$$

특성 5. 퍼지 dilation 연산의 증가 특성
 만약 $A \subseteq B$ 이면, $A \oplus C \subseteq B \oplus C$ 이다.

<증명>

$$A \subseteq B$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \mu_A(z) \leq \mu_B(z) \\ & \Rightarrow \mu_A(z) \times \mu_{(-C)}(z) \leq \mu_B(z) \times \mu_{(-C)}(z) \\ & \Rightarrow \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{(-C)}(z)\} \leq \sup_{z \in U} \{\mu_B(z) \times \mu_{(-C)}(z)\} \\ & \Rightarrow \mu_{A \oplus C}(x) \leq \mu_{B \oplus C}(x) \\ & \Rightarrow A \oplus C \subseteq B \oplus C \end{aligned}$$

특성 6. 퍼지 dilation 연산의 이동 불변성
 벡터 $\gamma \in E^N$ 에 대해, $(A; \gamma) \oplus B = ((A \oplus B); \gamma)$ 이다.

<증명>

$$\begin{aligned} & \mu_{((A \oplus B); \gamma)}(x) \\ &= \mu_{A \oplus B}(x - \gamma) \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{(-B; \gamma - \gamma)}(z)\} \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{(-B; \gamma)}(z + \gamma)\} \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{(-B)}(u)\} \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_{(A; \gamma)}(u) \times \mu_{(-B; \gamma)}(u)\} \\ &= \mu_{(A; \gamma) \oplus B}(x) \end{aligned}$$

특성 7. 퍼지 dilation 연산의 분배 법칙
 $A \oplus (B \cup C) = (B \cup C) \oplus A = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$ 이다.

<증명>

$$\begin{aligned} & \mu_{A \oplus (B \cup C)}(x) \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{(-B \cup C)}(z)\} \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{(B \cup C)}(z - x)\} \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{B \cup C}(-z + x)\} \\ &= \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \max[\mu_{B(-z+x)}, \mu_{C(-z+x)}]\} \\ &= \sup_{z \in U} \max \{\mu_A(z) \times \mu_{B(-z+x)}, \mu_A(z) \times \mu_{C(-z+x)}\} \\ &= \max[\sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{B(-z+x)}\}, \\ & \quad \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{C(-z+x)}\}] \\ &= \max[\sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{(-B)}(z)\}, \\ & \quad \sup_{z \in U} \{\mu_A(z) \times \mu_{(-C)}(z)\}] \\ &= \max[\mu_{A \oplus B}(x), \mu_{A \oplus C}(x)] \\ &= \mu_{(A \oplus B) \cup (A \oplus C)}(x) \end{aligned}$$

특성 8. 퍼지 opening 연산의 증가 특성
 만약 $A \subseteq B$ 이면, $A \circ C \subseteq B \circ C$ 이다.

<증명>

$$\begin{aligned} & A \subseteq B \\ & \Rightarrow A \ominus C \subseteq B \ominus C \\ & \Rightarrow (A \ominus C) \oplus C \subseteq (B \ominus C) \oplus C \\ & \Rightarrow A \circ C \subseteq B \circ C \end{aligned}$$

특성 9. 퍼지 closing 연산의 증가 특성
 만약 $A \subseteq B$ 이면, $A \cdot C \subseteq B \cdot C$ 이다.

<증명>

$$\begin{aligned} & A \subseteq B \\ & \Rightarrow A \oplus C \subseteq B \oplus C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A \oplus C) \ominus C \subseteq (B \oplus C) \ominus C$$

$$\Rightarrow A \cdot C \subseteq B \cdot C$$

특성 10. 퍼지 opening 연산의 이동 불변성
 벡터 $\gamma \in E^N$ 에 대해, $(A; \gamma) \circ B = ((A \circ B); \gamma)$ 이다.

<증명>

$$(A; \gamma) \circ B$$

$$= ((A; \gamma) \ominus B) \oplus B$$

$$= ((A \ominus B); \gamma) \oplus B$$

$$= (((A \ominus B) \oplus B); \gamma)$$

$$= ((A \circ B); \gamma)$$

특성 11. 퍼지 closing 연산의 이동 불변성
 벡터 $\gamma \in E^N$ 에 대해, $(A; \gamma) \cdot B = ((A \cdot B); \gamma)$ 이다.

<증명>

$$(A; \gamma) \cdot B$$

$$= ((A; \gamma) \oplus B) \ominus B$$

$$= ((A \oplus B); \gamma) \ominus B$$

$$= (((A \oplus B) \ominus B); \gamma)$$

$$= ((A \cdot B); \gamma)$$

참고문헌

[1] R. T. Haralick, S. R. Sternberg and X. Zhuang, "Image Analysis Using Mathematical Morphology," IEEE Trans. PAMI, Vol. 9, No. 4, pp. 532-550, Jul. 1987

[2] R. T. Haralick, and L. G. Shapiro, Computer and Robot Vision, Vol. 1, Addison Wesley, 1992.

[3] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, Digital Image Processing, Addison Wesley, 1982.

[4] I. Pitas and A. N. Venetsanopoulos, "Morphological Shape Decomposition," IEEE Trans. PAMI, Vol. 12, No. 1, pp. 38-45, Jan. 1990.

[5] J. Xu, "Decomposition of Convex Polygonal Morphological Structuring Elements into Neighborhood Subsets," IEEE Trans. PAMI, Vol. 13, No. 2, pp. 153-162, Feb. 1991.

[6] H. J. A. M. Heijmans, "Discretization of Morphological Operators," JVCIR, Vol. 3, No. 2, pp. 182-193, 1992.

[7] D. Sinha and E. R. Dougherty, "Fuzzification of set inclusion: Theory and applications", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 55, No. 1, pp. 15-42, Apr. 1993.

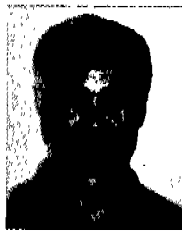
[8] D. Sinha and E. R. Dougherty, "Fuzzy Mathematical Morphology", JVCIR, Vol. 3, No. 3, pp. 286-302, Sep. 1992.

[9] 윤창락, 김황수, 이성기, "퍼지 수학적 형태학의 연구", 정보과학회 학술 발표 논문집(A) 1995.10.27 pp. 351-354



윤 창 락 (Chang-Rak Yoon)

1996년 : 경북대학교 자연과학대학 컴퓨터과학과 졸업(석사)
 1995년~현재 : 한국전자통신연구원 칼라 이미지연구팀
 관심분야 : 영상처리, 칼라이미징



김 황 수 (Hwang-Soo Kim)

1975년 : 서울대학교 공과대학 전기공학 과 졸업
 1988년 : 미국 미시건대학 졸업(Ph.D)
 1989년~현재 : 경북대학교 자연과학대학 컴퓨터과학과 교수
 관심분야 : 영상처리, 컴퓨터비전, 퍼지 및 뉴로컴퓨팅