

확률적 견실특성을 고려한 고유구조 지정기법

Eigenstructure Assignment Methodology Considering Stochastic Robustness Characteristics

서 영 봉, 최 재 원

(Young Bong Seo and Jae Weon Choi)

Abstract : In this paper, we present a method that has flexibility of exact assignment of eigenstructure with the stochastic robustness for LTI (Linear Time-Invariant) systems. The stochastic robustness of LTI systems is determined by the probability distributions of closed-loop eigenvalues. The probabilistic stability region is presented stochastically using the Monte Carlo evaluations. The proposed scheme is applied to designing a simple system and a flight control system with stochastic parameter variations to confirm the usefulness of the scheme.

Keywords: eigenstructure assignment, probabilistic stability hegion, stochastic parameter variations, probability of instability

I. 서론

고유구조 지정기법은 페루프 다변수 시스템의 고유치 및 고유벡터를 일정한 위치 및 방향을 갖도록 지정할 수 있으므로, 비행체 또는 특별히 요구되는 물리적 특성을 보유한 페루프 시스템 설계시 페루프 시스템의 응답특성을 임의로 바꿀 수 있는 장점이 있다[1][2]. 그러나, 페루프 시스템의 주파수역 성능이나 견실성을 설계시에 직접 고려할 수 없는 구조이기 때문에 지금까지 큰 단점으로 인식되어 왔다[3]. 이와 같은 단점을 해결하기 위해서 고유구조 지정기법의 특성을 살리면서 요구되는 견실성을 보장하기 위한 연구가 진행되어 왔다.

페루프 시스템이 안정한 고유치를 가지는 경우에도 시스템 내부의 파라미터 변동이나 외부의 외란에 의해 불안정해질 수 있으므로, 파라미터 변동에 대한 고유치 민감도(eigenvalue sensitivity) 문제는 견실성을 해석하는데 있어서 중요한 요소이다[4]. 고유치 민감도는 비행체 제어 시스템의 경우 비행체의 안정성과 제어입력의 변동에 따른 고유치의 변화를 나타낸다[3]. Wilson 등[5]은 Lyapunov 방정식과 고유구조 방정식의 구속조건 하에서 원하는 고유구조와 실제 얻게 되는 페루프 시스템의 고유구조 사이의 오차를 최소화하는 방법을 제시하였다. 그리고 Sobel 등[6]과 Yu 등[7]은 시스템의 파라미터에 변동항이 존재할 때 페루프 시스템의 고유치의 실수부, 우 고유벡터 및 좌 고유벡터를 이용하여 시스템을 안정화시킬 수 있는 제어이득에 대한 충분조건을 제시하였다. 시스템의 특이값 민감도(singular value sensitivity)[8]나 고유벡터의 미분값[9]을 이용하여 고유구조 지정기법의 견실성을 확보하기 위한 연구도 수행되었다. 한편, H_{∞} 제어기법을 이용하여 주파수역에서 페루프 시스템의 감도 함수의 결합형태로 표시되는 견실성능지수를 고려하여 견실 고유구조 지정기

법 문제에서 광역 최적해를 찾는 문제[10][11]와 LQR의 성능지수 함수의 가중행렬을 적절히 선택함으로써 최적해가 성능지수를 최소화할 뿐 아니라 페루프 시스템의 고유구조 정보를 미리 정한 임의의 위치들로 지정하여 고유구조 지정기법에 LQR의 견실성능을 이용하고자 하는 연구[12]-[15]가 진행되고 있다. 그러나, 이러한 연구들은 모두 확정적인(deterministic) 견실성능을 확보하기 위한 접근 방법들이므로 시스템의 파라미터 변동이 확률적으로 주어지는 경우에 각각의 접근방법이 보장하는 견실성능과 안정성을 보장할 수 없다[16].

실제로 시스템의 불완전한 수학적 모델에 대하여 파라미터의 변화가 확정적으로 정해지지 않기 때문에, 모델링된 시스템의 수학적 모델에는 많은 불확정(uncertainty) 요소가 존재한다. 또한, 준 시스템에 대하여 되먹임 제어가 설계되었을 때 측정장치의 출력이 단지 신호(signal)의 형태로 제어기에 대한 입력으로 사용되는데, 이것은 센서(sensor) 정보의 부정확성과 잡음에 의한 교란 때문에 확정적으로 이용가능하지 않으므로 확률적인 접근방법이 요구된다. Stengel [17]은 파라미터의 확률적 변동(stochastic parameter vaiations)이 있는 시스템의 안정성 보장에 대한 문제를 불안정성 확률(probability of instability)의 개념을 제안하여 다루었으며, Stengel과 Ray[18]는 Monte Carlo 시뮬레이션을 통하여 이것을 도식적으로 나타내었다. 페루프 고유치들의 확률적 분포는 플랜트 동역학 모델에서 변동 파라미터들의 통계적 정보를 나타내기 때문에, 불안정성 확률은 페루프 고유치들의 확률적 분포를 이용하여 선형 시불변시스템의 견실성을 확률적으로 다룰 수 있는 특성을 제공한다. 즉, 복소평면(complex plane)의 좌반(left-half)에 분포하게 되는 모든 고유치들의 확률이 견실성에 대한 척도가 된다. Ray[16]는 불확정 파라미터와 불확정 구동기 및 센서 동역학을 가진 1/4 자동차 모델에 대하여 견실 확률적-최적 제어 법칙을 적용하여 안정도-견실성을 해석하였다. 그러나, 불안정성 확률의 개념이 페루프 고유치들의 확률적 분포를 이용하

접수일자 : 1999. 12. 6., 수정완료 : 2000. 7. 4.

서영봉 : 부산대학교 기계공학부

최재원 : 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

는 것이므로 기존의 확률적-최적 제어법칙을 적용하게 되면 불안정성 확률이 계속 남아있는 문제가 존재하게 된다.

이 경우 고유구조 지정기법을 이용하면 페루프 고유치들을 임의로 지정할 수 있으므로 시스템의 불안정성 확률을 바로 고려할 수 있고, 고유치 민감도를 최소화하는 고유벡터를 지정함으로써 파라미터의 확률적 변동에 덜 민감한 제어기를 설계할 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 시스템 파라미터의 확률적 변동에 대하여 견실성의 정도를 확률적으로 보장할 수 있는 고유구조 지정기법을 제시하고자 한다. 제안한 알고리즘은 Monte Carlo 시뮬레이션을 통하여 검증된다. 마지막으로, 간단한 예제시스템과 비행 제어 시스템의 예제들을 통하여 본 논문에서 제안한 제어기법의 설계과정을 살펴보고, 유용성 및 타당성을 고찰한다.

II. 파라미터의 확률적 변동에 따른 불안정성 확률

파라미터의 확률적 변동에 따른 시스템의 불안정성 확률 문제를 본 논문에서는 확률적 견실성(stochastic robustness) 문제로 정의하고, 이 문제를 다루기 위하여 Stengel과 Ray[18]에 의해서 제시된 불안정성의 개념을 도입한다. 즉, 선형 시불변 시스템의 확률적 견실성은 페루프 시스템의 고유치의 확률 분포를 이용하여 나타내는 것이 가능하다. 모든 고유치들이 s 평면의 좌반에 분포할 확률이 견실성의 척도가 된다.

다음과 같은 파라미터가 확률적인 변동을 갖는 선형 시불변시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t) + B(p)u(t) \tag{1}$$

$$u(t) = -Kx(t) \tag{2}$$

여기서, $x(t)$, $u(t)$, p 는 각각 n , m , q 차원의 상태변수, 제어입력 그리고 파라미터 벡터이고, A 와 B 는 임의의 확률 파라미터 변동 p 의 함수로서 각각 시스템행렬 및 입력행렬이다. K 는 $(m \times n)$ 차원의 되먹임 이득행렬로서 파라미터 벡터에 의해 변동하는 $A(p)$ 와 $B(p)$ 의 공칭시스템을 이용하여 설계되고, 실제로 시스템은 변수 p 에 의존한다.

공칭 페루프 시스템과 확률적인 파라미터 변동이 있는 페루프 시스템의 n 개의 고유치를 각각 실수와 허수 부분으로 다음과 같이 나눈다.

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sigma_i + j\omega_i \\ \hat{\lambda} &= (\sigma_i + \Delta\sigma_i) + j(\omega_i + \Delta\omega_i), \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \tag{3}$$

시스템의 안정성을 조사하기 위해서는 s 평면의 좌반의 모든 근을 조사하고, 불안정성은 s 평면의 우반의 모든 근을 조사함으로써 그 확률은 다음과 같이 표현할 수 있다 [18].

$$P(\text{instability}) = 1 - \int_{-\infty}^0 \text{pr}(\sigma + \Delta\sigma) d\sigma \tag{4}$$

여기서, $\text{pr}(\sigma + \Delta\sigma)$ 는 해석적으로는 알려져 있지 않은 $\sigma + \Delta\sigma$ 의 결합(joint) 확률밀도함수(probability density function)이고, 적분은 $\sigma + \Delta\sigma$ 의 독립적인 요소들의 공간

에서 계산된 안정성의 확률로서 정의된다. $\text{pr}(p)$ 는 p 의 확률 밀도 함수를 나타내고, $p_j, j=1, \dots, \epsilon$ 의 각 요소에 대하여 ϵ 번의 계산을 통해 확률 변수를 생성한다. 안정성 확률의 정확도는 Monte Carlo 시뮬레이션 횟수 ϵ 이 커질수록 정확해진다.

$$\int_{-\infty}^0 \text{pr}(\sigma + \Delta\sigma) d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{N(\max(\sigma + \Delta\sigma) \leq 0)}{\epsilon} \tag{5}$$

여기서, $N(\cdot)$ 은 $\sigma + \Delta\sigma$ 의 모든 요소가 0보다 작거나 같은 경우의 수를 나타내고, $\max(\sigma + \Delta\sigma) \leq 0$ 는 $\sigma + \Delta\sigma$ 의 가장 큰 실수 고유치 요소를 나타낸다. 불안정성을 작게 하기 위해서는 P 가 최대한 작도록 제어기를 설계한다. 고유구조 지정기법을 이용하면 모든 고유치를 임의로 지정할 수 있는 장점이 있으므로 여기서는 $P=0$ 을 설계사양으로 설정하여도 그 설계목적은 만족시킬 수 있다.

III. 확률적 견실성을 고려한 고유구조 지정 방법

1. 확률적 안정반경의 설정

파라미터의 확률적 변동을 가진 시스템에 대하여 고유구조 지정기법을 적용하기 위해서는 준 시스템의 파라미터의 확률적 변동과 고유치 및 고유벡터가 가지는 확률적 견실성과의 상호관계를 규명해야 한다. 우선, 확률적 파라미터 변동이 시스템의 안정성에 미치는 영향을 해석하기 위하여 (1)의 준 시스템을 다음과 같이 공칭시스템과 섭동항으로 분리한다.

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(p))x(t) + (B + \Delta B(p))u(t) \tag{6}$$

여기서, $A = E[A(p)]$, $B = E[B(p)]$ 를 나타내며, $E[\cdot]$ 는 ‘ \cdot ’의 확률 파라미터 변동에 의한 행렬 요소 각각에 대한 크기 변화의 평균값을 의미한다.

(6)에 제어입력 (2)가 인가되면 페루프 시스템은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \{(A + \Delta A(p)) - (B + \Delta B(p))K\}x(t) \\ &\triangleq (A_c + E(p))x(t) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $A_c = A - BK$ 와 $E(p) = \Delta A(p) - \Delta B(p)K$ 는 각각 공칭 페루프 시스템과 페루프 섭동항이며, A_c 는 공칭 페루프 시스템의 우 고유벡터로 이루어진 우 모드행렬(modal matrix) Φ 와 대응하는 페루프 고유치 행렬 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 를 이용하여 $\Phi^{-1}A\Phi$ 의 형태로 대각화(diagonalize)가 가능한 행렬이다[19].

λ_i 를 A_c 의 고유치라고 하면 공칭 페루프 시스템의 일반화된 고유치 문제는 다음과 같이 된다.

$$(\lambda_i I - A_c)\Phi = 0 \tag{8}$$

또한, $\Phi^{-1}(A_c + E(p))\Phi = \Lambda + \Phi^{-1}E(p)\Phi$ 이다.

$A_c + E(p)$ 의 고유치를 $\hat{\lambda}$ 이라고 했을 때, $\Lambda + \Phi^{-1}E(p)\Phi$ 의 고유치가 $\hat{\lambda}$ 이므로 $\hat{\lambda}I - \Lambda - \Phi^{-1}E(p)\Phi$ 는 특이(singular) 행렬이다. $\hat{\lambda}I - \Lambda$ 가 특이 행렬이면 $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq \|\Phi\| \|\Phi^{-1}\| \|E(p)\|$ 가 되는 것을 쉽게 보일 수 있으므로, $\hat{\lambda}I - \Lambda$ 를 비특이(nonsingular) 행렬로 가정하자. 이

경우, 다음 행렬은 특이이다.

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A - \Phi^{-1}E(p)\Phi) = I - (\lambda I - A)^{-1}\Phi^{-1}E(p)\Phi \quad (9)$$

다음 정리는 행렬 놈(norm)의 가역성(invertibility)에 관한 것으로 행렬 놈의 크기에 대한 한계(bound)를 제공한다.

정리 1 : $\|\cdot\|$ 가 행렬 놈이라고 하고, $\|A\| < 1$ 이면, $I - A$ 가 가역(invertible)이고 다음 조건을 만족한다.

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

증명 : 만약 $\|A\| < 1$ 이면, 급수(series) $\sum z^k$ 의 수렴 반경(convergence radius)이 1이기 때문에, 급수 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 는 어떤 행렬 C 로 수렴한다. 그런데, $N \rightarrow \infty$ 에 따라서 $(I - A) \sum_{k=0}^N A^k = (I - A)(I + A + \dots + A^N) = I + A^{N+1} \rightarrow I$ 이다. 따라서, $C = (I - A)^{-1}$ 이다. ■

Φ 에 대한 행렬 놈, $\|\Phi\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |\phi_{ij}|^2 \right)^{1/2}$, 을 먼저 정의한다.

정리 1에 따르면 $\|(\lambda I - A)^{-1}\Phi^{-1}E(p)\Phi\| < 1$ 이면, $I - (\lambda I - A)^{-1}\Phi^{-1}E(p)\Phi$ 가 가역이다. 그러나, (9)는 특이행렬로 가역이 아니므로 $\|(\lambda I - A)^{-1}\Phi^{-1}E(p)\Phi\| \geq 1$ 이다. 따라서, 약수(sub multiplicative) 부등식과 대각행렬에 대한 행렬 놈의 특성을 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|(\lambda I - A)^{-1}\Phi^{-1}E(p)\Phi\| \\ &\leq \|\Phi^{-1}E(p)\Phi\| \|(\lambda I - A)^{-1}\| \\ &= \|\Phi^{-1}E(p)\Phi\| \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda - \lambda_i|^{-1} \\ &= \frac{\|\Phi^{-1}E(p)\Phi\|}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda - \lambda_i|} \end{aligned}$$

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq n} |\lambda - \lambda_i| &\leq \|\Phi^{-1}E(p)\Phi\| \\ &\leq \|\Phi^{-1}\| \|\Phi\| \|E(p)\| \quad (10) \\ &= k(\Phi) \|E(p)\| \end{aligned}$$

여기서, $k(\cdot)$ 는 행렬 놈 $\|\cdot\|$ 에 대한 조건수(condition number)이다. 이러한 관계들로부터, 공칭 페루프 시스템의 고유치와 확률 파라미터 변동향을 가진 페루프 시스템의 고유치는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$|\lambda - \lambda_i| \leq \|\Phi\| \|\Phi^{-1}\| \|E(p)\| = k(\Phi) \|E(p)\| \quad (11)$$

이와 같은 관계를 도식적으로 표현하기 위해서 s 평면의 실수 부분과 허수 부분을 축으로 하고, 공칭 페루프 시스템 고유치 λ_i 의 실수 부분과 허수 부분을 중심으로 하면 확률 파라미터 변동을 가진 시스템의 페루프 고유치 λ 는 반경 $k(\Phi) \|E(p)\|$ 의 원(disk) 안에 존재하게 된다. 반경 $k(\Phi) \|E(p)\|$ 와 이것으로 만들어지는 원을 각각 확률적 안정반경(probabilistic stability radius)과 확률적 안정영역(probabilistic stability region)으로 정의하면, 확률 파라미터 변동의 크기가 클수록 혹은 조건수가 클수록 확률적 안정반경이 커지게 되고 확률 파라미터 변동에 의한 고유치가 불안정할 가능성이 커진다. 이 때, 확률적 안정영역을

좌측으로 이동시켜 안정성을 만족하도록 페루프 시스템의 고유치를 지정하거나, 준 시스템이 파라미터 변동에 견실하도록 고유벡터를 지정하여 고유치 민감도를 작게 하는 것이 제어목적이 된다. 두 가지 제어목적은 동시에 이루기 위해서는 먼저 고유치 민감도를 최소화하는 고유벡터를 지정해서 확률적 안정반경을 최소화하고, 최소화된 확률적 안정영역이 s 평면의 우반에 존재하지 않도록 원하는 고유치를 선정하여 지정하여야 한다.

2. 고유벡터에 따른 고유치 민감도 최소화 문제

페루프 시스템이 안정한 고유치를 가지는 경우에도 파라미터 변동에 의하여 그 시스템이 불안정해질 수 있다. 만약 파라미터 변동이 있다고 하더라도 민감도가 작으면 같은 제어입력이 사용된 경우에도 민감도가 큰 경우에 비하여 안정하지 않을 확률은 상대적으로 작아진다. 이러한 관점에서 파라미터 변동에 대한 페루프 시스템의 고유치 민감도는 견실성에 대단히 중요하다.

파라미터 변동에 대하여 견실한 제어를 설계하기 위하여 기존의 고유구조 지정기법의 성능지수를 수정하여 고유치 민감도를 최소화하는 고유벡터를 지정하도록 한다.

(8)에 기술된 우 모드행렬과 이에 대응하는 좌 모드행렬을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \Phi &= [\phi_1, \dots, \phi_n] \\ \Psi &= [\psi_1, \dots, \psi_n] \triangleq \Phi^{-H} \end{aligned}$$

여기서, ' H '는 공액전치(conjugate transpose) 연산자이다.

$\Psi^H \Phi = I$ 로부터 $\phi_i^T \phi_i = 1$ 이고, $\phi_i^T A_c \phi = \lambda_i$ 이다. A_c 의 (j, k) 번째 요소를 a_{jk} 라고 하고, 고유치를 a_{jk} 에 대해서 각각 미분하면 다음 식이 성립한다[4].

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{jk}} = \frac{\partial \phi_i^H}{\partial a_{jk}} A_c \phi_i + \phi_i^H \frac{\partial A_c}{\partial a_{jk}} \phi_i + \phi_i^H A_c \frac{\partial \phi_i}{\partial a_{jk}}, \quad \forall i \quad (12)$$

$$\phi_i^T \phi_i = 1 \text{로부터 } \frac{\partial \phi_i^H}{\partial a_{jk}} \phi_i + \phi_i^H \frac{\partial \phi_i}{\partial a_{jk}} = 0 \text{가 성립한다. 그}$$

리고, $A_c \phi_i = \lambda_i \phi_i$ 와 $\phi_i^H A_c = \lambda_i \phi_i^H$ 를 이용하면, (12)는 다음과 같이 간략화될 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{jk}} = \phi_i^H \frac{\partial A_c}{\partial a_{jk}} \phi_i, \quad \forall i \quad (13)$$

그러므로, 다음 식이 만족한다.

$$\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_c} \right)^T = \Phi \Psi^H, \quad \forall i \quad (14)$$

행렬 놈을 이용하면 고유치 민감도는 다음과 같이 된다.

$$S(\lambda) = \|\Phi\| \|\Psi^H\| \quad (15)$$

(11)과 (15)에서 고유벡터 조건수 및 고유치 민감도를 최소화하는 공칭 시스템의 우 고유벡터는 다음과 같은 성능지수의 최소화 과정을 통하여 얻어진다.

$$\begin{aligned} J &= \|\Phi_a^{-1} \Phi_{aug}^b \bar{p}_i - I\|^2 \\ &= \|U^{-1} \Phi_{aug}^b \bar{p}_i - I\|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, U 와 \bar{p}_i 는 각각 일원행렬(unitary)과 선형조합계수 벡터를 나타낸다. Φ_{aug}^a 는 확장된 우 모드 행렬로서 다음과 같은 행렬 $[\lambda_i I_N - A_c \mid B]$ 의 영공간(null space)으로 구성되는 열공간(column space)의 일부인 부분행렬 N_{λ_i} 로부터 생성되는 열공간에 속해야만 한다는 제약을 가지고 있다[14].

$$[\lambda_i I_N - A_c \mid B] \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ - \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

참고문헌 [14]에 따라 ($n \times mn$)차원의 확장된 우 모드행렬 Φ_{aug}^a 는 다음과 같이 구성된다.

$$\Phi_{aug}^a = [N_{\lambda_1}, N_{\lambda_2}, \dots, N_{\lambda_i}, \dots, N_{\lambda_n}] \quad (18)$$

그리고, (16)의 정의되는 성능지표 함수를 최소화하도록 선택하게 되면 요구되는 우고유구조를 최적으로 성취하게 된다. (16)과 같이 주어지는 성능지표 함수의 최소화 문제는 요구되는 우 모드행렬 $\Phi^d = \Phi_{aug}^a \bar{p}_i$ 를 만족하게 하는 선형조합계수 \bar{p}_i 를 해석적으로 구하는 문제가 된다. \bar{p}_i 에 대해 J 를 미분하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dJ}{d\bar{p}_i} = 2(U^{-1} \Phi_{aug}^a)^T (U^{-1} \Phi_{aug}^b \bar{p}_i - I) \quad (19)$$

다음으로 $dJ/d\bar{p}_i = 0$ 을 적용하면 \bar{p}_i 는 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{p}_i = \{(U^{-1} \Phi_{aug}^a)^T (U^{-1} \Phi_{aug}^b)\}^{-1} (U^{-1} \Phi_{aug}^b)^T \quad (20)$$

따라서, 획득가능한 우 고유벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_i^a = \Phi_{aug}^a \{(U^{-1} \Phi_{aug}^b)^T (U^{-1} \Phi_{aug}^b)\}^{-1} (U^{-1} \Phi_{aug}^b)^T \quad (21)$$

3. 원하는 고유치의 선정 및 지정

폐루프 시스템의 우 고유벡터가 3장의 2절에 기술된 방법에 따라 구해졌다면, 이 경우 폐루프 시스템의 확률적 안정반경은 최소가 된다. 그러나, 폐루프 시스템의 고유치가 허수축에 너무 가깝거나 확률적 안정영역이 허수축을 포함하게 되면 불안정성 확률이 크게 된다. 즉, 확률적 견실성이 작아져서 폐루프 시스템이 불안정하게 될 가능성이 커진다. 그런데 고유구조 지정기법을 사용하여 제어를 설계하는 경우에 원하는 폐루프 고유치는 정확하게 지정할 수 있으므로, 확률적 견실성을 크게 하는 고유치를 선정하여 폐루프 시스템이 안정할 확률을 크게 만들 수 있다.

3장의 1절에서 정의한 확률적 안정반경과 원하는 폐루프 고유치와의 관계를 이용하여 폐루프 시스템이 안정하게 될 새로운 원하는 고유치를 선정하기 위해서 다음 식을 정의한다.

$$\delta_s = -\min |k(\Phi)||E(p)|| - \text{real}(\lambda) \quad (22)$$

여기서, $\min|\cdot|$ 은 '·'의 가장 작은 절대값, $\text{real}(\cdot)$ 은 '·'의 실수값을 나타내고, δ_s 는 새로운 원하는 고유치를 선정하기 위하여 갱신될 변수로서 사용된다. $\text{real}(\lambda)$ 가

$k(\Phi)||E(p)||$ 보다 큰 경우는 불안정해질 가능성이 아주 작으므로 갱신하지 않고, 반대의 경우 즉, 허수축에 가장 가까운 불안정해지기 쉬운 고유치들을 새로운 고유치로 다음과 같이 갱신한다.

$$\lambda^{nd} = \lambda^{od} + \delta_s \quad (23)$$

여기서, λ^{nd} 와 λ^{od} 는 각각 새로 선정된 원하는 고유치와 이전에 선정된 원하는 고유치를 나타낸다. 이렇게 선정된 원하는 고유치는 3장의 2절에서 최소화된 확률적 안정반경을 δ_s 만큼 좌측으로 이동시켜 불안정성 확률이 최소가 되도록 만든다.

그런데 페루프 시스템의 고유치를 $-\infty$ 로 보내는 경우, 이득의 크기가 ∞ 가 되는 결과를 가져온다. 즉, 파라미터 변동이 있는 페루프 시스템의 섭동항의 크기가 무한대가 되어버리므로 λ_i 의 한계는 이득 K 의 크기에 의해 제한되는 것을 알 수 있다. 이 관계를 3장의 1의 결과를 이용하여 유도하면 개루프 고유치와 공칭 페루프 고유치와의 관계를 이끌어낼 수 있다. 즉, 이득의 크기를 제한하였을 때 지정할 수 있는 공칭 페루프 고유치의 하한(lower limit)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} |\lambda_i - \lambda_o| &\leq \|\Phi_o\| \|\Phi_o^{-1}\| \|BK\| \\ &= k(\Phi_o) \|BK\| \\ &\leq k(\Phi_o) \|B\| \|K\| \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 Φ_o 는 개루프 우 고유벡터이다. (24)는 s 평면에서 개루프 고유치의 실수 부분과 허수 부분을 중심으로 하여 반경 $k(\Phi_o) \|B\| \|K\|$ 내에 공칭 페루프 시스템의 고유치가 존재할 수 있다는 것을 의미한다. 즉, 공칭 페루프 고유치 λ_i 는 개루프 고유치 λ_o 에서 $k(\Phi_o) \|B\| \|K\|$ 의 한계 내에서 지정해야 하므로 $\|K\|$ 의 한계가 정해지면 λ_i 의 한계도 정해진다. 개루프 시스템 자체의 조건수가 매우 커서 견실성이 매우 작은 경우, 이동할 수 있는 페루프 고유치의 범위도 따라 커지게 되므로 적은 이득으로 더 멀리 옮기는 것이 가능하다.

IV. 시뮬레이션 및 결과 고찰

1. 수치예제

본 논문에서 제시한 제어기법의 설계과정 및 유용성과 타당성을 고찰하기 위하여 먼저 다음과 같은 간단한 2차 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\xi\omega_n & \omega_n^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

여기서, 감쇠율(damping ratio) ξ 와 고유주파수(natural frequency) ω_n 의 평균값은 각각 0.707과 1이며, 각각은 표준편차가 0.2인 Gaussian 분포인 확률 변수로 가정한다. 예제에서 $p = [\xi \ \omega_n]^T$ 는 각각에 대해 비연관(uncorrelated)되어 있으며, 개루프 시스템의 고유치는 $\lambda_o = [-0.5177 \ 1.9317]$ 로 개루프 상태에서 불안정한 시스템이다. 설계요구조건으로 불안정성 확률 $P = 0$ 와 이득의

한계 $\|K\|_{bound} = 10$ 을 설정하였다.

본 논문에서 제시한 설계 방법을 따라 다음의 세 가지 경우에 대하여 각각 설계 결과를 제시하였다.

경우1 : $\lambda_d = [-1+i \quad -1-i]$, $\phi_d = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$

경우2 : $\lambda_d = [-2.6811+i \quad -2.6811-i]$, $\phi_d =$ 경우 1

경우3 : $\lambda_d =$ 경우 1, $\phi_d = \begin{bmatrix} 5+i & 5-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$

세 경우 모두 Monte Carlo 시뮬레이션[19]을 수행하였다. 이때, 횡수 $\epsilon = 5000$, 신뢰도(confidence coefficient) 95%로 수행하였을 경우의 추정된 불안정성 확률과 신뢰구간(confidence intervals)을 표 1에 나타내었다.

표 1. 수치예제의 시뮬레이션 결과.

	불안정성 확률(P)	신뢰구간 (L, U)
경우 1	0.0082	(0.0065, 0.0102)
경우 2	0	(0, 0)
경우 3	0.1094	(0.1033, 0.1157)

또한, 각각의 경우에 대한 결과선도가 그림 1, 2, 3에 각각 도시되어 있다. 그림 1, 2, 3에서 점선은 섭동 시스템의 고유치 한계, 실선은 공칭 페루프 시스템의 고유치의 이동거리의 한계를 나타낸다. 공칭값 근처에서 구름(cloud) 분포를 보이고 있는 것은 파라미터 변동에 의해 매 시뮬레이션 수행시 변화하는 고유치의 확률적 분포를 나타낸 것이다.

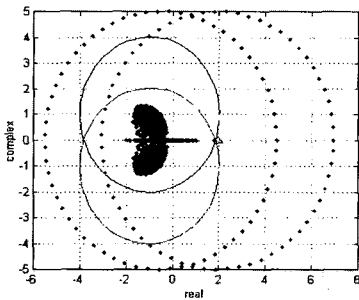


그림 1. 확률적 안정영역 (경우 1).
Fig. 1. The probabilistic stability region for Case 1.

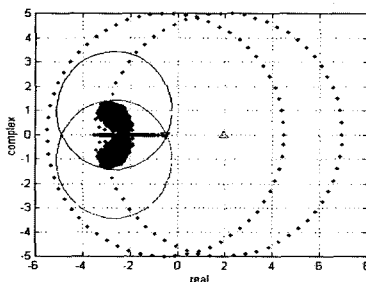


그림 2. 확률적 안정영역 (경우 2).
Fig. 2. The probabilistic stability region for Case 2.

경우 1에서는 불안정성이 0.0082로 계산되었고, 불안정성을 0로 만들기 위해 경우 2에서는 고유치를 $\delta_s = 1.6811$ 만큼 갱신한 원하는 고유치를 새로 선정하여 각각 좌반평면쪽으로 이동시켰다. 경우 1과 2에서 원하는 고유벡터는 일원행렬로 지정하였고, 입력행렬의 자유도가 충분하여 정확히 지정가능하므로 두 경우 모두 고유벡터 조건수는 1이다. 한편, 경우 3에서는 고유벡터를 경우 2와는 다르게 조건수를 크게 하여 고유치 민감도의 영향을 살펴보았는데, 이 경우 불안정성이 0.1094로 증가할 뿐만 아니라 확률적 안정반경 또한 커져서 정확성을 잃게 된다.

따라서, 세 경우의 시뮬레이션을 통해 알 수 있는 것은 고유치 민감도를 최소화하는 고유벡터를 지정하고, 섭동고유치와의 관계에 의해 파라미터의 확률적 변동이 있는 시스템의 불안정성을 최소화하는 위치에 고유치를 지정하는 경우가 다른 경우에 비해서 더 나은 견실성능을 보인다는 것이다.

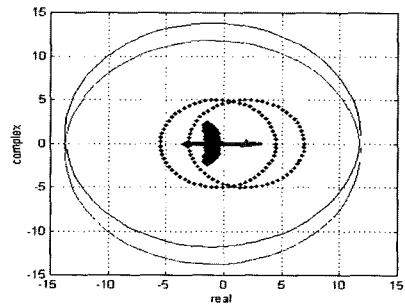


그림 3. 확률적 안정영역 비교 (점선: 경우 2, 실선: 경우 3).
Fig. 3. Comparison for the probabilistic stability region (dashed line: Case 2, solid line: Case 3).

2. 비행제어시스템에의 응용

보다 현실적인 결과 고찰을 위해서 다음과 같은 개루프 상태에서 불안정한 비행체의 행동역학 모델을 대상으로 하여 결과를 고찰한다.

$$A = \begin{bmatrix} -0.02 & -0.3 & -0.4 & -32.2 \\ -0.0001 & -1.2 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.04 & 35 \\ 0 & 0 \\ 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1-4} = -0.1 \pm 0.057j, -5.15, 3.35$$

상태변수들은 각각 전진 속도, 받음각(angle of attack), 피치율(pitch rate), 피치각(pitch angle)을 나타낸다. 발생 가능한 불확정성은 다음과 같다[18].

$$p = [\rho \quad V \quad f_{11} \quad f_{12} \quad f_{13} \quad f_{22} \quad f_{32} \quad f_{33} \quad g_{11} \quad g_{12} \quad g_{31} \quad g_{32}]$$

각각의 파라미터들은 공칭값 근처에 확률적으로 분포하고, 서로간의 연관성은 거의 없는 것으로 가정하여 불확정성의 향으로 시스템 모델을 구성하면 다음과 같이 된다.

시뮬레이션을 위하여 속도(V)와 공기밀도(ρ)는 $\pm 30\%$ 균일(uniform) 파라미터, p 의 나머지 파라미터는 각각 서

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-2gf_{11}}{V} & \frac{\rho V^2 f_{12}}{2} & \rho V f_{13} & -g \\ \frac{-45}{V^2} & \frac{\rho V f_{22}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\rho V f_{22}}{2} & \rho V f_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{\rho V^2}{2} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

로간에 독립인 30% 표준편차 Gaussian 불확정성을 갖는 것으로 설정하였다. 설계요구조건으로 $P = 0$ 와 이득의 한계 $\|K\|_{bound} = 100$ 을 설정하였고, 원하는 설계사양을 다음과 같이 정하였다.

$$\lambda_d = [-10.21 \quad -1.09 \quad -5.36 \quad -0.0186],$$

$$\Phi_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Monte Carlo 시뮬레이션 횟수는 $\epsilon = 5000$ 으로 하였으며, 신뢰도 95%에서 불안정성 확률과 신뢰구간은 각각 0.0788과 (0.0751, 0.0826)이다. $k(\Phi) = 1.2933$ $\|E(p)\| = 5.0656$ 이므로 확률적 안정반경은 6.5513이며, 결과선도가 그림 4에 도시되어 있다. $k(\Phi_s) = 1096.8$ 인 개루프 시스템 조건수에 비해 제어된 폐루프 시스템 조건수는 $k(\Phi) = 1.2933$ 로 최소값인 1에 근접하였으므로, 고유구조 지정기법의 적용이 효율적임을 알 수 있다. 불안정성 확률 P 를 0으로 만들기 위하여 계산된 $\delta s = 5.047$ 을 갱신하여 구한 폐루프 고유치들의 확률 분포가 그림 5에 도시되어 있다. 이 경우의 신뢰도 95%에서 불안정성 확률과 신뢰구간은 각각 0과 (0, 0.1844×10^{-3})으로 설계 요구조건

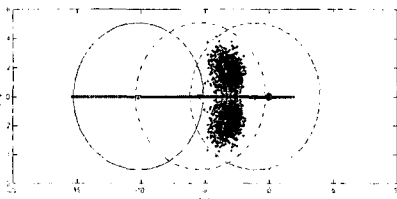


그림 4. 확률적 안정영역 (비행제어시스템 예제의 경우).

Fig. 4. The probabilistic stability region for a flight control system example.

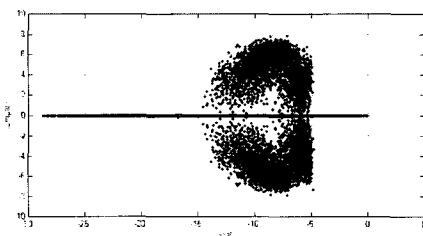


그림 5. δs 갱신 후 폐루프 고유치들의 확률 분포 ($P = 0$)

Fig. 5. The probability distribution of closed-loop eigenvalues after update of δs ($P = 0$)

$P = 0$ 을 만족한다.

V. 결론

본 논문에서는 시스템의 확률적인 파라미터 변동에 대하여 확률적 견실성을 보장할 수 있는 고유구조 지정기법을 제안하였다. 제안한 알고리즘은 Monte Carlo 시뮬레이션을 통하여 타당성과 유용성이 검증되었으며, 시스템의 확률적 견실성을 직관적으로 알 수 있게 해 준다. 고유구조 지정기법을 이용하면 폐루프 고유치들을 임의로 지정할 수 있으므로 확률적 견실성을 바로 고려할 수 있고, 고유치 민감도를 최소화하는 고유벡터를 지정함으로써 파라미터의 확률적 변동에 덜 민감한 제어기를 설계할 수 있다. 이를 위하여 파라미터의 확률적인 변동을 섭동항으로 고려하여 확률적 안정반경을 정의하고, 고유치 민감도를 최소화하는 고유벡터를 선정한 후 확률적 견실성을 확보할 수 있는 새로운 고유치를 갱신하는 알고리즘을 제안하였다. 간단한 수치예제와 비행제어시스템에의 적용을 통하여 본 논문에서 제시한 제어기법의 설계과정을 살펴보고 유용성 및 타당성을 고찰하였고, 시스템의 확률적 견실성을 직관적으로 알 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

- [1] J. W. Choi, "A simultaneous assignment methodology of right/left eigenstructures," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 2, pp. 625-634, April, 1998.
- [2] A. N. Jr. Andry, E. Y. Shapiro, and J. C. Chung, "Eigenstructure assignment for linear systems," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 19, no. 5, pp. 711-729, 1983.
- [3] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, "Design of an effective controller via disturbance accommodating Left Eigenstructure Assignment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp. 347-354, March-April, 1995.
- [4] G. Li, "On pole and zero sensitivity of linear systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 44, no. 7, pp. 583-590, July, 1997.
- [5] R. F. Wilson, J. R. Cloutier, and R. K. Yedavalli, "Control design for robust eigenstructure assignment in linear uncertain systems," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 12, no. 5, pp. 29-34, 1992.
- [6] K. M. Sobel, S. S. Banda, and H. H. Yeh, "Robust control for linear systems with structured state space uncertainty," *International Journal of Control*, vol. 50, no. 5, pp. 1991-2004, 1989.
- [7] W. Yu, J. E. Piou, and K. M. Sobel, "Robust eigenstructure assignment for the extended medium range air-to-air missile," *Automatica*, vol. 29, no. 4, pp. 889-898, 1993.
- [8] S. Garg, "Robust eigenstructure assignment using singular value sensitivities," *Journal of Guidance*,

- Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 2, pp. 416-424, March-April, 1991.
- [9] M. S. Jankovic, "Exact n-th derivatives of eigenvalues and eigenvectors," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 17, no. 1, pp. 136-144, January-February, 1994.
- [10] P. R. Apkarian, "Structured stability robustness improvement by eigenspace techniques: A hybrid methodology," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 12, no. 2, pp. 162-168, 1989.
- [11] R. J. Patton, and G. P. Liu, "Robust control design via eigenstructure assignment, genetic algorithms and gradient-Based optimization," *IEE Proc.-D: Control Theory and Applications*, vol. 141, no. 3, pp. 202-208, 1994.
- [12] R. F. Wilson and J. R. Cloutier, "Optimal eigenstructure achievement with robustness guarantees," *Proceedings of the 1990 American Control Conference*, San Diego, USA, pp. 952-957, May, 1990.
- [13] J. R. Broussard, "A quadratic weight selection algorithm," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, pp. 945-947, August, 1982.
- [14] 최재원, 서영봉, "고유구조 지정기능을 갖는 LQR 설계 및 비행제어시스템에의 응용," 제어·자동화·시스템공학 논문지, 제4권, 제3호, pp. 280-288, 1998. 6.
- [15] J. W. Choi and Y. B. Seo, "LQR design with eigenstructure assignment capability," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 35, no. 2, pp. 700-708, April, 1999.
- [16] L. R. Ray, "Robust linear-optimal control laws for active suspension systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 114, pp. 592-597, December, 1992.
- [17] R. F. Stengel, "Some effects of parameter variations on the lateral-directional stability of aircraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 3, no. 2, pp. 124-131, 1980.
- [18] R. F. Stengel and L. R. Ray, "Stochastic robustness of linear time-invariant control systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 1, pp. 82-87, January, 1991.
- [19] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press., 1985.



서영봉

1997년 부산대 기계설계공학과 졸업. 부산대 기계공학부 대학원 석사 (1999), 1999~현재 부산대 기계공학부 대학원 박사과정, 1998년 5월 부산대학교 대학원 공학계열 학술상 수상, 관심분야는 최적제어이론, 건설제어 이론, 고유구조 지정 및 응용, 자동차 현가장치 제어.



최재원

1987년 서울대학교 제어계측공학 졸업. 1989년 서울대학교 대학원 제어계측공학 석사. 1995년 서울대학교 대학원 제어계측공학 박사. 1995년 2월~3월 일본 NASDA/TKSC 방문. 연구원. 1995년 9월~1996년 2월 미국 USC PostDoc. 1998년 1월~2월, 1999년 12월~2000년 1월 미국 LSU 방문 교수. 1999년 8월~현재 IFAC Technical Committee on Aerospace 및 Technical Committee on Linear Systems 위원. 2000년 1월~현재 IEEE Control Systems Society Conference Editorial Board, Associate Editor. 2000년 1월~현재 제어·자동화·시스템공학 논문지 편집위원, 대한기계학회 동역학 및 제어부분 운영위원, 1996년~현재 부산대학교 기계공학부 전임강사, 조교수. 2000년 5월 한국과학기술단체총연합회 수여 제 10회 과학기술우수논문상 수상. 관심분야는 네트워크 차량의 통신, 항법 및 유도제어와 ITS에의 응용, 초소형 비행체의 항법 및 유도제어, 다중표적 추적필터 설계, 고장진단기반 제어기 재구성 등.