

근사 자코비안 연산자를 이용한 경량 매니퓰레이터의 시각 서보 제어

Visual Servo Control of Slender Manipulators Using an Approximate Jacobian Operator

이 호 길, 김 진 영
(Ho Gil Lee and Jin Young Kim)

Abstract : To realize a visual servo control of slender manipulators, two problems to be solved are analysed. The stability problem on so-called noncollocation control and the infinite order problem of the real Jacobian matrix caused by the elastic deformation are discussed. By considering the dynamic relations between rigid and elastic modes, a Jacobian operator is derived and the physical meaning is also explained. Then, for practical control, a simple control scheme using an approximate Jacobian is proposed and its stable conditions are proven by means of the L_2 stability theory. The scheme is structurally similar to the conventional PD control laws, but external sensors(e. g. visual sensor) are used for positioning and internal sensors for damping. A good performance is obtained via control experiments of a slender two link manipulator.

Keywords : visual servo, vibration control, Jacobian operator, approximate Jacobian, stability, elastic behavior

I. 서론

시각센서에 의한 서보기술은 전자부품 표면실장기를 비롯한 로봇 end effector의 정밀 위치제어에 활용되고 있다. 이것은 위치를 작업 좌표계에서 직접 측정함으로써 로봇 관절부와 링크오차의 영향을 최소화시키는, 일종의 외계센서 귀환(external sensory feedback) 방법이라고 할 수 있다. 강체 매니퓰레이터에 대한 외계센서 귀환은 역 자코비안 행렬(inverse Jacobian matrix)을 이용하는 방법, 전치 자코비안 행렬(transposed Jacobian matrix)을 이용하는 방식이 연구되어 있고, 특히, 전치 자코비안 행렬방식은 특이점(singular point)문제를 극복할 수 있는 방법으로 귀환 제어에 폭넓게 활용되고 있다[1]. 한편, 세포조작이라든가 안구수술 등에 적용하기 위한 로봇에서는 세장형 링크(slender link)를 갖는, 즉, 가느다란 빔형 구조가 채택되고 있고, 마이크로 머시닝에 의한 초소형 기구의 연구도 활발히 진행되고 있다. 링크부가 가늘어지거나 고속운동을 하게 된다면, 진동이 수반되는 것이 필연적이다. 그렇다면 강체 운동에 수반되는 진동이 발생할 때, 강체로서 가정된 기존의 시각 서보 방식은 그대로 활용할 수 있는 것인가?

유연 링크 암 제어연구에서는 센서와 액츄에이터가 서로 다른 위치에 배치될 때, 즉 noncollocation제어의 경우, 시스템의 안정성을 보장하기 곤란한 것으로 인식되어, 센서와 액츄에이터 위치를 일치시키는 collocation제어를 통해 안정성을 확보하고 있다[2]-[6]. 시각 서보잉의 경우, 카메라와 모터의 배치가 구조적으로 noncollocation인데 어떻게 안정성을 확보할 것인가가 해결되어야 한다.

탄성변형이 수반될 때 발생하는 또 하나의 문제로서 자코비안 행렬의 연산문제가 있다. 귀환제어에서는 작업좌표상의 목표위치와 현재위치와의 편차를 자코비안 행렬을

이용하여 관절에 분배, 이 관절편차에 대해서 귀환제어를 하게된다. 강체로봇의 경우, 관절 상태변수 벡터 θ , $\theta \in R^m$ 와 작업좌표상의 위치벡터 z , $z \in R^n$ 가 $z = h(\theta)$ 의 관계를 가질 때, 미소 변위에 대해 자코비안 행렬 J 는 $\delta z = J \delta \theta$, $J = \partial h(\theta) / \partial \theta$, $J \in R^{n \times m}$ 로 정의하고, 귀환제어시, J^{-1} 또는, J^T 를 이용하게된다.

링크에 탄성변형이 있을 경우, 탄성거동은 분포정수계로서 이론적으로 무한개의 모드로 표현된다. 즉 작업좌표상의 위치벡터 z 는 무한개의 탄성모드에 대응하는 상태변수 $q_1, q_2, \dots, q_\infty$ 를 포함한 $z = h(\theta, q_1, q_2, \dots, q_\infty)$ 가 되고, 이때 J 는 $J \in R^{n \times \infty}$ 의 차원을 갖는다. 완전한 귀환제어를 위해서는 자코비안 행렬의 연산이 필요하나 무한차원행렬의 연산은 불가능하다. 현실적인 방법으로는 근사 자코비안 행렬을 이용할 수밖에 없다. 그렇다면 적절한 근사 자코비안 행렬의 설정방법은 무엇이며, 이때 시스템의 제어 특성은 어떻게 보장할 수 있을까?

이러한 문제는 위에서의 설명에서도 이해될 수 있듯이 어떤 인위적인 제어특성에 기인하는 것이 아니라, 물리적 현상 그 본질에 기인하는 것이다. 본 논문에서는 이러한 문제에도 불구하고 시스템의 안정문제를 해결하는 현실적인 제어법에 대해 논의하고, 실험을 통하여 그 유용성을 실증하고자 한다. 이론적인 고찰에서는 이러한 문제를 명료하게 하기 위해 무중력 공간 내의 작은 작동범위를 갖는 다관절 로봇을 상정하고, 선형화된 모델을 다루도록 한다. 선형모델은 고속운동과 같은 경우의 안정성문제를 다루기에 충분치 않지만 관절변수와 탄성변수의 관계 및 본질적 안정조건을 해명할 수 있다.

II. 분포 정수계 모델과 구조특성

1. 분포특성의 정식화

링크운동은 Hamilton의 변분원리에 의해 관절 각의 회

전 즉 강제운동과 링크변형 즉 탄성운동이 서로 간섭된 편미분방정식과 자연경계조건으로 얻어진다. 여기에 기하학적 경계조건을 고려하면 운동을 기술하기 위한 완전한 편미분운동방정식이 된다[3][9]. 이 편 미분방정식을 풀기 위해서는 변수분리를 통해 집중화하여 상 미분방정식으로 변환하게 되는데, 이때의 변수분리방법은 구속모드법(constrained mode method)과 비구속모드법(unconstrained mode method)이 있다. 이 두 방법 모두, 얻어지는 상 미분방정식은 무한개의 모드로 구성되며 수학적으로는 등가이다[7]. 비구속모드는 서로 독립된 즉 고유모드에 의한 상 미분방정식이 얻어지는 장점이 있으나, 링크수가 많아지게 되면, 분리정수를 도출하기가 어렵고, 얻어진 결과 또한 직관적이지 않다. 구속모드 법은 외팔 보의 분리정수를 이용하여 상 미분방정식을 유도하는 일종의 근사 모드 전개방식으로, 관절의 회전각과 탄성모드가 각각 상태변수로서 얻어지므로 직관적이며 다 관절로의 확장 또한 간단하기 때문에 로봇의 제어입장에서 볼 때 유용한 방법이라 할 수 있다. 물론 수학적 엄밀성이 보장되기 위해서는 무한개의 모드를 고려해야 되므로 모델 활용 시에는 주의가 필요하다(즉, 각 모드가 고유모드가 아니라 근사모드라는 점을 염두에 두어야 함).

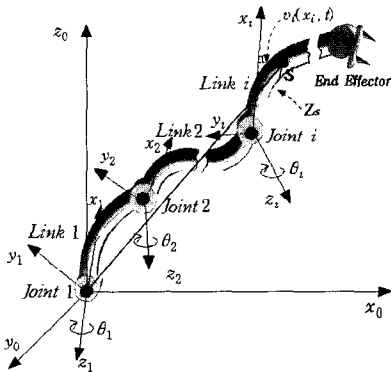


그림 1. 세장형 링크 매니플레이터와 탄성변형.
Fig. 1. A manipulator with slender links and elastic deformation.

그림 1과 같이 p 개의 회전관절로 구성된 매니플레이터의 좌표계를, 링크 i 의 관절에서의 접선방향을 x_i 축, 관절의 회전방향 축을 z_i 로 설정하고, 각 관절은 강체이며, 각 링크는 길이방향 변형이 무시될 수 있는 균일한 단면의 가늘고 긴 빔이라고 가정한다. 관절위 임의의 점 S 위치와 자세 각을 작업좌표계에서 본 벡터형식으로 표현하여 z_s 라 하고, 그 차원도 이론전개의 편리성을 위해 p 라고 하자. 이때 z_s 는 관절좌표계에서 본 관절의 회전각 θ_i 과 탄성변위 $v_i(x_i, t)$ 의 함수로서, 탄성변위를 고려한 동차변환(homogeneous transformation)[3]을 통해 다음과 같이 표현된다.

$$z_s = h_s(\theta, v), \quad z_s \in R^{p \times 1} \quad (1)$$

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T, \quad v = [v_1, v_2, \dots, v_p]^T.$$

탄성변위를 모드공간에서 표현하기 위해서 구속모드법을 도입하자. 구속모드법이란 링크의 한쪽 끝을 고정된 것으로 보고 외팔 보의 고유함수를 이용하여 전개하기 때문에 유래된 용어이다. 당연히 이때의 모드는 고유모드가 아니라 근사 모드이다. 외팔보의 고유함수를 이용하여 변위를 다음과 같이 전개하자.

$$v_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^n \xi_{ij}(x_i) q_{ij}(t),$$

$$0 \leq x_i \leq L_i, (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2)$$

단, $\xi_{ij}(x_i)$ 은 각 링크에서 외팔보의 기하학적 경계조건, 즉 $v_i(0) = 0$,

$$\partial v_i / \partial x_i |_{x_i=0} = 0$$

만을 만족하는 외팔보 고유함수(eigenfunctions), q_{ij} 은 시간함수, n 은 탄성운동을 표현하기에 충분히 큰 수이다(이론적으로 n 은 무한대이다). (1)을 모드공간의 함수로서 다시 쓰면

$$z_s = h_s(\theta, q)$$

$$q = [q_{11}, q_{12}, \dots, q_{ip}, \dots, q_{pm}]^T \quad (3)$$

를 얻는다.

2. 탄성링크 로봇의 동력학모델과 구조특성

시스템의 운동에너지는 $\dot{\theta}, \dot{q}$ 의 함수, 위치에너지는 무중력상태로 가정하였기 때문에 링크의 탄성변위에 대한 탄성에너지만을 고려하여 Hamilton의 변분원리를 적용하면 다음과 같은 형태의 운동방정식이 얻어진다[3].

$$R(x)\ddot{x} + S(\dot{x}, x) + Q^* \dot{x} + \Omega^* x = Bu \quad (4)$$

단, $x = [\theta^T, q^T]^T$. 좌변 제1항은 관성력으로서 각 상태변수간의 상호작용에 의해 항상 다음관계가 성립된다.

$$R(x) = R(x)^T > 0, \quad R(x) \in R^{(1+n) \times (1+n)}$$

제2항은 코리올리력, 원심력을 나타내는 비선형항이며, 제3항은 링크의 탄성변형에 대한 링크재질에 따라 변하지만 내부의 구조감쇄력으로 각 탄성모드에 대해 양의 값을 갖는다. 입력 행렬 B 는 p 개의 모터의 토크 τ_i 가 관절회전에 작용하므로 다음형태를 갖게 된다.

$$Q^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad \Omega^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q > 0, \quad Q \in R^{(p \times n) \times (p \times n)}$$

$$\Omega = \text{diag}\{w_{11}^2, w_{12}^2, \dots, w_{pm}^2\}, \quad \Omega \in R^{(p \times n) \times (p \times n)}$$

$$u = [\tau_1, \dots, \tau_p]^T \text{ 단, } I \text{는 } R^{p \times p} \text{ 단위행렬.}$$

이 운동방정식의 구조적인 특징은 각 상태변수간의 상호간섭이 관성행렬을 통해 이루어지게 된다는 점이다. 다시 말해서 강제운동은 관성항의 간섭을 통해 탄성모드, 즉 진동이 야기된다는 것을 의미하며, 가속운동이 없다면 진동도 발생하지 않는다. 이후의 이론전개를 위해 명확한 구조의 선형모델을 표현하자.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5)$$

III. 자코비안 연산자

end effector의 작업좌표상의 위치벡터 z_e 는 (3)과 유사하게

$$z_e = h(\theta, q) \quad (6)$$

라 정의할 수 있다. 이것은 시각 등 외부센서에 의해 측정되는 위치이다. end effector의 목표벡터를 z_d 라 할 때 이에 대응되는 유일한 관절목표 $x_d = [\theta_d^T, q_d^T = 0]^T$ 가 존재하는 영역은 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$z_d \in \epsilon, \quad \epsilon = \{z \mid \det(\partial h / \partial \theta) \neq 0\}$$

일반적으로 end effector의 위치에 대해 관절목표는 해가 없거나 복수 해가 존재하지만, 위 조건과 $q=0$ 를 도입함으로써 대응되는 벡터 θ_d 는 적당한 영역 내에서 유일하게 결정될 수 있다(진동이 멈추었을 때를 가정하면 강체로 붓과 같은 조건이다).

목표 x_d 부근에서 Taylor급수 전개하여 고차항을 무시하고 ($z_e = z_d + \delta z$, $\theta = \theta_d + \delta \theta$), 다시 $z \equiv \delta z$, $\theta \equiv \delta \theta$ 라 쓰자.

$$z = J_\theta \theta + J_q q, \quad (7)$$

$$\text{단 } J_\theta = \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]_{\theta = \theta_d, q = 0}, \quad J_\theta \in R^{p \times p}$$

$$J_q = \left[\frac{\partial h}{\partial q} \right]_{\theta = \theta_d, q = 0}, \quad J_q \in R^{p \times (p \times n)}$$

여기에서 J_θ, J_q 는 상수를 요소로 하는 자코비안 행렬로 각각 관절운동과 탄성거동에 관련된다. J_q 는 무한차원의 직사각행렬이고, 벡터 q 는 각각 모드별로 분리하여 직접 측정할 수 없으므로 자코비안 계산뿐만 아니라 완전한 벡터 q 를 추정하는 것도 불가능하다. 제어시 이용할 수 있는 유일한 방법으론 차원 수를 감소시킨 이른바 근사 자코비안 행렬뿐이다. 여기서 적당한 근사 자코비안을 개발하기 위해 (8)로 정의되는 연산자를 도입하도록 하자.

$$z(t) \equiv F[\theta(t)] \quad (8)$$

이것을 앞으로 자코비안 연산자(Jacobian operator)라 부르기로 한다. 이 자코비안 연산자는 다음의 동역학적인 관계를 고찰함으로써 도출되어진 것이다.

진동이란 정역학적 거동이 아니라 동역학적인 운동이다. 다시 말해서, 탄성모드변수 q 는 동역학적인 과정을 통하여 발생됨으로, 기하학의 관계에게만 의존하는 변수 θ 와는 성질이 다르다. 진동은 가속운동에서 관찰되지만, 등속 운동에서는 그다지 발생되지 않는다는 일상적인 경험을 통해서도 이 사실은 잘 이해될 수 있다. 로봇에서의 진동은 강체운동에 수반되는 부차적인 동적 운동으로서 간주되기 때문에, q 는 θ 에 대한 미분 또는 적분을 포함하는 연산자로 다시 표현할 수 있다. 앞 절의 모델설명에서도 밝혔듯이, 방정식(5)의 제2열로부터 이 관계를 확인할 수 있다.

(5)와 (7)을 Laplace변환하여 다음의 표현을 얻을 수 있다.

$$z(s) = F(s)\theta(s), \quad (9a)$$

$$F(s) = J_\theta - s^2 J_q [s^2 R_{22} + sQ + \Omega]^{-1} R_{12}^T \quad (9b)$$

여기에서 $F(s) \in C^{p \times p}$ 는 아래 특징을 가지고 있다.

- 행렬 $F(s)$ 는 proper하며 안정된 극을 갖는 전달함수로 구성되는 행렬이다.

- $F(s)$ 의 제1항 J_θ 은 강체 매니플레이터의 자코비안 행렬에 대응된다.

- $F(s)$ 의 제2항은 탄성 운동의 영향을 나타낸다. 이것은 각 관절의 가속도에 의해 야기된다

(8)의 자코비안 연산자 $F[\theta(t)]$ 는 $F(s)$ 의 시간영역에서의 표현이다. 이제부터 특별한 경우를 제외하고는 자코비안 연산자를 $F\theta = F[\theta(t)]$ 로 표기하도록 한다.

여기서, 앞으로 제어방법의 논의에 도입되는 공역연산자(adjoint operator) F^* 와 이에 관련된 수학을 정의하자[8].

$$\langle y, Fx \rangle = \langle F^*y, x \rangle$$

여기에서 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 아래와 같이 정의되는 L_2 공간에서의 내적(inner product)을 의미한다.

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^\infty f^T(t)g(t) dt, \quad f, g \in L_2$$

그리고 L_2 의 놈(norm)는 다음과 같이 주어진다.

$$\|f\| = \left| \int_0^\infty f^T(t)f(t) dt \right|^{1/2}$$

비슷하게 확장공간 L_{2e} 상의 절사내적(truncated inner product) $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ 와 절사놈 $\|\cdot\|_T$ 을 정의한다. 만약 연산자 F 가 아래를 만족하는 유한 값의 상수 δ, β 가 존재한다면 F 는 유한연산자(finite operator)이다.

$$\|Fg\| \leq \delta \|g\| + \beta, \quad g \in L_2$$

탄성링크 매니플레이터의 F 는 안정된 전달함수를 갖는 행렬이므로 당연히 유한연산자이며, 또 선형연산자이다.

IV. 근사 자코비안 연산자와 외계센서 귀환제어법

전달함수행렬 $F(s)$ 는 부분분수행렬로 나눌 수 있다. 이 부분분수 전달함수행렬에 대응하는 부분연산자를 정의함으로써, 자코비안 연산자 F 또한 부분연산자의 합으로 표현할 수 있다.

만약 우리가 제어하고자하는 모드에 관련되는 설계 자코비안 연산자를 F_c 로, 나머지 모드에 관련되는 잔여연산자를 F_R 이라 한다면 (7)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$z = z_c + z_r, \quad z_c = F_c \theta, \quad z_r = F_R \theta \quad (10)$$

이때, F 는 유한연산자이므로, 부분연산자 F_c, F_R 또한 유한연산자이다. F_c 는, 강체 매니플레이터의 외계센서귀환에서의 자코비안 행렬과 같이 제어기에서 직접 연산하는 근사 자코비안 연산자이고, F_R 은 제어기 속의 연산과 정에서 무시되는 잔여연산자로 간주하자.

만일 $F(s)$ 의 지배적인 유한개 부분전달함수로 구성되는 $F_c(s)$ 를 선택한다면, 대응되는 근사 자코비안 연산자 F_c 는 쉽게 구할 수 있어, 강체 매니플레이터의 외부센서

귀환과 같이 on line 제어입력을 생성시킬 수 있다. 근사 자코비안 연산자는 (7)에서 정의되는 자코비안 행렬과 달리 탄성모드의 근사 설계에 관계없이 $p \times p$ 의 정방행렬이어서 종래의 제어이론과 연결이 용이하며, 안정된 극을 갖는 선형연산자이기 때문에 보다 치밀한 제어가 설계도 가능하다는 특징이 있다.

외계센서 귀환제어기를 강체 매니플레이터의 PD제어기와 유사하게 아래와 같이 설계하도록 하자.

$$u = -F_c^* Kz - G_v \dot{\theta} \quad (11)$$

여기서 F_c^* 는 공역근사자코비안연산자, K, G_v 는 positive definite인 귀환 이득행렬이다. 제1항은 시각센서와 같은 외계센서 위치 귀환, 제2항은 시스템 안정화를 위한 내부 센서귀환 즉 관절속도를 이용한 감쇄항이다.

V. 근사 자코비안 연산자의 선정조건

공역 근사자코비안연산자 F_c^* 는 매니플레이터 운동에 지배적인 전달함수를 고려하여 설계함이 중요하다. 제어기 설계에 있어서 제어계가 목표위치에 도달하기 위해 구비해야 할 최소한의 조건은 다음 lemma로 주어진다. 우선 여기서 이용할 적분연산자를 정의하자.

$$C_1 \equiv C \int_0^t (\cdot) dt, \quad C \equiv F_c^* K \quad (12)$$

단, K : 임의의 상수행렬 (constant matrix)

Lemma. : $C_1 F_R$ 이 유한연산자가 되기 위한 필요충분조건은 F_c 가 J_θ 즉, 강체 매니플레이터의 자코비안 행렬을 포함하는 것이다

증명 : 자코비안 전달함수 (9b)를 다시

$$F(s) = J_\theta + s^2 J_e(s)$$

로 놓자. 여기서 J_θ 은 상수행렬, J_e 는 시스템전달함수로부터 안정된 proper 전달함수 행렬임을 알 수 있다.

1) 필요조건 : 강체 매니플레이터 자코비안을 나누어 $J_\theta = J_c + J_R$ 이라 한다면, $F_c(s) = J_c, F_R(s) = J_R + s^2 J_e$ 가 된다.

$C_1 F_R \theta$ 의 놈을 주파수영역에서 표현하면

$$\| C_1 F_R \theta \|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \theta^*(j\omega) F_R^*(j\omega) C_1^*(j\omega) C_1(j\omega) F_R(j\omega) \theta(j\omega) \} d\omega$$

이 된다. 한편 C_1 은 적분연산자이므로,

$$F_R^*(j\omega) C_1^*(j\omega) C_1(j\omega) F_R(j\omega) = [J_R^T + \omega^2 J_e^T(j\omega)] \frac{K J_c^T J_c K}{\omega^2} [J_R + \omega^2 J_e(j\omega)]$$

이다. 여기서 J_c, J_R 은 상수행렬이므로, 위 식 가운데

$$\frac{J_R^T K J_c^T J_c K J_R}{\omega^2}$$

은 $\omega \rightarrow 0$ 에 대해 무한대가 된다. 따라서 상수행렬을 갖는 $C_1 F_R$ 은 유한연산자가 아니다.

2) 충분조건 : $F_c(s) = J_\theta, F_R(s) = s^2 J_e$ 으로 분해하면,

$F_R(s)$ 또한 안정 프로퍼 전달함수행렬이다.

$$C_1(s) F_R(s) = \left(\frac{J_\theta^T K}{s} \right) (s^2 J_e(s)) = s J_\theta^T K J_e(s)$$

도 안정한 전달함수행렬이 된다. 따라서 유한연산자임을 알 수 있다. F_c 에 탄성모드 부분의 전달함수성분을 포함시켜도 동일한 결과가 얻어진다. ■

이 lemma의 조건은 제어기 설계 시 자코비안 연산자에 강체부분의 자코비안 행렬 J_θ 을 포함시켜야 잔여성분이 유한 값을 갖게 된다는 것을 의미하며, 이것은 다음절에서 논의하는 귀환제어의 안정조건에 중요한 역할을 한다.

VI. 외계센서 위치귀환제어

Theorem : 폐회로시스템의 안정성

운동방정식 (5)과 제어식 (11)에 의해 구성되는 폐회로 시스템에 대해

- 1) $C_1 F_R$ 이 유한연산자,
- 2) $K > 0, G_v > 0$ 라고 하자

이때 충분히 큰 관절속도 이득 G_v 에 대해 시간 $t \rightarrow \infty$ 에서 $z \rightarrow 0, q \rightarrow 0$ 즉, 점근안정이다.

증명 : 다음과 같은 양의 함수를 정의하자.

$$V(t) = \frac{1}{2} \{ x^T R x + q^T \Omega q + z_c^T K z_c \} \geq 0. \quad (13)$$

레제에 따라 V 를 미분하고, (5),(11)을 이용, 정리하면

$$\dot{V} = -q^T Q \dot{q} - \dot{\theta}^T G_v \dot{\theta} - \dot{\theta}^T F_c^* K z_c,$$

을 얻는다. 우측 제3항을 식(12)의 연산자로 바꿔 쓰면

$$= -q^T Q \dot{q} - \dot{\theta}^T G_v \dot{\theta} - \dot{\theta}^T C_1 \dot{z}_c - \dot{\theta}^T F_c^* K z_c(0)$$

가 된다. 여기 $z_c(0)$ 항은 연산자 정의에 따른 적분 초기치를 보상하는 부분이다. 시간 $[0, T]$ 에 대해 적분을 수행하고 (13)의 부등식 관계를 이용하면

$$0 \leq V(T) = V(0) - \int_0^T q^T Q \dot{q} dt - \int_0^T \dot{\theta}^T G_v \dot{\theta} dt - \int_0^T \dot{\theta}^T C_1 F_R \dot{\theta} dt - \int_0^T \dot{\theta}^T C z_c(0) dt$$

를 얻는다. 이것은 확장 L_{2e} 공간에서의 절사내적을 이용하여 다시 쓰면

$$0 \leq V(T) = V(0) - \langle \dot{q}, Q \dot{q} \rangle_T - \langle \dot{\theta}, G_v \dot{\theta} \rangle_T - \langle \dot{\theta}, C_1 F_R \dot{\theta} \rangle_T - \langle \dot{\theta}, C z_c(0) \rangle_T$$

이 되고, 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$\langle \dot{q}, Q \dot{q} \rangle_T + \langle \dot{\theta}, G_v \dot{\theta} \rangle_T \leq V(0) + |\langle \dot{\theta}, C_1 F_R \dot{\theta} \rangle_T| + |\langle \dot{\theta}, C z_c(0) \rangle_T| \quad (14)$$

단 $|\cdot|$ 은 절대값을 의미한다. 한편, 최소고유치 $\delta_1 = \lambda_{\min} Q > 0$, 조건(2)에서 $\delta_2 = \lambda_{\min} G_v > 0$ 이 존재하므로 부등호 좌변 항은 각각

$$\langle \dot{q}, Q \dot{q} \rangle_T \geq \delta_1 \|\dot{q}\|_T^2, \quad \langle \dot{\theta}, G_v \dot{\theta} \rangle_T \geq \delta_2 \|\dot{\theta}\|_T^2$$

가 성립한다. 우변 제2항은 Schwartz의 부등식에서

$$|\langle \dot{\theta}, C_1 F_R \dot{\theta} \rangle_T| \leq \|\dot{\theta}\|_T \|C_1 F_R \dot{\theta}\|_T$$

이며, 또 조건(1) $C_1 F_R$ 의 유한성을 이용하면, 다시

$$\|\dot{\theta}\|_T \|C_1 F_R \dot{\theta}\|_T \leq \delta_3 \|\dot{\theta}\|_T^2 + \beta \|\dot{\theta}\|_T$$

의 관계가 성립하여, 결국

$$|\langle \dot{\theta}, C_1 F_R \dot{\theta} \rangle_T| \leq \delta_3 \|\dot{\theta}\|_T^2 + \beta \|\dot{\theta}\|_T$$

임을 알 수 있다. 마지막으로 우변 제 3항은

$$|\langle \dot{\theta}, C z_c(0) \rangle_T| \leq \|\dot{\theta}\|_T \|F_c^* K z_c(0)\|_T$$

에서, $z_c(0)$ 은 유한 값, K 는 상수행렬, F_c 는 유한 연산자이므로 $\|F_c^* K z_c(0)\|_T$ 는 어떤 상수 값, 따라서

$$|\langle \dot{\theta}, C z_c(0) \rangle_T| \leq c \|\dot{\theta}\|_T$$

이 성립한다. 이상을 종합하면 (14)는

$$\delta_1 \|\dot{q}\|_T^2 + (\delta_2 - \delta_3) \|\dot{\theta}\|_T^2 - (c + \beta) \|\dot{\theta}\|_T \leq V(0)$$

여기서, 귀환이득 G_v 를 충분히 크게 선택한다면 $\delta_2 - \delta_3 > 0$ 를 만족시킬 수 있다.

$$\delta \equiv \delta_2 - \delta_3 > 0, \quad a \equiv \delta^{1/2}, \quad b \equiv (c + \beta) / 2\delta^{1/2}$$

라 놓으면 위의 식은

$$\delta_1 \|\dot{q}\|_T^2 + (a \|\dot{\theta}\|_T - b)^2 \leq V(0) + b^2$$

이 된다. 오른쪽 항은 시간 T 에 의존하지 않기 때문에, 이 관계가 모든 시간 t 에 대해 성립하려면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}(t) = 0$$

이어야 한다. $t \rightarrow \infty$ 에서 이 식이 성립하려면 $\dot{\theta}(t) = 0$, $\dot{q}(t) = 0$ 이 되어야 하므로 (5), (11)의 폐회로 시스템은

$$0 = -F_c^* K z, \quad \Omega q = 0, \quad \text{for } t \rightarrow \infty$$

이 된다. 한편 F_c^* 는 선형 연산자, $K > 0, \Omega > 0$, 따라서 $t \rightarrow \infty$ 에서 $z = 0, q = 0$ 가 성립한다. ■

여기에서 고찰한 제어기는 근사 자코비안 연산자, 센서와 액추에이터는 서로 격리된 noncollocation임에도 불구하고 정리의 간단한 조건만을 만족시킨다면 시스템의 안정성이 보장된다는 사실을 시사하고 있다. 물론 폐회로 시스템의 안정성은 관절속도 귀환 항과 링크내부의 구조 감쇄 항에 의존하고 있기는 하지만, 근사 자코비안 연산자의 선형영부에 의해 제어성능 향상도 가능하다.

Corollary 1 : 강제 자코비안 행렬을 이용하는 PD 제어기를,

$$u = -J_\theta^T K z - G_v \dot{\theta}, \quad K > 0, \quad G_v > 0 \quad (15)$$

로 설계하였을 때, 충분히 큰 속도이득에 대하여 폐회로 시스템은 점근 안정이다.

증명 : 공역 근사자코비안연산자 $F_c^* = J_\theta^T$ 이므로

lemma를 만족, 즉 정리 1의 모든 조건이 만족된다. 따라서 시스템은 점근안정이다. ■

공역 근사 자코비안 연산자로 전치 자코비안 행렬을 채용하는 제어기는 아주 간단하면서도 안정된 시스템이 실현된다. 산업용 매니플레이터는 사실상 완전한 강체가 아니며 탄성적 특성을 갖지만 외부센서 귀환제어가 별 문제가 되지 않았던 이유가 이로서 확인된다. 단 시스템 안정성의 본질은 속도귀환항과 링크내부의 구조감쇄항에 의존하고 있어 진동특성의 개선효과를 기대하기는 힘들다. 그럼에도 불구하고 이 제어방법은 자코비안 행렬의 무한차원 문제와 noncollocation제어문제를 해결하면서 시스템안정성을 보장하고 있다는 점에 주목할 필요가 있다.

VII. 탄성매니플레이터의 Compliance 제어

매니플레이터의 end effector가 어떤 작업대상 물체와 접촉하는 작업 즉 연삭 등을 행할 때, 그 대상표면이 거칠더라도 충격력을 흡수하기 쉬운 탄성링크로봇이 강체로봇보다 유리하다. 이때의 접촉력을 compliance제어기로 제어할 수 있다. end effector에 힘 센서를 장착한다면 noncollocation이 되지만, 이때의 안정성은 다음과 같이 보장될 수 있다.

Corollary 2 : 힘센서에 의해 compliance제어를 수행하는 제어기를

$$u = -J_\theta^T [f - f_d] - G_v \dot{\theta}, \quad G_v > 0 \quad (16)$$

로 설계한다면, 충분히 큰 속도이득에 대하여 폐회로 시스템은 점근 안정이다. 단 f :힘의 측정치, f_d :목표치.

증명 : $f_d = 0$ 이라고 하여도 일반성을 잃지 않는다. 힘은 compliance로서 $f = Kz$ 라고 표현된다. K 는 스프링 상수의 역수를 계수로 하는 행렬이므로 $K > 0$ 이 성립한다. 이것을 (16)에 대입하면 Corollary.1과 동일한 형식이다.

따라서 점근안정이다. ■

VIII. 실험에 의한 고찰

수평면상에서 운동하는 탄성 2링크 매니플레이터로 외부시각센서의 귀환제어 효과를 실험하였다.(그림 1) 각 링크는 인칭동 재질의 가늘고 긴 빔으로, 수평 방향이 유연하도록 설계하였다.

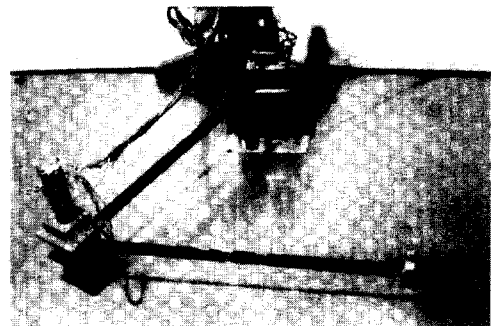


그림 2. 1. 세장형 2링크 매니플레이터.
Fig 2. 1. A slender two link manipulator.

표 1. 매니플레이터의 물리특성.

Table 1. Physical parameters of the manipulator.

	Link 1	Link 2
material	phosphor bronze	phosphor bronze
length [mm]	585	585
cross section [mm×mm]	28×4	28×3
Young's modulus [GPa]	0.45	0.44
I_z inertia moment [mm ⁴]	149	63
I_y inertia moment	7317	5488
J inertia moment	2173	687
mass included joint [kg]	0.59	0.44
payload [kg]	-	0.14

각 관절에는 감속기일체형 DC 서보 모터 (Harmonic Driver사제)를 장착하였고 end effector의 위치는 PSH (position sensing head) 카메라로 측정하였다. 제어 시스템의 블록선도는 그림 3에 나타내었다.

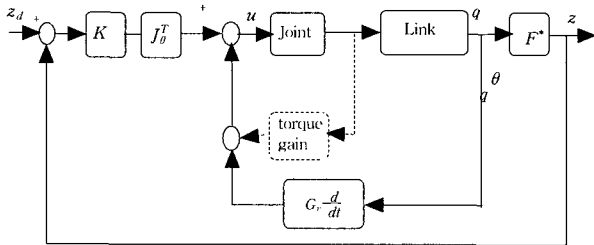
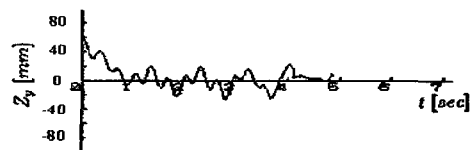


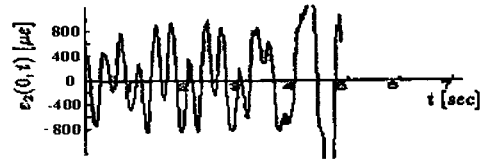
그림 3. 제어회로의 개념적인 블록선도.

Fig. 3. Conceptual block diagram of control loop.

그림 4,5,6의 (a)는 카메라로 측정된 작업공간 z_x, z_y 에 대한 시간 궤적이며, (b)는 링크 뿌리부분에서의 토오크 (strain gauge로 측정)신호이다. 이론검증을 위해 근사 자코비안 연산자로 강체의 자코비안 행렬 ($F_c^* = J_\theta^T$)을 이용한 PD실험을 행하였다. 제어가 (15)를 적용하여, 관절 속도이득을 낮게 설정한 경우, end effector 위치는 그림 3과 같이 약 1Hz와 3Hz의 연성진동이 발산하고 있다. 속도이득이 커지면 그림 4와 같이 시스템이 안정된다. 이 실험으로부터 Corollary.1의 결과가 정당하다는 것을 확인할 수 있다. 그러나 진동 억제가 효과적이지는 못하다. 탄성 1차모드의 전달함수를 고려한 근사 자코비안을 선정함이



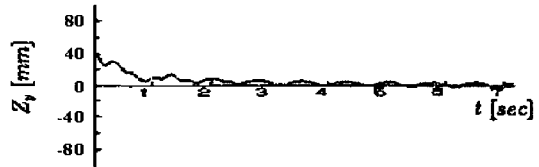
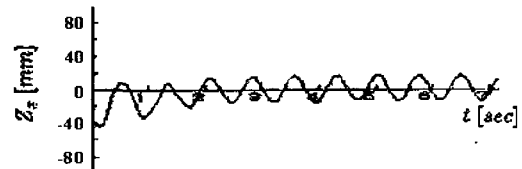
(a) Z_x, Z_y trajectories of end effector



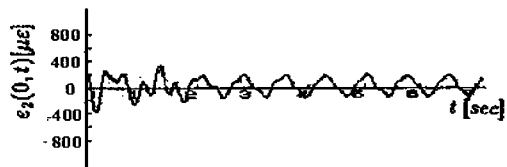
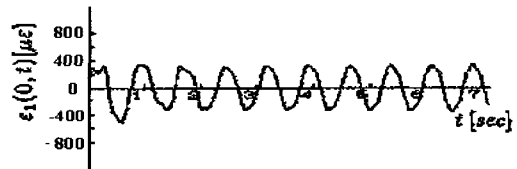
(b) strain signals at joint 1 & joint 2

그림 4. 근사 자코비안 J_θ^T 를 이용한 PD제어실험결과(속도이득이득 작을 경우).

Fig. 4. Experimental results of PD control with approximated operator J_θ^T : low velocity gain ($K = \text{diag}\{600, 2500\}, G_v = \text{diag}\{100, 40\}$).



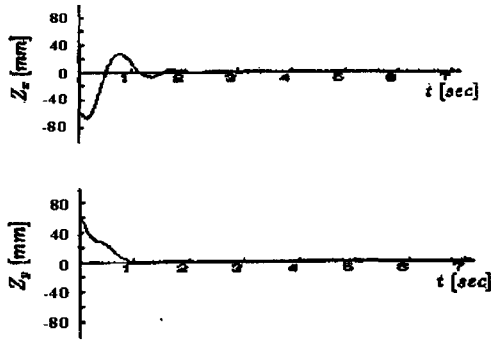
(a) Z_x, Z_y trajectories of end effector



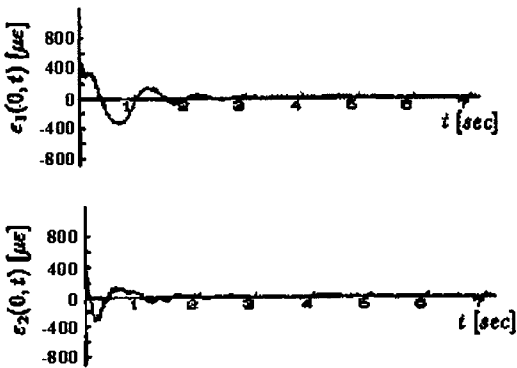
(b) strain signals at joint 1 & joint 2

그림 5. 근사 자코비안 J_θ^T 를 이용한 PD제어실험결과(속도이득이득 클 경우).

Fig. 5. Experimental results of PD control with approximated operator J_θ^T : high velocity gain ($K = \text{diag}\{600, 2500\}, G_v = \text{diag}\{140, 50\}$).



(a) Z_x, Z_y trajectories of end effector



(b) strain signals at joint 1 & joint 2

그림 6. 근사 자코비안 J_0^T 를 이용한 PD제어와 collocate 된 strain신호귀환을 추가한 실험결과.

Fig. 6. Experimental results of PD control with approximated operator J_0^T and collocated strain feedback ($K = \text{diag}\{600, 2500\}$, $G_v = \text{diag}\{100, 40\}$, Strain gain = $\text{diag}\{65, 40\}$).

바람직하지만, 이 실험에서는 관절모터와 collocate된 strain센서의 토오크 신호 귀환제어를 덧붙여 진동억제 효과를 얻었다(그림 6). 이것은 Corollary 2의 활용가능성을 입증하는 실험의 하나이기도 하다.

IX. 결론

탄성링크 로봇의 시각서보제어는 로봇뿐만 아니라 표면 실장기, 자동제어기기의 외부센서제어 등 정밀제어방식으로서 폭넓은 응용이 기대된다. 본 논문에서는 링크의 탄성

이 수반될 때의 자코비안 행렬의 무한차원문제와, 센서와 액츄에이터가 떨어져 있음으로서 발생될 우려가 있는 불안정문제를 다루었다. 자코비안 행렬의 무한차원문제는 강체운동과 탄성운동간의 동력학적 간섭을 고찰함으로써, 자코비안 연산자를 정의하여, 근사 자코비안 연산자라도 안정된 제어가 가능하다는 점을 이론적으로 해명하였다. 더불어 산업용 매니플레이터(사실상 완전한 강체가 아니므로 탄성적 특성을 갖고 있음)의 외부센서 귀환제어가 별 문제가 되지 않았던 이유 또한 해명하였다. 작업좌표계 목표에 대한 위치제어 시, 강체로 간주한 자코비안 행렬을 근사 자코비안 연산자로 선택함으로써 안정된 제어가 가능하다는 점을 이론과 실험을 통해서도 확인하였다. 관절에 탄성이 있을 경우, 비선형 문제(예를 들어, 축계의 비선형 마찰, 히스테리시스 등)가 없다면, 수학적으로는 동일한 문제로 귀착되기 때문에 이 결과가 적용될 수 있다.

참고문헌

- [1] M. Takegaki, and S. Arimoto. "A new feedback method for dynamic control of manipulators", *Trans. ASME. J. of DSMC*, vol. 103, pp. 119-125, 1981.
- [2] H. G. Lee, H. Kanoh, S. Kawamura, F. Miyazaki, and S. Arimoto: "Distributed parameter systems: Modeling and simulation", *Elsevier Science Publishers B.V.*, pp. 345-352, 1989.
- [3] H. G. Lee, F. Miyazaki, and S. Arimoto: "PDS control of flexible Multi-Link manipulators", *SICE*, vol. 33, pp. 479-486, 1989.
- [4] S. M. Joshi: "Robustness properties of collocated controllers for flexible spacecraft". *J. of Guidance*, vol. 9, no. 1, pp. 85-91, 1986.
- [5] F. Matsuno: "Mechanical softness: Link flexibility" *J. of Robotics Society of Japan*, vol. 17, no. 6, pp. 778-781, 1999.
- [6] T. Yoshikawa, Hosota: "A modeling of flexible arms using virtual rigid links and unactuated joints", *SICE*, vol. 27, no. 12, pp. 1389-1395, 1991.
- [7] H. B. Hablani: "Constrained and unconstrained model: Some modeling aspect of flexible spacecraft", *J. of Guidance and Control*, vol. 5, no. 2, 1982.
- [8] M. Vidyasagar: *Input and Output Analysis of Large-Scale Interconnected Systems*, Springer-Verlag, 1981.
- [9] Meirovich: *Analytical Method in Vibrations*, The Macmillan Company, 3rd printing, 1971.



이 호 길
 1980년 한양대 기계공학과 졸업. 현대 정공근무. 오사카대학 대학원 석사(1986), 동대학 박사(1989). 일본고도기술연구소근무. 1991년~현재 생산기술연구원 수석연구원. 관심분야 로봇제어 및 응용기술, 산업용통신, VR.



김 진 영
 1991년 성균대 기계설계학과 졸업. 1992년~현재 동대학원 대학원 석사과정. 생산기술연구원 연구원. 관심분야 로봇응용기술, 동작인식, VR.