

고유구조지정법을 이용한 유연구조물의 스피로버 억제 방법

A Spillover Suppression Method in a Flexible Structure Using Eigenstructure Assignment

최재원, 박운식
(Jae Weon Choi and Un Sik Park)

Abstract : Although large space structures(LSS) such as a space station, a solar power station satellite, etc., are theoretically distributed parameter and infinite-dimensional systems, they have to be modeled into a lumped parameter and large finite-dimensional system for control system design. Besides, there remains the fundamental problem that the modeled large finite-dimensional system must be controlled with a much smaller dimensional controller due to the limitation of computing resources. This causes the spillover phenomenon which degrades control performances and reduces the stability margin. Furthermore, it may destabilize the entire feedback control system. In this paper, we propose a novel spillover suppression method in the active vibration control of large flexible structures by using eigenstructure assignment. Its validity and effectiveness are investigated and verified by the numerical experiments using a simply supported flexible beam, which is modeled to have four controlled modes and eight uncontrolled modes.

Keywords : spillover suppression, eigenstructure assignment, large flexible structures

I. 서론

미래의 우주기지과 태양열 발전 위성의 대형 광전판과 같은 거대우주구조물(large space structure: LSS)은 거대화과 경량화의 요구로 인해 유연구조물의 일반적인 특성을 지니게 된다[1]-[4]. 유연구조물은 제어입력 및 외란의 주파수대역 내에 주파수의 공진진동수가 밀집하여 존재하는데, 작은 강성으로 인해 외력에 의해 쉽게 진동이 발생하며 낮은 감쇠로 인하여 잔여진동이 오래 지속된다. 이러한 진동현상은 거대우주구조물과 같이 특수한 임무를 수행하는 시스템의 전체성능을 저하시키게 된다. 따라서, 유연구조물 상에 구동기와 센서를 부착하여 진동을 억제하고자 하는 능동진동제어 개념이 도입되게 되었고 이에 대한 많은 연구가 이루어졌다.

일반적으로 유한요소해석과 같은 이산화방법을 이용하여 무한차원의 분포정수계 시스템인 유연구조물을 유한차원의 집중정수계 시스템으로 근사화시킨다. 이와 같이 근사화된 모델은 이미 어느 정도의 모델링오차를 포함하게 되는데, 제어를 설계하기에는 아직도 고차의 시스템으로 이를 모델저차원화(model reduction)기법을 이용하여 다시 저차의 시스템으로 근사화하게 된다. 결국, 무한차원 혹은 고차의 유연구조물을 저차의 제어기로 제어하는 것이 되며, 이러한 유연구조물의 제어방법은 스피로버(spillover)라는 바람직하지 않은 현상이 항상 나타난다는 근본적인 문제를 안고 있다.

실제 제어동작에 있어서 저차원화된 모델에 대해 설계

된 제어기는 제어하지 않는 잉여모델과 상호작용을 하게 되는데 이러한 현상을 스피로버라고 하며, Balas[5][6]는 유연구조물의 모델저차원화가 스피로버를 발생시킨다는 것을 실험과 이론을 통해 처음으로 밝혀내었다. 즉, 구동기의 제어입력에 의해 제어하지 않는 고차의 진동모드(잉여 모드)들이 가진되는 제어 스피로버와 이렇게 여기된 고차의 진동모드가 센서의 출력에 나타나게 되어 관측기의 상태추정과정을 간섭하게 되는 관측 스피로버가 발생한다. 일반적으로 제어 스피로버는 제어시스템의 성능을 저하시키고, 관측 스피로버는 전체 피드백 시스템을 불안정하게 할 수 있는데, 이를 스피로버 불안정(spillover instability) 현상이라고 한다[5]-[7].

유연구조물의 제어에는 항상 스피로버 현상이 발생하며, 이를 효과적으로 저감시키는 혹은 억제할 수 있는 제어방법에 대한 연구가 필요하게 되었다. 따라서, 제어기 설계뿐만 아니라, 센서와 구동기의 위치선정과 전-필터(pre-filter) 설계를 통해 스피로버 현상을 저감시키고자 하는 많은 연구가 진행되어 왔다.

이 가운데에서 제어기 설계를 통한 스피로버 억제방법의 대표적인 몇 가지 사례를 살펴본다. 먼저 Balas[5]는 DVFB(Direct Velocity Feedback Control)방법을 제안하여 만족할 만한 스피로버 억제를 이루었으나, 강제모드가 있는 경우에는 여전히 스피로버 불안정성에 대한 위험이 남아있었다. 이 방법은 DOFB(Direct Output Feedback Control)방법의 특별한 경우로 모드제어와 같은 성능을 얻기 위해서는 많은 수의 센서와 구동기가 필요하게 된다. Meirovitch[8][9]는 IMSC(Independent Modal Space Control)방법을 제안하였으나, 하나의 모드에 대응하여 한 개의 구동기가 반드시 사용되어야 한다는 약점을 가지며

접수일자 : 2000. 4. 18., 수정완료 : 2000. 7. 7.

최재원, 박운식 : 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

※ 본 논문은 두뇌한국21사업 핵심분야에서 지원하여 연구하였습니다.

또한, 스피로버도 완전히 제거되지는 않았다. 그 외에도 양의 위치피드백(positive position feedback)[10], 모델오차 민감도 억제방법(model error sensitivity suppression method)[11]과 LAC/HAC[12] [13]와 같은 방법들이 스피로버 문제를 해결하기 위해 제안되었다.

본 논문에서는 거대우주구조물의 능동진동제어에서 항상 발생하는 스피로버를 억제하기 위해 관측기의 상태추정과정에서 생기는 관측 스피로버를 외란으로 간주하고 이를 억제할 수 있는 새로운 고유구조지정법을 이용한 스피로버 억제방법을 제안하였다. 이 방법은 복잡한 수치계산을 필요로 하지 않는 해석적이고 조직적인 방법으로 구현도 비교적 간단하다. 또한, 제안된 스피로버 억제방법을 4개의 제어모드와 8개의 잉여모드를 가지는 유연한 단순 지지보에 적용한 시뮬레이션을 통하여 그 정당성과 효용성을 검증한다.

II. 스피로버 해석

본 장에서는 유연구조물의 스피로버 현상에 대해 살펴보고, 제어상의 문제점을 이해하기 위해 스피로버 안정성 해석에 대해 고찰한다.

1. 스피로버

먼저, 거대우주구조물을 다음과 같이 선형 시불변 시스템으로 모델링할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^l$ 는 각각 상태, 제어입력, 및 출력벡터를 나타내며, A, B, C 는 각각 시스템, 입력 및 출력행렬을 나타내는 적절한 차원의 상수행렬이다. 그리고, (B, A) 는 제어가능하며 (C, A) 는 관측가능하고, B 는 완전 열계수(full column rank)행렬이라고 가정한다.

유한요소해석과 같은 이산화기법을 이용하여 얻어진 (1)과 같은 근사화 모델은 제어를 설계하기에는 아직도 고차의 시스템이므로, 모델 저차원화 기법을 이용하여 저차원화된 n_c 차의 제어시스템과 제어하지 않는 n_r 차의 잉여시스템으로 나누어 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_c(t) \ x_r(t)] \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_c & : & A_{rc} \\ \dots & & \dots \\ A_{cr} & : & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \dots \\ x_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $x_c(t) \in R^{n_c}$ 는 제어시스템의 상태를 나타내고, $x_r(t) \in R^{n_r}$ 은 잉여시스템의 상태를 나타낸다. $A_c \in R^{n_c \times n_c}$ 과 $A_r \in R^{n_r \times n_r}$ 은 각각 제어시스템과 잉여시스템행렬을 나타내고, $A_{cr} \in R^{n_c \times n_r}$ 과 $A_{rc} \in R^{n_r \times n_c}$ 은 각각 제어시스템과 잉여시스템 간의 상호작용을 나타내는 상관(correlation) 행렬이다. 또, 입력행렬에서 잉여시스템으로는 제어입력이 가해지지 않는 것을 알 수 있다.

여기서, 적절한 상태공간변환을 통해 제어시스템과 잉여시

스템을 비연성(decouple)화시키면 다음과 같은 새로운 상태공간표현을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} v(t) &= [v_c(t) \ v_r(t)]^T \\ \begin{bmatrix} \dot{v}_c(t) \\ \dots \\ \dot{v}_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & : & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & : & \bar{A}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ \dots \\ v_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \dots \\ \bar{B}_r \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $v_c(t) \in R^{n_c}$ 와 $v_r(t) \in R^{n_r}$ 은 각각 제어모드와 잉여모드를 나타낸다. 이 때, 출력은 다음과 같다.

$$y(t) = \bar{C}_c v_c(t) + \bar{C}_r v_r(t) \quad (4)$$

(3)과 (4)로 표현되는 시스템에 상태피드백 제어기 $u(t) = -\bar{G} \hat{v}_c(t)$ 를 설계하려면 센서로 측정하지 않는 상태를 추정하기 위해 다음과 같은 관측기를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_c(t) &= \bar{A}_c \hat{v}_c(t) + \bar{B}_c u(t) + \bar{K}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{v}_c(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\hat{v}_c(t) \in R^{n_c}$ 는 추정된 상태를 나타내고, \bar{K} 는 관측기 게인행렬을 나타낸다. 그리고, 관측기의 출력은 다음과 같다.

$$\hat{y}(t) = \bar{C}_c \hat{v}_c(t) \quad (6)$$

상태추정오차를 $e_c(t) = \hat{v}_c(t) - v_c(t)$ 라고 정의하면, (3)과 (5)로부터 다음과 같은 상태추정오차에 대한 동역학을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}_c(t) = (\bar{A}_c - \bar{K} \bar{C}_c) e_c(t) + \bar{K} \bar{C}_r v_r(t) \quad (7)$$

(7)에서 만약 잉여모드 $v_r(t)$ 에 대한 항이 없다면 관측기 게인 \bar{K} 를 적절히 설계함으로써 안정한 상태추정이 가능하다. 그리고, 분리정리(separation principle)에 의해 안정한 관측기는 피드백 제어시스템의 안정성에 영향을 미치지 않는 것으로 알려져 있다[14][15].

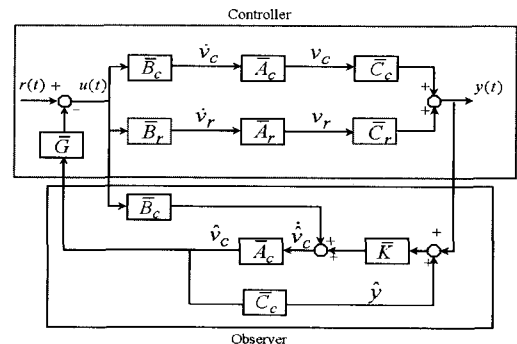


그림 1. 스피로버 기구.

Fig. 1. Spillover mechanism.

그림 1은 스피로버가 발생하는 기구(mechanism)를 도시

한 것이고, 제어모드, 상태추정오차 및 잉여모드로 이루어지는 전체 피드백 시스템을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_c(t) \\ \dot{e}_c(t) \\ \dot{v}_r(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_c - \overline{B}_c \overline{G} & : & -\overline{B}_c \overline{G} & : & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & : & \overline{A}_c - \overline{K} \overline{C}_c & : & \overline{K} \overline{C}_c \\ \dots & & \dots & & \dots \\ -\overline{B}_r \overline{G} & : & -\overline{B}_r \overline{G} & : & \overline{A}_r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_c(t) \\ e_c(t) \\ v_r(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

(8)에서 스페이오버 현상에 대해 자세하게 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 잉여모드 $v_r(t)$ 에 대한 동역학을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_r(t) &= \overline{A}_r v_r(t) - \overline{B}_r \overline{G} (v_c(t) + e_c(t)) \\ &= \overline{A}_r v_r(t) - \overline{B}_r \overline{G} \hat{v}_c(t) \\ &= \overline{A}_r v_r(t) + \overline{B}_r u(t) \end{aligned} \quad (9)$$

(9)에서 안정한 잉여모드 $v_r(t)$ 는 입력행렬 \overline{B}_r 를 통해 들어오는 제어입력 $u(t)$ 에 의해 가진되게 된다. 이것을 제어 스페이오버(control spillover)라고 하는데, 진동억제와 같은 제어성능을 높이기 위해 과도한 제어입력을 주는 경우에 제어 스페이오버는 더욱 크게 일어난다. 그러나, 이러한 제어 스페이오버는 제어시스템의 성능을 저하시키기는 하지만 불안정하게 하지는 않는다.

다음으로 (8)에서 다음과 같은 상태추정오차 $e_c(t)$ 에 대한 동역학을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}_c(t) = (\overline{A}_c - \overline{K} \overline{C}_c) e_c(t) + \overline{K} \overline{C}_c v_r(t) \quad (10)$$

(10)에서 관측기의 상태추정과정에서 제어 스페이오버에 의해 여기된 잉여모드 $v_r(t)$ 의 영향을 $\overline{K} \overline{C}_c$ 을 통해 받게 된다. 이러한 상태추정과정에서 잉여모드에 의한 간섭은 (4)에서 알 수 있듯이 센서의 출력에 잉여모드의 응답이 포함되어 있기 때문에 발생하는 것으로 이를 관측 스페이오버(observation spillover)라고 한다. 관측 스페이오버는 전체 피드백 시스템을 불안정하게 하는 스페이오버 불안정 현상을 발생시킬 수 있는데, 이에 대해 간단히 고찰하기로 한다.

2. 스페이오버 안정성 해석

(8)의 전체 피드백 시스템을 블록행렬로 나누어 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} w(t) &= [v_c(t) \quad e_c(t) \quad v_r(t)] \\ \dot{w}(t) &= H w(t) = \begin{bmatrix} H_{11} & : & H_{12} \\ \dots & & \dots \\ H_{21} & : & H_{22} \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} H_{11} &= \begin{bmatrix} \overline{A}_c - \overline{B}_c \overline{G} & : & -\overline{B}_c \overline{G} \\ \dots & & \dots \\ 0 & : & \overline{A}_c - \overline{K} \overline{C}_c \end{bmatrix}, \quad H_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \overline{K} \overline{C}_c \end{bmatrix} \\ H_{21} &= [-\overline{B}_r \overline{G} \quad : \quad -\overline{B}_r \overline{G}], \quad H_{22} = \overline{A}_r \end{aligned}$$

제어기 게인 \overline{G} 와 관측기 게인 \overline{K} 를 적절히 설계하여 블록행렬 H_{11} 의 제어시스템을 안정하게 할 수 있고, 잉여시

스템 \overline{A}_r 은 구조물의 특성상 자체로 안정하므로 블록행렬 H_{22} 는 안정하다. 여기서, 만약 $H_{12} = 0$ 이라면 전체 피드백 시스템은 항상 안정하다. 하지만, (10)에서도 알 수 있듯이 관측 스페이오버항 $\overline{K} \overline{C}_c$ 이 존재하면 $H_{12} \neq 0$ 이므로 제어시스템을 안정하게 설계하여도 전체 피드백 시스템의 안정성이 보장되지 않고 불안정해지는 경우가 발생하는데 이를 스페이오버 불안정 현상이라 한다.

다음은 스페이오버 안정성 해석에 대해 살펴보기 위해 전체 피드백 시스템행렬 H 를 다음과 같이 나타낸다.

$$H = H_o + \Delta H = \begin{bmatrix} H_{11} & : & 0 \\ \dots & & \dots \\ H_{21} & : & H_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & : & H_{12} \\ \dots & & \dots \\ 0 & : & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

만약, 관측 스페이오버가 발생하여 ΔH 가 존재하게 되면 H 의 고유값들은 초기값(H_o 의 고유값)을 기준으로 H_{12} (혹은 $\overline{K} \overline{C}_c$)에 의하여 변하게 된다. 따라서, 관측 스페이오버가 발생하여도 H 가 안정한 고유값을 가지기 위한 관측 스페이오버항 $\overline{K} \overline{C}_c$ 의 조건에 대해 살펴볼 필요가 있다.

먼저, Φ_o 를 H_o 의 우모드행렬(right modal matrix)이라고 하고, Φ_o 의 조건수(condition number)는 $K_o = \|\Phi_o\| \|\Phi_o^{-1}\| \geq 1$ 이라 한다. 만약, 관측 스페이오버항의 크기 $\|\overline{K} \overline{C}_c\|$ 이 충분히 작고 다음과 같은 조건을 만족하는 경우에는 전체 피드백 시스템 H 의 안정성은 보장된다 [6].

$$\|\Delta H\| = \|H_{12}\| = \|\overline{K} \overline{C}_c\| \leq \frac{\delta}{K_o} \quad (13)$$

여기서, δ 는 H_o 의 안정여유를 나타낸다. 위의 조건은 H 가 안정하기 위한 충분조건으로서 매우 보수적(conservative)이므로 설계조건으로 이용하기에는 적당하지 않지만, 스페이오버와 고유값의 변화(shift)의 관계에 대한 이해를 도울 수 있다.

III. 고유구조지정법을 이용한 스페이오버 억제

본 장에서는 스페이오버를 억제하기 위하여 (10)과 같이 관측기의 상태추정과정에 나타나는 관측 스페이오버항을 외란으로 간주하고, 이를 억제할 수 있는 관측기를 고유구조 지정법을 이용하여 설계하는 방법을 제시한다. 이를 위하여 먼저, 스페이오버 억제를 위한 고유구조 조건에 대하여 살펴보고, 이 조건을 만족하도록 관측기의 좌고유벡터를 설계하는 새로운 고유구조지정법에 대하여 기술한다.

1. 스페이오버 억제조건

먼저, (10)에서 모드분해를 통해 다음을 만족하는 고유구조(고유값과 고유벡터)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{A}_c - \overline{K} \overline{C}_c &= \Phi \Lambda \Psi^T \\ \Phi &= \{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{n_c} \} \\ \Psi &= \{ \psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_{n_c} \} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, $\Lambda \in R^{n_c \times n_c}$ 는 관측기 $(\overline{A}_c - \overline{K} \overline{C}_c)$ 를 안정하게 하

는 고유값으로 이루어진 대각행렬이고, Φ 와 Ψ 는 각각 관측기의 우 및 좌모드행렬이다. (14)를 이용하면 (10)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{e}_c(t) = (\Phi \Lambda \Psi^T) e_c(t) + \bar{K} \bar{C}_r v_r(t) \quad (15)$$

$e_c(0)=0$ 일 때, (15)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$e_c(t) = \Phi \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} \{ \Psi^T \cdot (\bar{K} \bar{C}_r) \} v_r(\tau) d\tau \quad (16)$$

(16)에서 관측기의 상태추정과정이 관측 스펴오버의 영향을 받지 않기 위해서는 다음과 같은 고유구조 조건을 만족해야 함을 알 수 있다[16].

$$\Psi^T \cdot (\bar{K} \bar{C}_r) = [0] \quad (17)$$

(17)의 고유구조 조건은 관측기의 좌고유벡터 ϕ_i 를 기저로 하는 고유공간과 관측 스펴오버항 $\bar{K} \bar{C}_r$ 의 열벡터로 이루어지는 벡터공간이 수직이 되어야 함을 의미한다. 만약, 이 조건이 만족된다면 관측 스펴오버는 완전히 제거될 수 있지만, 이러한 경우는 일반적으로 발생하기 어렵다. 그 이유는 일반적으로 잉여모드의 차수가 제어모드의 차수보다 훨씬 크므로($n_r > n_c$), 자유도의 부족으로 인해 두 벡터공간의 완전한 직교관계를 얻기가 매우 어렵기 때문이다.

따라서, 여기서는 관측 스펴오버의 영향이 비교적 큰 모드들에 대하여 부분적으로 다음과 같은 조건을 만족하도록 좌고유벡터를 설계하여 모드별로 스펴오버 억제가 가능하도록 한다.

$$\phi_i^T \cdot (\bar{K} \bar{C}_{rj}) = 0 \quad (18)$$

$$i=1, 2, \dots, n_c, \quad j=1, 2, \dots, n_r$$

여기서, $(\bar{K} \bar{C}_{rj})$ 는 관측 스펴오버항 $\bar{K} \bar{C}_r \in R^{n_c \times n_r}$ 의 j 번째 열벡터를 나타낸다.

하지만, 기존의 좌고유구조지정법[16][17]을 이용하여 (18)의 조건을 만족하는 관측기의 좌고유벡터를 설계하는 데에는 문제가 있다. 그것은 관측 스펴오버항에 관측기 개인행렬 \bar{K} 가 포함되어 있으므로 (18)을 만족하는 관측기의 개인행렬 \bar{K} 와 좌고유벡터 ϕ_i 를 동시에 설계해야 하는 복잡한 문제가 되며, 기존의 좌고유구조지정법을 이용하는 경우에는 복잡하고 반복적인 수치계산이 요구된다. 다음 장에서는 이러한 복잡함을 피하고 해석적으로 스펴오버 억제조건을 만족하는 좌고유벡터를 설계할 수 있는 새로운 고유구조지정법을 제안한다.

2. 스펴오버 억제를 고려한 관측기설계

본 절에서는 앞 절에서 언급하였듯이 복잡한 수치계산이 필요하지 않으며 해석적이고 조직적으로 스펴오버 억제성능을 가지는 관측기를 설계할 수 있는 새로운 고유구조지정법에 대해 설명한다.

먼저, $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$ 를 중복되지 않고 자기공액(self-conjugate)인 고유값으로 이루어진 대각행렬이라고 한다. 이 때, (10)의 관측기에 대한 좌, 우고유값문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{우: } & (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c + \bar{K} \bar{C}_c) \phi_i = 0 \\ \text{좌: } & \phi_i^T (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c + \bar{K} \bar{C}_c) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

관측기의 좌고유구조를 지정하기 위해서는 다음과 같이 쌍대관계에 있는 제어기의 우고유구조를 지정함으로써 관측기의 좌고유구조를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \{ \phi_i^T (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c + \bar{K} \bar{C}_c) \}^T = \\ & (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c^T + \bar{C}_c^T \bar{K}^T) \phi_i = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

(20)의 두 번째 항은 우고유값 문제의 형태를 나타내므로, 관측기의 좌고유구조지정법은 제어기의 우고유구조지정 문제로 바꾸어 적용할 수 있다. 따라서, 제어기 $(\bar{A}_c^T - \bar{C}_c^T \bar{K}^T)$ 의 우고유구조지정법은 제어기가 스펴오버 억제조건을 만족하는 우고유벡터를 가지도록 제어기 개인 \bar{K}^T 를 선정하는 문제로 귀착된다.

먼저, 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$S_{\lambda_i} \equiv [\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c^T \mid \bar{C}_c^T] \quad (21)$$

(21)에서 행렬 S_{λ_i} 의 영공간의 기저들로 이루어지는 다음과 같은 행렬을 얻을 수 있다[18].

$$R_{\lambda_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ \dots \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} \quad (22)$$

또한, (20)의 두 번째 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c^T \mid \bar{C}_c^T] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \dots \\ \bar{K}^T \phi_i \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

(23)에서 매개변수 벡터 $h_i \in R^l$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$h_i = \bar{K}^T \phi_i, \quad i=1, 2, \dots, n_c \quad (24)$$

그러면, (23)은 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$[\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c^T \mid \bar{C}_c^T] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \dots \\ h_i \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

(21), (22)와 (25)로부터 다음의 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \phi_i \\ \dots \\ h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ \dots \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} z_i, \quad i=1, 2, \dots, n_c \quad (26)$$

여기서, z_i 는 열공간 N_{λ_i} 로부터 획득가능(achievable)한 고유벡터 ϕ_i^d 와 열공간 M_{λ_i} 로부터 획득가능한 매개변수 벡터 h_i^d 를 동시에 생성할 수 있는 선형조합 계수벡터를 의미한다. 먼저, (26)에서 계수벡터 z_i 를 구하기 위해 바람직(desired)한 고유벡터 ϕ_i^d 와 매개변수벡터 h_i^d 를 선정하여야 한다. 여기서, 바람직한 고유벡터 ϕ_i^d 와 매개변수 벡터 h_i^d 를 다음에 설명하는 스펴오버 억제조건들을 만족하도록 선정함으로써 스펴오버 억제성능을 가지는 관측기를

설계할 수 있다.

먼저, (18)의 양변을 전치(transpose)시킨 뒤 매개변수 벡터 h_i 를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{ \phi_i^T \cdot (\bar{K} \bar{c}_{nj}) \}^T = \bar{c}_{nj}^T \cdot (\bar{K}^T \phi_i) = \bar{c}_{nj}^T \cdot h_i = 0$$

$$i=1,2,\dots,n_c, \quad j=1,2,\dots,n_r. \quad (27)$$

(27)로부터 바람직한 매개변수 벡터 h_i^d 가 다음의 조건을 만족해야 함을 알 수 있다.

조건 1 : 스피오버 억제를 위해서는 $\bar{C}_r^T H^d$ 에서 스피오버에 영향이 많이 주는 i 번째 요소들이 다음을 만족해야 한다.

$$\bar{c}_{rj}^T \cdot h_i^d = 0 \quad (28)$$

여기서, \bar{c}_{rj} 는 잉여모드의 출력행렬 $\bar{c}_r = [\bar{c}_{r1} \ \bar{c}_{r2} \ \dots \ \bar{c}_{rn}]$ 의 j 번째 열벡터이고, h_i^d 는 $H^d = [h_1^d \ h_2^d \ \dots \ h_n^d]$ 의 i 번째 열벡터를 의미한다.

조건 1에서 h_i^d 는 다음과 같은 식으로부터 쉽게 구할 수 있다.

$$h_i^d = [\text{Ker}(\bar{c}_{r1}^T) \mid \text{Ker}(\bar{c}_{r2}^T) \mid \dots \mid \text{Ker}(\bar{c}_{rn}^T)] \cdot \alpha_i \quad (29)$$

$$i=1,2,\dots,n_c$$

여기서, α_i 는 가중치 벡터를 나타내며, $\text{Ker}(\cdot)$ 는 (\cdot) 의 영공간(null space)을 나타낸다.

조건 2 : 을 만족하는 h_i 를 구하면 (24)를 만족하는 많은 경우의 고유벡터가 존재하게 되는데, 여기서 남은 자유도를 이용하여 시스템 불확실성에 대해 민감하지 않도록 고유벡터를 선정함으로써 스피오버와 같은 모델링오차에 대해 견실성을 보이는 관측기를 설계할 수 있다. 일반적으로 다음과 같은 조건을 만족하는 고유벡터는 시스템의 견실성을 향상시키기 위해 바람직하다[19].

조건 2. 바람직한 모드행렬 $\Psi^d = [\phi_1^d \ \phi_2^d \ \dots \ \phi_n^d]$ 는 직교(orthogonal) 혹은 일원(unitary)행렬이 되어야 한다.

위의 스피오버 억제조건들을 만족하는 ϕ_i^d 와 h_i^d 를 구하면 (26)로부터 다음과 같은 계수벡터 z_i 를 구할 수 있다.

$$z_i = \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ \dots \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_i^d \\ \dots \\ h_i^d \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,n_c \quad (30)$$

여기서, $[\cdot]^T$ 는 주어진 행렬의 의사역(pseudo-inverse) 행렬을 의미한다. (30)에서 의사역행렬은 바람직한 고유벡터 ϕ_i^d 가 주어진 획득가능한 벡터공간 N_{λ_i} 에 속하지 않으면 최소자승의 관점에서 가장 오차가 적은 획득가능한 고유벡터 ϕ_i^a 가 다음과 같이 구해진다는 것을 의미한다.

$$\phi_i^a = N_{\lambda_i} z_i, \quad i=1,2,\dots,n_c \quad (31)$$

마찬가지로 획득가능한 매개변수 벡터 h_i^a 는

$$h_i^a = M_{\lambda_i} z_i, \quad i=1,2,\dots,n_c \quad (32)$$

로부터 구할 수 있다.

(24)를 이용하면 제어기 게인 \bar{K}^T 는 다음과 같은 식으로부터 쉽게 구할 수 있다.

$$\bar{K}^T = H^a (\Psi^a)^{-1}$$

$$H^a = [h_1^a \ h_2^a \ \dots \ h_{n_c}^a] \quad (33)$$

$$\Psi^a = [\phi_1^a \ \phi_2^a \ \dots \ \phi_{n_c}^a].$$

여기서, \bar{K} 는 관측기 게인행렬이다.

본 장에서는 스피오버 억제를 위하여 완전히 해석적이고 구현이 간단한 새로운 고유구조지정법을 제안하였으며, 이 방법은 매우 조직적인 설계방법으로서 각 모드별로 스피오버를 고려할 수 있다는 장점이 있다.

IV. 수치예제

본 장에서는 본 논문에서 제안하는 스피오버 억제를 위한 고유구조지정법을 적용하여 관측기를 설계하고, 이를 다음과 같이 4차의 제어모드와 8차의 잉여모드를 가지는 유연한 단순지지보에 적용하여 스피오버 억제성능을 고찰한다.

$$\dot{v}_c(t) = \bar{A}_c v_c(t) + \bar{B}_c u(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.6943 & 0 & -0.0047 & 0 \\ 0 & -6.3439 & 0 & -0.0073 \end{bmatrix} v_c(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5211 & 0.5211 \\ 0.4179 & -0.4179 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{v}_r(t) = \bar{A}_r v_r(t) + \bar{B}_r u(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0065 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1043 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.6223 \end{bmatrix} v_r(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0026 \end{bmatrix} v_r(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.4179 & -0.4179 \\ -0.5211 & 0.5211 \\ 0.2319 & 0.2319 \\ -0.2319 & 0.2319 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \bar{C}_c v_c(t) + \bar{C}_r v_r(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5211 & 0.4179 \\ 0 & 0 & 0.5211 & -0.4179 \end{bmatrix} v_c(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4179 & -0.5211 & 0.2319 & -0.2319 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4179 & 0.5211 & 0.2319 & 0.2319 \end{bmatrix} v_r(t)$$

이 때, 전체시스템의 개루프 고유값은 다음과 같으며, 유연구조물의 특성이 잘 나타나 있음을 알 수 있다.

$$A_{open} = \begin{bmatrix} -0.0037 \pm 2.5187i \\ -0.0023 \pm 1.9221i \\ -0.0013 \pm 1.2737i \\ -0.0008 \pm 0.7244i \\ -0.0006 \pm 0.3229i \\ -0.0005 \pm 0.0808i \end{bmatrix}$$

먼저, 4차의 제어모드에 대해 고유구조지정법을 적용하여 제어기를 설계한다. 페루프 고유값을 다음과 같이 지정한다.

$$A_{controller} = [-3.8 \quad -4.0 \quad -4.2 \quad 4.9]$$

이 때, 제어기 게인은 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 10.9224 & 19.3525 & 7.4486 & 11.4526 \\ 11.1229 & -14.7373 & 7.5014 & -10.3159 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{G}\|_{fro} = 34.4102$$

여기서, $\|\cdot\|_{fro}$ 는 (\cdot) 의 Frobenious 노름을 나타낸다.

본 논문에서 제시하는 스피오버 억제방법의 효용성을 검증하기 위하여 두 가지 경우의 관측기설계 예제를 보인다. 먼저, 첫번째 경우에는 일반적인 고유구조지정법을 이용하여 관측기를 설계하였을 때 스피오버 불안정 현상이 발생하는 경우를 보이고, 두번째 경우에는 본 논문에서 제시하는 스피오버 억제를 위한 고유구조지정법을 적용하여 관측기를 설계하였을 때 첫번째 경우에서 발생하는 스피오버 불안정 현상이 사라짐을 보인다. 두 경우에 대해 동일한 제어기를 적용하였고, 관측기 설계에서도 관측기 고유값은 다음과 같이 동일하게 지정한다.

$$A_{observer} = [-10.5 \quad -11.0 \quad -11.5 \quad -12.0]$$

경우 1 : 일반적인 고유구조지정법을 적용하여 스피오버 불안정 현상이 발생한 경우

일반적인 고유구조지정법[16]을 적용하여 관측기를 설계하면, 다음과 같은 획득가능한 좌모드행렬을 얻을 수 있다.

$$\Psi^a = \begin{bmatrix} 65.0694 & 69.9818 & 81.2671 & 54.4606 \\ 157.9645 & 102.8248 & 200.1102 & 59.8676 \\ 184.9395 & 227.3159 & 241.9754 & 169.5290 \\ 261.4521 & 194.5013 & 346.9806 & 108.5258 \end{bmatrix}$$

$$k(\Psi^a) = 1412.02$$

여기서, $k(\cdot)$ 는 조건수(condition number)를 나타내며, 시스템의 불확실성에 대한 민감도를 나타낸다. 이 때, 관측 스피오버항 $\bar{K} \bar{C}_r$ 과 그 크기는 다음과 같다.

$$\bar{K} \bar{C}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 38.8870 & 21.1692 & -21.5807 & 9.4212 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.0744 & 12.6486 & 3.3710 & 5.6292 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22.0006 & -6.8693 & 12.2094 & -3.0571 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4011 & -21.8891 & -1.8875 & -9.7416 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{K} \bar{C}_r\|_{fro} = 63.5102$$

이 때, (8)에서 보인 전체 피드백 시스템의 고유값을 구하면 다음과 같다.

$$A_{composite} = \begin{bmatrix} -27.5276 \pm 3.3158i \\ -3.1740 \pm 11.6502i \\ 0.1278 \pm 9.0056i \\ -0.2096 \pm 1.2944i \\ -0.0941 \pm 2.0636i \\ -0.0405 \pm 0.6250i \\ -0.0236 \pm 1.1554i \\ -0.0184 \\ -0.0045 \end{bmatrix}$$

위의 고유값 중에서 밀줄친 부분과 같이 한 개의 음이 아닌 고유값이 존재하므로 전체 시스템이 불안정하다는 것을 알 수 있다. 즉, 제어기설계와 관측기설계에서 안정하게 지정하였던 페루프 고유값들 중에서 특정한 모드의 고유값이 스피오버 현상에 의해 안정성여유가 줄어드는 방향으로 이동(shift)하여 결국에는 스피오버 불안정현상을 보이게 된다.

경우 2 : 스피오버 억제를 위한 새로운 고유구조지정법을 적용한 경우

3장의 스피오버 억제조건들을 만족하는 획득가능한 개변수 행렬 H^a 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$H^a = \begin{bmatrix} 0.2478 & 0.2516 & -0.1891 & -0.1963 \\ -0.2142 & 0.2101 & 0.2735 & -0.2655 \end{bmatrix}$$

그리고, 획득가능한 좌모드행렬은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Psi^a = \begin{bmatrix} -24.6405 & 25.1415 & 1.2776 & -0.5217 \\ 4.9863 & 3.0496 & -9.4753 & -9.6486 \\ -76.7027 & 74.8595 & 4.1498 & -1.4829 \\ 9.0389 & 5.2878 & -17.9232 & -15.9697 \end{bmatrix}$$

$$k(\Psi^a) = 174.0702$$

이 때, 관측 스피오버항 $\bar{K} \bar{C}_r$ 과 그 크기는 각각 다음과 같다

$$\bar{K} \bar{C}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 26.6181 & 0.7487 & -14.7719 & 0.3332 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1518 & 23.5516 & 0.0842 & 10.4815 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18.0266 & -0.2473 & 10.0040 & -0.1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0882 & -28.0685 & -0.0490 & -12.4916 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{K} \bar{C}_r\|_{fro} = 54.4149$$

전체 피드백 시스템의 고유값을 살펴보면 다음과 같이 안정하게 나타남을 알 수 있다.

$$A_{composite} = \begin{bmatrix} -28.3653 \pm 0.6363i \\ -1.3723 \pm 11.8422i \\ -0.8390 \pm 8.8641i \\ -0.2051 \pm 1.3006i \\ -0.0962 \pm 2.0605i \\ -0.0391 \pm 0.6250i \\ -0.0244 \pm 1.1551i \\ -0.0191 \\ -0.0043 \end{bmatrix}$$

경우 2에 대해 초기값에 의한 전체 시스템의 응답을 그림 2, 3, 4에 도시하였다. 그림 2에서 제어모드의 진동억제는 만족스러운 결과를 보이고 있으나, 그림 3에서 관측기의 상태추정이 스피오버의 영향에 의하여 수렴속도가 좋지 않은 것을 알 수 있다. 그리고, 그림 4의 잉여모드의 진동 응답에서 하나의 잉여모드의 수렴속도가 매우 느림을 볼 수 있는데 이는 위의 페루프 시스템의 고유값 중에서 가장 허수축에 가까운 -0.0043 에 의한 것으로 여겨진다.

수치예제에서 보인 두 경우의 비교를 통해서 알 수 있듯이 본 논문에서 제시하는 고유구조지정법을 이용하여 설계된 관측기는 스피로버 억제성능을 가지는 것을 확인할 수 있으며, 이는 유연구조물의 제어에 있어 앞으로 중요하게 고려되어야 할 부분이다

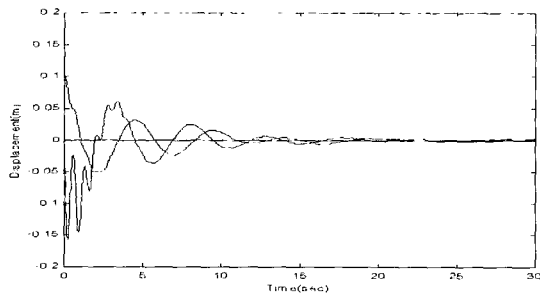


그림 2. 제어모드의 진동응답.
Fig. 2. Response of the controlled modes.

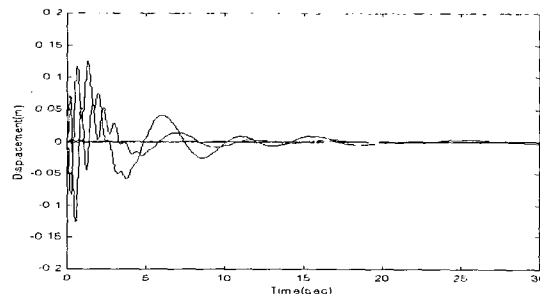


그림 3. 상태추정 오차의 응답.
Fig. 3. Response of the state estimation errors.

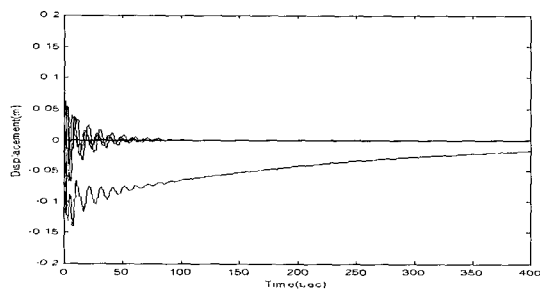


그림 4. 잉여모드의 진동응답.
Fig. 4. Response of the residual modes.

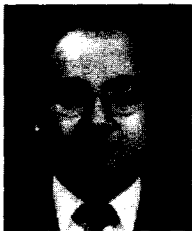
V. 결론

본 논문에서는 유연구조물의 능동진동제어에서 발생하는 스피로버를 억제하기 위하여 새로운 고유구조지정법을 적용하여 스피로버 억제성능을 가지는 관측기를 설계하였고, 이 방법을 4차의 제어모드와 8차의 잉여모드를 가지는 유연한 단순지지보에 적용한 시뮬레이션을 통해 그 효용성을 검증하였다.

참고문헌

- [1] M. J. Balas, "Trends in large space structure Control theory: Fondlest hopes, wildest dreams," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-27, no. 3, pp. 522-535, June, 1982.
- [2] G. S. Nurre, R. S. Ryan, H. N. Scofield, and J. L. Sims, "Dynamics and control of large space structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 7, no. 5, pp. 514-526, 1984.
- [3] Y. Yam, T. L. Johnson, and J. H. Lang, "Flexible system model reduction and control system design based upon actuator and sensor influence functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, no. 7, pp. 573-582, July, 1987.
- [4] D. C. Hyland, J. L. Junkins, and R. W. Longman, "Active control technology for large space structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 16, no. 5, pp. 801-821, 1993.
- [5] M. J. Balas, "Active control of flexible systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 25, no. 3, pp. 415-436, 1978.
- [6] M. J. Balas, "Feedback control of flexible systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-23, no. 4, pp. 673-679, 1978.
- [7] L. Meirovitch and H. Baruh, "On the problem of observation spillover in self-adjoint distributed-parameter systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 39, no. 2, pp. 269-291, February, 1983.
- [8] L. Meirovitch and H. Oz, "Modal space control of distributed gyroscopic systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 3, no. 2, pp. 157-163, March, 1980.
- [9] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- [10] J. L. Fanson and T. K. Caughey, "Positive position feedback control for large space structure," *AIAA Paper 87-0902*, pp. 588-598, 1987.
- [11] J. R. Sesak, P. W. Likins, and T. Coradetti, "Flexible spacecraft control by model error sensitivity suppression," *Journal of the Astronautical Sciences*, no. 27, no. 2, pp. 131-156, 1979.
- [12] J. N. Aubrun, "Theory of the control of structures by low-authority controllers," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 3, no. 5, pp. 444-451, 1980.
- [13] N. K. Gupta, "Frequency-shaped cost functional: extension of linear quadratic-gaussian-design methods," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 3, no. 6, pp. 529-535, 1980.
- [14] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*,

- Holt, Reiehart, and Winston, New York, 1979.
- [15] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- [16] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, "Design of an effective controller via disturbance accommodating left eigenstructure assignment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp. 347-354, 1995.
- [17] J. W. Choi, "A simultaneous assignment methodology of right/left eigenstructures," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 2, pp. 625-634, April, 1998.
- [18] A. N. Andry, Jr., E. Y. Shapiro, and J. C. Chung, "Eigenstructure assignment for linear systems," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-19, no. 5, pp. 711-729, September, 1983.
- [19] J. L. Junkins and Y. Kim, *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series, Washington D. C., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1993.



최재원

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동대학원 석사(1989), 동대학원 박사(1995). 1995.1.-1995.2. 일본 NASDA /TKSC 방문연구원. 1995.9-1996.3 미국 USC 연수연구원. 1998.1-1998.2 및 1999.12-2000.1 미국 LSU 방문연구원. 1996년~현재 부산대학교 기계공학부 조교수. 관심분야는 선형 시변시스템을 위한 고유구조 지정이론, 지능형 자동차를 위한 통신 네트워크 추정 및 제어, 초소형 비행체를 위한 항법 및 유도제어 시스템, 다목표물 추적필터 설계.



박은식

1998년 부산대 기계설계공학과 졸업. 동 대학원 지능기계공학과 석사(2000). 2000년 10월~현재 기계기술연구소 선임연구원. 관심분야는 선형시 스텝 이론, 고유구조지정 이론, 유연 구조물의 제어, 자동 군집주행 차량 제어.