

견실성을 고려한 고유구조 지정기법 및 EMRAAT 미사일 제어에의 응용

A Robust Eigenstructure Assignment Method with Application to EMRAAT Missile Control Design

김 주 호, 최 재 원
(Joo Ho Kim and Jae Weon Choi)

Abstract : In this paper, we introduce a relationship between the sensitivity and the robustness of a system, and we propose a robust eigenstructure assignment scheme using a novel performance index which can consider the performance and the robustness of the system simultaneously. We also propose an assignment accuracy measure and a robustness measure which are used for the performance examination of the proposed robust eigenstructure assignment scheme. The usefulness of the proposed algorithm and the measures are verified by applying to controller design of a simple numerical example and the EMRAAT missile.

Keywords : sensitivity, robustness, robust eigenstructure assignment, assignment accuracy measure, robustness measure

I. 서론

제어기를 설계하는 많은 방법들 가운데 LQR이나 극점 배치법(pole placement)과 같은 제어기법들은 고유구조(eigenstructure)의 관점에서 보면 단지 고유치(eigenvalues)의 위치만 조절이 가능하기 때문에, 시스템의 응답 속도와 감쇠율(damping ratio) 등 고유치와 관련된 물리량만 조절이 가능하였다. 반면, 고유구조 지정법(eigenstructure assignment)[1]-[4]은 시스템의 고유치와 고유벡터의 전부 혹은 일부를 동시에 지정할 수 있기 때문에 고유치에 의해서 지배되는 시스템의 응답 속도와 감쇠율 뿐만 아니라 고유벡터에 의해 영향을 받는 응답 형태까지도 고려할 수 있는 제어기법이다. 그러나, 이러한 고유구조 지정법은 제어기 설계 과정에서 견실성(robustness)을 직접 반영할 수 없는 구조이기 때문에 지금까지 큰 단점으로 인식되어 왔다. 실제로 초음속 항공기나 미사일 등의 비행제어시스템은 급격한 가속도 및 속도의 증감, 이에 따른 급격한 연료 소비뿐만 아니라 갑작이 일어나는 돌풍 등의 영향으로 인하여 시스템의 각 파라미터에 변화가 생기기도 한다. 이런 경우에 견실성을 전혀 고려하지 않은 일반적인 고유구조 지정법으로 제어기를 설계한다면 만족할 만한 성능을 기대하기 어렵다. 이러한 고유구조 지정법의 견실성 문제를 해결하기 위하여 고유치의 민감도(sensitivity)를 줄이는 방법[5], H_∞ 와 결합하는 방법[6], LQR과 결합하는 방법[7] 등 몇 가지 연구결과가 보고되었다.

본 논문에서는 고유구조 지정법의 견실성을 확보하기 위하여 시스템의 견실성과 민감도와의 관계를 이용하여 시스템의 민감도를 줄이는 방법으로 시스템의 견실성을 확보하는 방법을 제안한다. 본 논문에서 제안하는 방법은

정확한 고유벡터 지정 문제와 시스템의 견실성 확보 문제를 동시에 고려할 수 있는 새로운 성능지수(performance index)를 정의하여 사용함으로써, 설계자가 원하는 제어목적에 따라서 각각의 가중치를 조절하여 제어기를 설계할 수 있는 새로운 견실 고유구조 지정법으로 볼 수 있다. 또한, 본 논문에서는 페루프 시스템의 지정된 고유벡터의 정확성과 시스템의 견실성을 쉽게 확인할 수 있는 방법으로 고유벡터의 지정정확성 척도(assignment accuracy measure)와 견실성 척도(robustness measure)를 새로이 제안한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 I 장 서론에 이어 II 장에서는 본 논문에서 제안하는 견실 고유구조 지정법의 이론적 기초가 되는 민감도와 견실성의 관계를 기술하고, III 장에서는 본 논문에서 제안하는 새로운 견실 고유구조 지정법에 대하여 기술한다. 그리고, IV 장에서는 페루프 시스템의 지정된 고유벡터의 정확성과 확보된 견실성을 쉽게 확인할 수 있는 각각의 척도에 대하여 서술한다. V 장에서는 수치 예제와 EMRAAT(Extended Medium Range Air-to-Air Technology) 미사일(missile) 시스템의 비행제어 예제[8][9]를 통하여 본 논문에서 제안하는 견실 고유구조 지정법과 제안한 각각의 척도의 유용성을 검증한다. 마지막으로, VI 장에서 본 논문의 결론을 맺는다.

II. 민감도와 견실성

본 장에서는 본 논문에서 제안하는 견실 고유구조 지정법의 이론적 기초가 되는 시스템의 민감도와 견실성의 상호관계에 대하여 기술한다.

다음과 같은 형태를 가지는 섭동된 선형 시불변 시스템(perturbed linear time-invariant system)을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = (A + E)x(t) \quad (1)$$

여기서, $A \in R^{n \times n}$ 는 시스템 행렬이고, $E \in R^{n \times n}$ 는 섭동

행렬이다.

이러한 시스템에 대하여 일반적으로 다음의 정리 2.1이 성립한다.

정리 1[10] : 시스템 행렬 A 는 상이한 공액복소수 (complex conjugate)로 이루어져 있고, 또한 A 의 고유벡터들은 각각 n 차원을 가지며, 서로 일차독립(linearly independent)이라고 하자. 그리고 고유치로 이루어진 대각 행렬과 우-모드 행렬을 각각 다음과 같이 표기하자.

$$A = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

$$V = [v_1, \dots, v_n]$$

그리고, 섭동된 시스템 $(A+E)$ 의 i -번째 고유치와 고유벡터를 각각 μ_i 와 v_i ($\|v_i\| = 1$)라고 가정하자. 그러면, 다음의 관계를 만족하는 A 의 고유치가 적어도 하나는 존재한다.

$$|\lambda_i - \mu_i| \leq \|E\| \|V\| \|V^{-1}\| \quad (2)$$

(2)에서 $\|E\| \|V\| \|V^{-1}\|$ 의 값이 일정하다고 가정하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\|E\| \|V\| \|V^{-1}\| \equiv \beta$$

$$\|E\| = \frac{\beta}{\|V\| \|V^{-1}\|} \quad (3)$$

여기서, β 는 임의의 양수이다.

(3)에서 β 가 일정하다고 가정하면 $\|V\| \|V^{-1}\|$ 의 값이 작을수록 $\|E\|$ 의 값은 커진다. E 가 시스템 행렬의 섭동항이라는 점을 고려하면, $\|V\| \|V^{-1}\|$ 는 시스템의 견실성과 밀접한 관계가 있는 요소로서 동일한 시스템에 대하여 $\|E\|$ 의 크기가 클수록 시스템의 견실성이 커진다는 것을 알 수 있다. 반대로, 허용할 수 있는 시스템 행렬의 섭동항의 크기 즉, $\|E\|$ 의 크기가 일정하다고 가정하면 $\|V\| \|V^{-1}\|$ 의 값이 작을수록 공칭 시스템의 고유치와 섭동된 시스템의 고유치의 차이(β)가 작아진다. 다시 말하면, $\|V\| \|V^{-1}\|$ 의 값이 작을수록 고유치의 민감도가 작아지기 때문에 모델링 오차나 외란 등으로 인한 섭동항의 영향이 줄어들어 시스템의 견실성이 향상된다. 여기서, $\|\cdot\|$ 를 행렬의 최대 특이값(maximum singular value)으로 정의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon \equiv \|V\| \|V^{-1}\| = \frac{\sigma_{\max}(V)}{\sigma_{\min}(V)} \quad (4)$$

즉, ϵ 은 우-모드 행렬 V 의 조건수(condition number)로 표시됨을 알 수 있다.

정리 1에서 언급된 바와 같이 조건수가 작을수록 시스템의 민감도가 줄어들어 견실성이 향상되기 때문에 (4)의 조건수는 IV장에서 기술할 견실성 척도로서 사용될 수 있다.

일반적으로 V 가 일원행렬(unitary matrix)이면 (4)의 조건수는 1로서 최소가 된다.

III. 견실성을 고려한 고유구조 지정법

1. 고유구조 지정법

일반적인 우-고유구조(고유치 및 우-고유벡터) 지정법에 대하여 간단히 기술하면 다음과 같다. 우선, 다음의 (5)와 같은 선형 다변수 시불변 가제어 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx \quad (5)$$

여기서, $A \in R^{n \times n}$ 는 시스템 행렬이고, $B \in R^{n \times m}$ 는 입력 행렬이며, $K \in R^{m \times n}$ 는 피드백 이득행렬(feedback gain)이다.

(5)에 대하여 Moore[11]의 결과를 이용하여 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$S_{\lambda_i} \equiv [\lambda_i I - A : B]$$

$$R_{\lambda_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ \dots \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서, 행렬 R_{λ_i} 의 부분행렬 N_{λ_i} 와 M_{λ_i} 은 각각 행렬 S_{λ_i} 의 부분행렬 $(\lambda_i I - A)$ 와 B 의 영공간(nullspace)의 기저(basis)를 이룬다. 그리고, $\text{rank } B = m$ 이면 행렬 R_{λ_i} 의 부분행렬 N_{λ_i} 의 열들은 서로 일차독립이 된다.

따라서, 고유벡터는 다음과 같이 행렬 R_{λ_i} 의 부분행렬 N_{λ_i} 에 의해서 생성되는 열공간(column space)에 속해야 한다는 제약이 있음을 알 수 있다. 즉, 지정 가능한 고유벡터는 다음과 같다.

$$v_i^d = N_{\lambda_i} z_i \quad (7)$$

여기서, z_i 는 N_{λ_i} 의 열들을 선형 조합하여 획득 가능한 고유벡터 v_i^d 를 결정하는 선형조합 계수로 다음의 성능지수를 최소화하는 값이다.

$$J = (v_i^d - v_i^a)^T P_i (v_i^d - v_i^a)$$

$$= (v_i^d - N_{\lambda_i} z_i)^T P_i (v_i^d - N_{\lambda_i} z_i) \quad (8)$$

여기서, v_i^d 는 원하는 고유벡터(desired eigenvector)이고, $P_i \in R^{n \times n}$ 는 가중 행렬(weighting matrix)로서 고유벡터 각 요소들에 대한 가중치를 나타내는 양의 한정(positive definite) 행렬이다.

(8)의 성능지수를 최소화하는 z_i 를 구하기 위하여 J 를 z_i 에 대하여 미분하여 0이 되는 값을 구하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\frac{dJ}{dz_i} = 2 N_{\lambda_i}^T P_i (N_{\lambda_i} z_i - v_i^d) = 0 \quad (9)$$

$$z_i = (N_{\lambda_i}^T P_i N_{\lambda_i})^{-1} N_{\lambda_i}^T P_i v_i^d \quad (10)$$

(10)의 결과를 이용하면, 적어도 최소자승의 관점(least square sense)에서 원하는 고유벡터 v_i^d 에 가장 가까운 페루프 시스템의 고유벡터를 얻을 수 있다. 그리고, λ_i 가 실수인 경우에 원하는 고유치와 고유벡터를 가지도록 해주는 되먹임 이득(feedback gain) K 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = [M_{\lambda_1 z_1} \ M_{\lambda_2 z_2} \ \dots \ M_{\lambda_n z_n}] [v_1^a \ v_2^a \ \dots \ v_n^a]^{-1} \quad (11)$$

λ_i 가 공액복소수인 경우에 대해서도 간단한 변환행렬을 이용하여 되먹임 이득행렬 K 를 쉽게 구할 수 있다[10].

2. 건실성을 고려한 고유구조 지정법

(8)에서 원하는 페루프 시스템의 고유벡터를 시스템 각 상태들의 불연성화(decoupling)나 외란 억제와 같은 목적을 달성하도록 설정하면 시스템의 건실성을 고려할 수 없고, II장에서 소개한 것과 같이 (4)의 조건수가 작아지도록 원하는 페루프 시스템의 고유벡터를 설정하면 시스템의 건실성은 향상시킬 수 있지만, 각 상태들의 불연성화나 외란 억제와 같은 제어목적은 달성할 수가 없다. 따라서, 본 논문에서는 시스템의 성능과 건실성을 동시에 고려할 수 있도록 하는 다음과 같은 새로운 성능지수를 제안한다.

$$\begin{aligned} J_{new} &= \alpha_1 (v_i^d - v_i^a)^T P_i (v_i^d - v_i^a) \\ &\quad + \alpha_2 (u_i - v_i^a)^T Q_i (u_i - v_i^a) \\ &= \alpha_1 (v_i^d - N_{\lambda_i} z_i)^T P_i (v_i^d - N_{\lambda_i} z_i) \\ &\quad + \alpha_2 (u_i - N_{\lambda_i} z_i)^T Q_i (u_i - N_{\lambda_i} z_i) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, α_1 과 α_2 는 각각의 항들에 대한 가중치로서 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 이다. 그리고, u_i 는 (4)의 조건수가 1이 되는 일원행렬의 i 번째 열이며, Q_i 는 P_i 와 마찬가지로 n 차원의 가중 행렬로서 고유벡터 각 요소들에 대한 가중치를 나타내는 양의 한정 행렬이다.

(12)에서 우변의 첫 번째 항은 각 상태들의 불연성화나 외란 억제와 같은 시스템의 성능과 관련하여 고유벡터를 결정하는 부분이고, 두 번째 항은 시스템의 고유벡터를 일원행렬로 지정함으로써 시스템의 건실성을 확보하기 위해 도입된 부분이다. 두 제어 목적은 서로 상충되므로 제어기 설계자는 제어 목적 및 대상 시스템에 따라서 α_1 과 α_2 의 값을 조절하여 시스템의 성능과 건실성을 동시에 고려하여 제어기를 설계할 수 있다.

앞에서와 마찬가지로 (12)의 성능지수를 최소화하는 z_i 를 구하기 위하여 J_{new} 를 z_i 에 대하여 미분하여 0이 되는 값을 구하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{new}}{dz_i} &= 2\alpha_1 N_{\lambda_i}^T P_i (N_{\lambda_i} z_i - v_i^d) \\ &\quad + 2\alpha_2 N_{\lambda_i}^T Q_i (N_{\lambda_i} z_i - u_i) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$z_i = (\alpha_1 N_{\lambda_i}^T P_i N_{\lambda_i} + \alpha_2 N_{\lambda_i}^T Q_i N_{\lambda_i})^{-1} \cdot (\alpha_1 N_{\lambda_i}^T P_i v_i^d + \alpha_2 N_{\lambda_i}^T Q_i u_i) \quad (14)$$

(14)의 결과를 이용하면 (11)과 동일한 형태의 되먹임 이득을 구할 수 있다.

IV. 고유벡터의 지정정확성 척도 및 건실성 척도

실제로 시스템의 차수와 독립된 제어기의 수가 같으면 페루프 시스템의 모든 고유치와 고유벡터를 설계자가 원하는 대로 지정할 수가 있기 때문에, III장에서 제안한 고유구조 지정법을 사용하여 (12)의 가중치 α_1 의 값을 높이면 페루프 시스템의 고유벡터의 지정정확성이 높아지고, α_2 의 값을 높이면 시스템의 건실성이 향상된다. 그러나, 대부분의 시스템은 시스템의 차수보다 제어입력의 차수(독립된 제어기의 수)가 작기 때문에 고유구조 지정법을 사용하더라도 페루프 시스템의 고유치와 고유벡터를 전부 원하는 값으로 정확하게 지정하는 것은 어렵다. 일반적으로 페루프 시스템의 고유치를 정확하게 지정하고, 여분의 자유도를 이용하여 (13)과 (14)에서 나타낸 것과 같이 최소자승의 관점에서 페루프 시스템의 고유벡터와 원하는 고유벡터 사이의 오차가 최소가 되도록 페루프 시스템의 고유벡터를 결정하게 된다. 그러므로, α_1 의 가중에 의한 고유벡터의 지정정확성의 증가분 만큼 선형적으로 시스템의 건실성 감소를 유발시키지는 않는다. 따라서, 이 경우에 제어기 설계자는 각각의 가중치 α_1 과 α_2 를 바꾸어 가면서 시뮬레이션을 수행하고, 제어기 설계 목적에 맞는 적절한 가중치를 선택해야 한다. 그러나, 시뮬레이션 결과만으로는 고유벡터의 지정정확성이나 확보된 시스템의 건실성의 정도를 정확하게 파악하기는 어렵다. 그러므로, 가중치의 변화에 따라서 고유벡터의 지정정확성이나 확보된 건실성이 어떻게 변하는지 쉽게 확인할 수 있는 척도가 필요하다.

따라서, 본 장에서는 III장에서 제안한 건실 고유구조 지정법을 사용할 때, 가중치 α_1 과 α_2 에 따른 고유벡터의 지정정확성과 시스템의 건실성을 쉽게 확인할 수 있는 척도를 제안한다.

1. 고유벡터의 지정정확성 척도

실제 시뮬레이션 결과를 보고 지정된 고유벡터가 원하는 고유벡터에 얼마나 근접했는지를 판단하기는 어렵다. 따라서, 지정된 고유벡터의 정확성을 쉽게 판단할 수 있는 척도가 필요한데, 본 장에서는 (12)의 성능지수에서 시스템의 성능에 관계된 첫 번째 항을 이용하여 다음과 같은 고유벡터 지정정확성 척도를 제안한다.

$$\rho = \sum_{i=1}^n (v_i^d - v_i^a)^T W_i (v_i^d - v_i^a) \quad (15)$$

여기서, v_i^d 와 v_i^a 는 (12)에서와 동일하게 각각 원하는 고유벡터와 획득 가능한 페루프 시스템의 고유벡터를 나타낸다. 그리고, W_i 는 고유벡터의 각 요소들에 가중을 주는 행렬로서 양의 반한정(positive semidefinite) 행렬이며, 이

값을 조절하여 시스템의 성능에 상대적으로 큰 영향을 미치는 요소나 또는 거의 영향을 미치지 않는 요소 등을 분리하여 고려해 줄 수 있다.

(15)에서 실제로 지정된 페루프 시스템의 고유벡터가 원하는 고유벡터와 정확하게 일치하면 ρ 는 0으로 최소값을 가지며 가장 우수한 성능을 나타낸다. 즉, ρ 의 값이 0에 가까울수록 지정된 고유벡터와 원하는 고유벡터의 오차가 작다는 것을 의미하고, 반대로 ρ 의 값이 커질수록 지정된 고유벡터와 원하는 고유벡터의 오차가 크다는 것을 의미한다. 따라서, (15)를 이용하면 지정된 페루프 시스템의 고유벡터가 원하는 고유벡터에 얼마나 근접했는지 알 수 있다.

2. 시스템의 견실성 척도

고유벡터의 지정정확성과 마찬가지로 실제 시뮬레이션 결과를 보고 시스템의 견실성이 얼마나 향상되었는지 판단하기는 어렵다. 따라서, 시스템의 견실성을 쉽게 파악할 수 있는 견실성 척도도 필요하다. 시스템의 견실성 척도로써 II장에서 기술한 민감도와 견실성의 관계를 이용하여 조건수 ϵ 을 사용할 수 있다. 고유치의 민감도 관점에서 볼 때, 조건수 ϵ 의 값이 1에 가까울수록 견실성은 커지며 조건수 ϵ 의 값이 1보다 커질수록 견실성은 작아진다. 따라서, 본 논문에서는 시스템의 견실성 척도로 (4)와 같이 시스템의 우-모드 행렬의 조건수 ϵ 을 사용한다.

$$\epsilon \equiv \|V\| \|V^{-1}\| = \frac{\sigma_{\max}(V)}{\sigma_{\min}(V)}$$

V. 수치 예제 및 EMRAAT 미사일 제어에의 응용

본 장에서는 III장에서 제안한 새로운 견실 고유구조 지정법과 IV장에서 제안한 고유벡터의 지정정확성 척도와 시스템의 견실성 척도의 유용성을 간단한 수치 예제를 통하여 검증하고, EMRAAT 미사일 모델에 적용하여 결과를 고찰한다.

1. 수치 예제

다음과 같은 2차 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (16)$$

그리고, 원하는 페루프 시스템의 고유치와 고유벡터는 다음과 같이 설정한다.

$$\lambda_1^d = -1, \lambda_2^d = -2, V^d = \begin{bmatrix} 1 & 0.7071 \\ 0 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (17)$$

다음으로 시스템의 견실성의 기준으로 사용할 일원행렬을 결정해야 하는 데, 실제로 사용할 수 있는 다수의 일원행렬이 존재하므로 이들 중에서 어떠한 값을 선택할 것인지 결정하는 것은 중요한 문제가 된다. 일원행렬의 선정 과정에서 시스템의 견실 성능과 고유벡터의 지정정확성을 동시에 고려하기 위해서 원하는 고유벡터 V^d 와 유사한 형태를 가지는 일원행렬을 선정하는 것도 하나의 방법이 될

수 있고, 또한 견실성에 100%의 가중을 주었을 때 획득할 수 있는 우-모드 행렬의 조건수가 가장 낮은 값을 가지는 일원행렬을 선정하는 것도 하나의 방법이 될 수 있다. 본 예제에서는 원하는 고유벡터 V^d 와 유사한 형태를 가지는 (18)의 값을 견실성의 기준으로 설정하였다.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

이러한 조건 아래에서 (12)의 가중치 α_1, α_2 를 바꾸어 가면서 시뮬레이션을 수행하고, 표 1에 시뮬레이션의 결과를 정리하여 나타내었다. 여기서, ρ 와 ϵ 은 둘다 작은 값을 가질 때 좋은 성능을 나타내며, 최소값은 각각 0과 1이다.

이때, 고유벡터의 각 요소들마다 동일한 가중치를 부여해 주기 위하여 가중행렬 P_i, Q_i, W_i 는 모두 단위행렬(identity matrix)을 사용하였다.

표 1의 경우 1과 같이 시스템의 성능과 관련하여 고유벡터의 지정정확성에 100%의 가중을 주면 지정된 고유벡터는 원하는 고유벡터와 정확하게 일치하는 반면에 견실성 척도 값이 커져서 시스템의 견실성이 나빠지는 것을 볼 수 있다. 그리고 경우 3과 같이 시스템의 견실성에 100%의 가중을 주면 고유벡터의 조건수 1로서 민감도 관점에서 견실성이 가장 뛰어난 반면에 고유벡터의 지정정확성은 나빠지는 것을 알 수 있다.

표 1에서 알 수 있듯이 III장에서 제안한 견실 고유구조 지정기법을 사용하면, 제어기 설계자는 가중치 α_1 과 α_2 를 조절하여 시스템의 고유벡터의 지정정확도에 따른 성능과 시스템의 견실성을 동시에 고려하여 제어기를 설계할 수 있으며, IV장에서 제안한 고유벡터의 지정정확성 척도(ρ)와 시스템의 견실성 척도(ϵ)를 이용하여 확보된 시스템의 성능 및 견실성을 동시에 파악할 수 있다.

표 1에는 가중치 α_1 과 α_2 의 변화에 따른 각각의 척도를 대표적인 세 가지 경우에 대해서만 나타내었지만, 다른 경우에 대해서도 각각의 척도를 구해보면 가중치 α_1 이 커질수록 고유벡터의 지정정확성이 우수해지고, 가중치 α_2 가 커질수록 시스템의 견실성이 우수해지는 것을 확인할 수

표 1. 가중치에 따른 고유벡터 지정정확성 척도(ρ) 및 견실성 척도(ϵ).

Table 1. The assignment accuracy measure(ρ) and robustness measure(ϵ) according to the weights.

	경우 1 $\alpha_1=1, \alpha_2=0$	경우 2 $\alpha_1=0.5, \alpha_2=0.5$	경우 3 $\alpha_1=0, \alpha_2=1$
원하는 고유벡터	$\begin{bmatrix} 1 & 0.7071 \\ 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.7071 \\ 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.7071 \\ 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$
지정된 고유벡터	$\begin{bmatrix} 1 & 0.7071 \\ 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.3827 \\ 0 & 0.9239 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
ρ	0	0.15	0.56
ϵ	2.41	1.50	1

있다. 즉, 앞에서 언급했던 것처럼 본 예제와 같이 시스템의 차수와 독립된 제어입력의 차수가 동일한 경우에 대해서는 가중치 α_1 과 고유벡터의 지정정확성, 가중치 α_2 와 시스템의 견실성 사이의 관계가 서로 비례 관계에 있는 것을 알 수 있다.

표 1에 나타난 시스템의 견실성 척도와 실제 시스템의 견실성을 비교하기 위하여 공칭 시스템 행렬에 섭동항 E 를 첨가하여 시뮬레이션을 수행하였다. 시스템의 초기 값으로는 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ 으로 설정하였다. 우선, 섭동

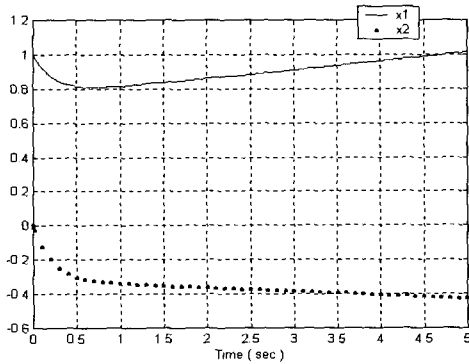


그림 1. $E = -1.5A, \epsilon = 2.41$ 일 때의 응답.
Fig. 1. Closed loop responses at $E = -1.5A, \epsilon = 2.41$.

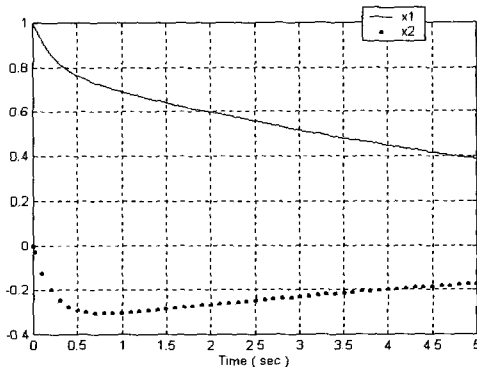


그림 2. $E = -1.5A, \epsilon = 1.50$ 일 때의 응답.
Fig. 2. Closed loop responses at $E = -1.5A, \epsilon = 1.50$.

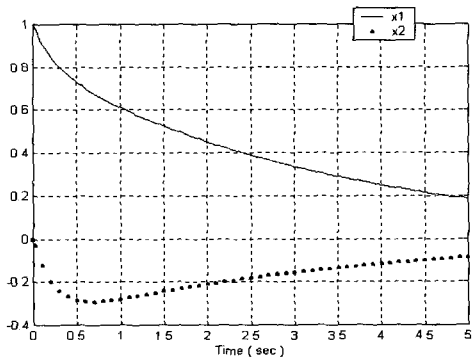


그림 3. $E = -1.5A, \epsilon = 1$ 일 때의 응답.
Fig. 3. Closed loop responses at $E = -1.5A, \epsilon = 1$.

항 E 를 $-1.5A$ 로 설정하고 시뮬레이션을 수행한 결과를 그림 1 ~ 그림 3에 도시하였다. 시뮬레이션 결과에서 살펴보면 시스템의 견실성의 척도 ϵ 이 가장 큰 그림 1에서만 시스템의 응답이 발산하고, 시스템의 견실성 척도 ϵ 이 작은 그림 2과 그림 3의 결과에서는 시스템의 응답이 수렴하는 것을 알 수 있다. 또한, 섭동항 E 를 더욱 높여 $-1.8A$ 로 설정하고 시뮬레이션을 수행한 결과를 그림 4와 그림 5에 도시하였다. 시뮬레이션 결과를 살펴보면 시스템의 견실성 척도 ϵ 가 큰 그림 4는 발산하는 반면에 시스템의 견실성 척도 ϵ 이 작은 그림 5에서는 여전히 안정한 것을 알 수 있다. 즉, 본 논문에서 제시한 것처럼 시스템의 견실성 척도 ϵ 이 작아질 수록 시스템의 견실 성능이 우수해지는 것을 알 수 있다.

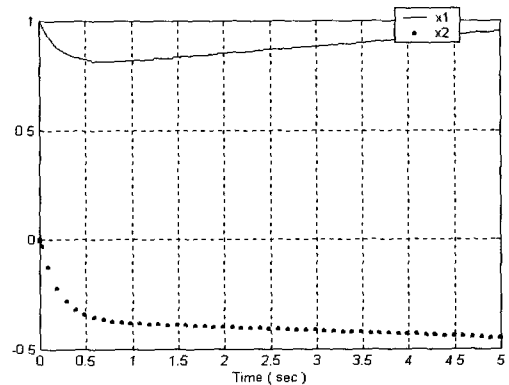


그림 4. $E = -1.8A, \epsilon = 1.50$ 일 때의 응답.
Fig. 4. Closed loop responses at $E = -1.8A, \epsilon = 1.50$.

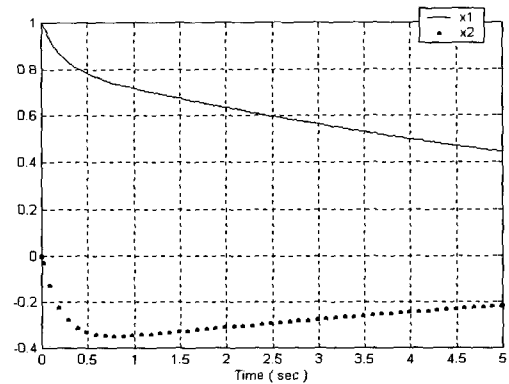


그림 5. $E = -1.8A, \epsilon = 1$ 일 때의 응답.
Fig. 5. Closed loop responses at $E = -1.8A, \epsilon = 1$.

2. EMRAAT 미사일에의 응용

본 절에서는 III장에서 제안한 견실 고유구조 지정법을 실제 시스템인 EMRAAT 미사일 모델에 적용하고 그 결과를 고찰한다.

다음은 마하수(Mach number) 2.5, 속도 2420 ft/sec, 동압력(dynamic pressure) 1720 lbs/ft², 양각(angle of

attack) 10° 일 때의 EMRAAT 미사일 모델의 상태 방정식을 나타낸 것이다[8].

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \int \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.501 & -0.985 & 0.174 & 0 \\ 16.83 & -0.575 & 0.0123 & 0 \\ -3227 & 0.321 & -2.10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \int p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.109 & 0.007 \\ -132.8 & 27.19 \\ -1620 & -1240 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서, β 는 옆미끄럼 각(sideslip), r 은 요 변화율(yaw rate), p 는 롤 변화율(roll rate), $\int p$ 는 롤 각(roll angle), δ_r 은 방향 타각(rudder position), δ_a 는 에일러론 타각(aileron position)을 나타낸다.

(19)의 EMRAAT 미사일 모델에서, 시스템 행렬의 3행 1열 요소(-3227)를 살펴보면 시스템 행렬의 다른 요소들보다 매우 큰 것을 알 수 있다. 즉, 위의 시스템에서 옆미끄럼 각(β)과 롤 변화율(p)이 매우 강하게 연성(coupling)된 것을 알 수 있다. Wilson 등[8]은 이러한 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 연성 문제를 해결하기 위하여 원하는 고유구조를 다음과 같이 두고 제어기를 설계하였다.

$$\lambda_{1,2} = -10 \pm 10i, \quad \lambda_{3,4} = -24 \pm 18i \quad (20)$$

$$V^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서, V^d 의 요소 중 '0'는 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 불연성화를 위하여 반드시 지정되어야 하는 값이고, '×'는 불연성화에 크게 영향을 미치지 않은 임의의 값이다.

본 논문에서 제안하는 견실 고유구조 지정법을 이용하여 제어기를 설계하기 위해서는 원하는 페루프 시스템의 고유치와 고유벡터, 그리고 일원행렬이 필요하다. 원하는 페루프 시스템의 고유치와 고유벡터는 참고 문헌 [8]에서와 동일하게 (20)과 (21)로 설정한다. 그리고, 시스템의 견실성과 관련하여 조건수 1인 다음과 같은 일원행렬을 사용한다.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1j & 1j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1j & -1j \end{bmatrix} \quad (22)$$

표 2. 가중치에 따른 고유벡터 지정정확성 척도(ρ) 및 견실성 척도(ϵ).

Table 2. The assignment accuracy measure(ρ) and robustness measure(ϵ) according to the weights.

	경우 1 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$	경우 2 $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5$	경우 3 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$
ρ	0	3.999	4.000
ϵ	50.294	50.379	50.259

위의 값들을 이용하여 각각의 가중치 α_1 과 α_2 의 값을 바꾸어 가면서 제어기를 설계하고 시뮬레이션을 수행하고, 시뮬레이션 결과를 표 2에 정리하였다. 이때, V^d 의 각 요소들 중 정확하게 지정되어야 하는 값은 '0'이고, '×'는 시스템의 응답에 영향을 거의 미치지 않는 임의의 값이라고 (21)에서 설정하였기 때문에 가중행렬 P_i 는 다음과 같이 설정하였다.

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{diag}[1, 1, 10^{-4}, 10^{-4}] \\ P_2 &= \text{diag}[1, 1, 10^{-4}, 10^{-4}] \\ P_3 &= \text{diag}[10^{-4}, 10^{-4}, 1, 1] \\ P_4 &= \text{diag}[10^{-4}, 10^{-4}, 1, 1] \end{aligned} \quad (23)$$

그리고, 견실성에 관련된 가중행렬 Q_i 는 U 의 각 요소들마다 동일한 가중치를 부여해 주기 위하여 단위행렬을 사용하였다. 마지막으로, 고유벡터의 정확성 척도계산을 위하여 사용된 W_i 는 다음과 같이 설정하였다.

$$\begin{aligned} W_1 &= \text{diag}[1, 1, 0, 0], \quad W_2 = \text{diag}[1, 1, 0, 0] \\ W_3 &= \text{diag}[0, 0, 1, 1], \quad W_4 = \text{diag}[0, 0, 1, 1] \end{aligned} \quad (24)$$

IV장의 수치예제에서와 달리 본 EMRAAT 미사일 모델은 시스템의 차수($n = 4$)보다 제어입력의 차수($m = 2$)가 작기 때문에 페루프 시스템의 고유치와 고유벡터를 전부 정확하게 지정하지 못한다. 따라서, 페루프 시스템의 고유치는 전부 정확하게 지정하고, 페루프 시스템의 고유벡터는 (13)과 (14)를 이용하여 최소자승의 관점에서 최적인 값을 가지도록 지정해야 하기 때문에 가중치 α_1 과 고유벡터의 지정정확성, 가중치 α_2 와 시스템의 견실성이 각각 정확하게 비례하는 것은 아니라는 것을 알 수 있다.

고유벡터의 지정정확성의 관점에서 결과를 살펴보면 표 2의 경우 1과 같이 시스템의 성능과 관련하여 고유벡터의 지정정확성에 100%의 가중을 주면 표 2에서 나타나듯이 지정정확성이 가장 우수하고, 경우 2와 경우 3으로 갈수록 점점 고유벡터의 지정정확성 척도가 커져서, 페루프 시스템의 고유벡터와 원하는 고유벡터 사이의 오차가 커지는 것을 알 수 있다. 이때, 고유벡터의 지정정확성 척도는 어느 정도 가중치 α_1 과 비례관계를 가지는 것을 알 수 있는

데, 이는 (21)에서 알 수 있듯이 시스템의 성능과 관련된 원하는 고유벡터 V^d 에 어떤 값을 가지든 상관없는 'x'항이 포함되어 있기 때문에, 여기에서 발생하는 여분의 자유도를 이용하여 앞에서 사용한 수치 예제와 같이 시스템의 차수와 제어 입력의 차수가 동일한 경우처럼 다룰 수 있기 때문이다. 그러나, 시스템의 견실성의 관점에서 살펴보면 표 2의 결과에서 보듯이 가중치에 큰 상관없이 세 가지 경우 모두 시스템의 조건수가 비슷한 것을 볼 수 있다. 이는 앞에서 기술한 것처럼 최소자승의 관점에서 최적의 값을 가지도록 고유벡터를 지정하기 때문에 페루프 시스템의 고유벡터를 정확하게 (22)의 일원행렬로 지정할 수 없을 뿐만 아니라 (21)의 원하는 고유벡터 V^d 또한 일원행렬은 아니더라도 조건수가 매우 낮은 값을 가질 수 있기 때문이다.

본 논문에서 제안한 견실 고유구조 지정 기법의 성능을 비교 평가하기 위하여 Wilson 등[8]이 제안한 제어기법과 비교하였다. Wilson 등이 제안한 견실 고유구조 지정법은 (25)의 가격함수를 최소화하는 제어 이득을 구하는 방법이다.

$$J = \rho_1 \|A - A^d\|^2 + \rho_2 \|V - V^d\|^2 + \rho_3 \|P\|^2 \quad (25)$$

여기서, A 와 A^d 는 각각 획득 가능한 페루프 시스템의 고유치와 원하는 페루프 시스템의 고유치들로 이루어진 대각행렬이고, V 와 V^d 는 각각 획득 가능한 페루프 시스템의 우-모드 행렬과 원하는 페루프 시스템의 우-모드 행렬이다. 그리고, P 는 (26)의 Lyapunov 식을 만족하는 행렬이며, ρ_1, ρ_2, ρ_3 는 각각 고유치의 정확성, 고유벡터의 정확성, 시스템의 견실성에 관련된 가중치들로서 이들의 합은 1이다.

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P + 2I = 0 \quad (26)$$

시뮬레이션 조건으로 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 불안정화 성능을 파악하기 위하여 초기조건으로 옆미끄럼 각은 1° , 롤 변화율은 0 deg/sec 로 설정하고 시뮬레이션을 수행하였다. 그림 6에는 본 논문에서 제안한 방법으로 견실성은 고려하지 않고, 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 불안정화를 목적으로 설계한 제어기를 적용한 결과를 도시하였고, 그림 8에는 Wilson 등이 제안한 방법으로 설계한 제어기를 적용한 결과를 도시하였다. 그림 6과 그림 8의 시뮬레이션 결과를 살펴보면 본 논문에서 제안한 방법으로 제어기를 설계하였을 때 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 불안정화 성능이 뛰어난 것을 알 수 있다.

견실 성능의 비교 평가를 위하여 시스템 행렬은 $(A + E)$ 공칭 시스템 행렬에 30%의 불확실성을 가지는 섭동항 ($E = 0.3A$)을 가진다고 가정하고 시뮬레이션을 수행하였다. 초기 조건은 앞서와 동일하게 옆미끄럼 각은 1° , 롤 변화율은 0 deg/sec 로 설정하였다. 그림 10에는 본 논문에서 제안한 방법으로 페루프 시스템의 견실성을 100% 고려하여 설계한 제어기의 적용 결과를 도시하였고, 그림 12에는 Wilson 등이 제안한 방법으로 페루프 시스템의 견실성을 100% 고려하여 설계한 제어기의 적용

결과를 도시하였다. 시뮬레이션 결과를 살펴보면 EMRAAT 미사일의 경우에 본 논문에서 제안한 방법을 사용하여 설계한 제어기가 Wilson 등이 제안한 방법으로 설계한 제어기보다 견실 성능이 우수한 것을 알 수 있다.

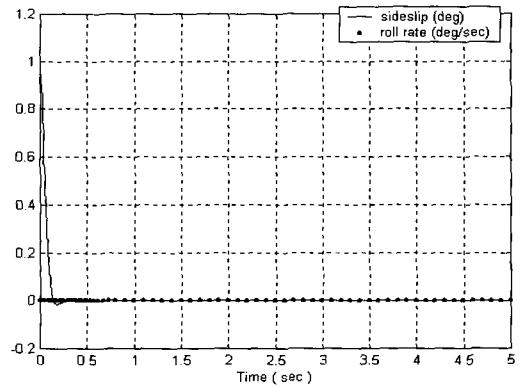


그림 6. 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 페루프 응답 : 경우 1.
Fig. 6. Closed loop responses of sideslip and roll rate : case 1.

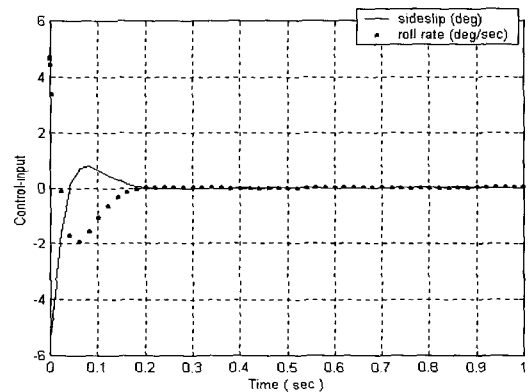


그림 7. 제어 입력 : 경우 1.
Fig. 7. Control input : case 1.

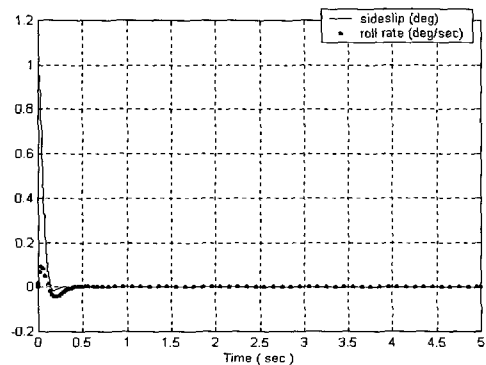


그림 8. 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 페루프 응답[8] : $\rho_3 = 0$.
Fig. 8. Closed loop responses of sideslip and roll rate[8] : $\rho_3 = 0$.

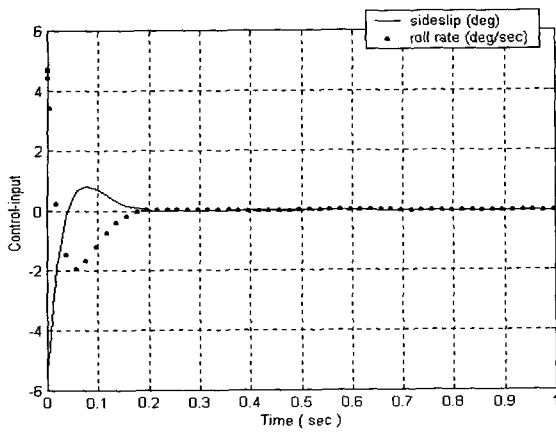


그림 9. 제어 입력 : $\rho_3 = 0$.
 Fig. 9. Control input : $\rho_3 = 0$.

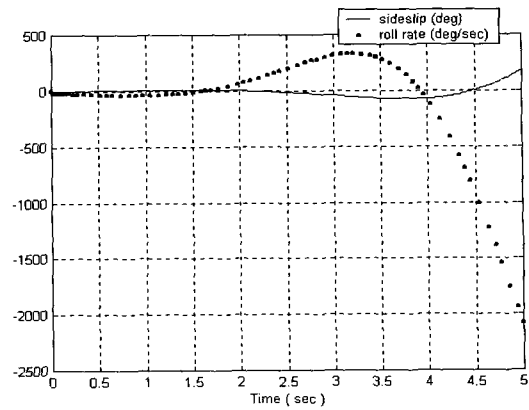


그림 12. 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 폐루프 응답[8] : $\rho_3 = 1$.
 Fig. 12. Closed loop responses of sideslip and roll rate[8] : $\rho_3 = 1$.

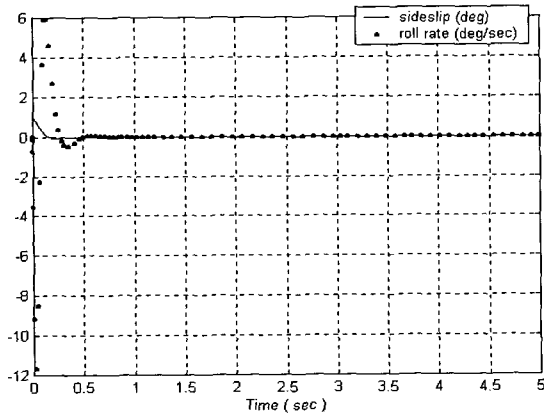


그림 10. 옆미끄럼 각과 롤 변화율의 폐루프 응답 : 경우 3.
 Fig. 10. Closed loop responses of sideslip and roll rate : case 3.

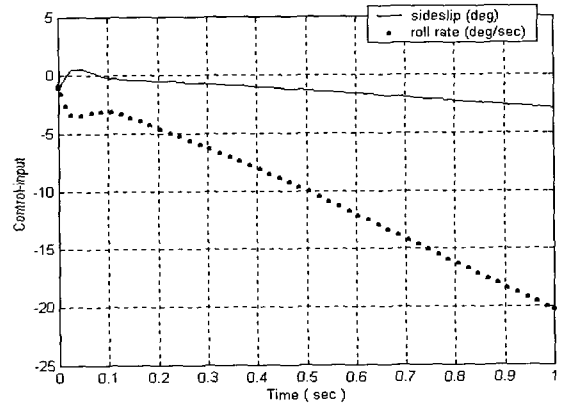


그림 13. 제어 입력 : $\rho_3 = 1$.
 Fig. 13. Control input : $\rho_3 = 1$.

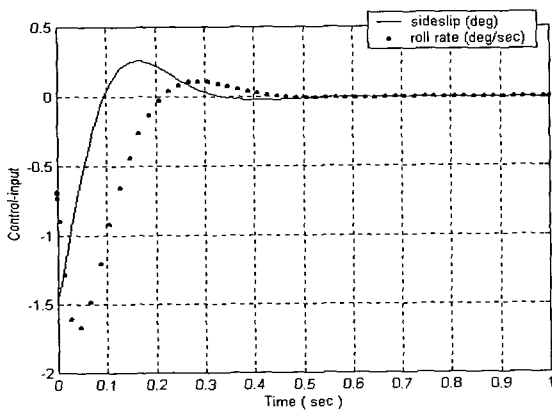


그림 11. 제어 입력 : 경우 3.
 Fig. 11. Control input : case 3.

VI. 결론

본 논문에서는 고유구조 지정법의 큰 단점으로 인식되어 왔던 견실성 확보문제를 해결하기 위하여 고유치의 민감도와 견실성의 관계를 이용하여 견실성을 고려할 수 있는 새로운 견실 고유구조 지정법을 제안하였다. 제안된 기법은 정확한 고유벡터 지정 문제와 시스템의 견실성 확보 문제를 동시에 고려할 수 있는 새로운 성능지수를 정의하여 사용하기 때문에 설계자가 원하는 제어목적에 따라서 각각의 가중치를 조절하여 제어를 설계할 수 있다. 또한, 설계된 제어기의 성능을 쉽게 파악할 수 있도록 고유벡터의 지정정확성 척도와 견실성 척도를 제안하였다. 마지막으로 수치 예제와 EMRAAT 미사일 예제를 이용하여 제안한 견실 고유구조 지정법과 각각의 척도들의 유용성을 입증하였다.

참고문헌

[1] A. N. Andry, E. Y. Shapiro, and J. C. Chung, "Eigenstructure assignment for linear systems",

IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 19, no. 5, pp. 711-729, 1983.

[2] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, "Design of an effective controller via disturbance accommodating left eigenstructure assignment", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp. 347-354, 1995.

[3] J. W. Choi, "A simultaneous assignment methodology of right/left eigenstructures", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 2, pp. 625-634, 1998.

[4] J. W. Choi, "Left eigenstructure assignment via sylvester equation", *KSME International Journal*, vol. 12, no. 6, pp. 1034-1040, 1998.

[5] V. Gourishankar and K. Ramar, "Pole assignment with minimum eigenvalue sensitivity to plant parameter variations", *International Journal of Control*, vol. 23, no. 4, pp. 493-504, 1976.

[6] P. R. Apkarian, "Structured stability robustness improvement by eigenspace techniques: A hybrid methodology", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 12, no. 2, pp. 162-168, 1989.

[7] J. W. Choi and Y. B. Seo, "LQR design with eigenstructure assignment capability", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 35, no. 2, pp. 700-708, 1999.

[8] R. F. Wilson, J. R. Cloutier, and R. K. Yedavalli, "Control design for robust eigenstructure assignment in linear uncertain systems", *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 12, no. 5, pp. 29-34, 1992.

[9] W. Yu, J. E. Piou, and K. M. Sobel, "Robust eigenstructure assignment for the extended medium range air-to-air missile", *Automatica*, vol. 29, no. 4, pp. 889-898, 1993.

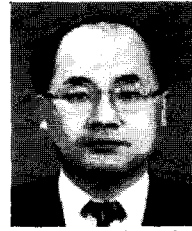
[10] J. L. Junkins and Y. Kim, *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series, 1993.

[11] B. C. Moore, "On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, pp. 689-692, 1976.



김 주 호

1998년 부산대학교 제어기계공학과 졸업. 부산대학교 기계공학부 석사(2000). 2000년~현재 부산대학교 기계공학부 박사과정. 관심분야는 선형제어 이론, 건설 고유구조 지정이론, 고장 허용 제어시스템 설계, 지능형 자동차 시스템 제어.



최 재 원

1987년 서울대학교 제어계측공학 졸업. 1989년 서울대학교 제어계측공학 석사. 1995년 서울대학교 제어계측공학 박사. 1995년 2월~3월 일본 NASDA/TKSC 방문 연구원. 1995년 9월~1996년 2월 미국 USC PostDoc. 1998년 1월~2월, 1999년 12월~2000년 1월 미국 LSU 방문 교수. IFAC Technical Committee on Aerospace 및 Technical Committee on Linear Systems 위원. IEEE Control Systems Society Conference Editorial Board, Associate Editor. 2000년 1월~현재 제어·자동화·시스템공학 논문지 편집위원, 대한기계학회 동역학 및 제어부분 운영위원, 1996년~현재 부산대학교 기계공학부 전임강사, 조교수. 2000년 5월 한국과학기술단체총연합회 수여 제 10회 과학기술우수논문상 수상. 관심분야는 네트워크 차량의 항법 및 유도제어와 ITS에의 응용, 초소형 비행체의 항법 및 유도제어, 다중표적 추적필터 설계, 고장진단기반 제어기 재구성.