Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 4, pp. 555–585

초청논문

리만 다양체의 홀로노미군

김 홍 종

요약문. Holonomy groups of Riemannian manifolds are surveyed.

이 글에서 *다양체*란 미분구조가 주어져 있는 다양체 — 즉, 미분다양체(differentiable manifold)로서 연결된 것을 뜻한다. 그러므로 다양체에서는 임의의 두 점을 연결하는 경로가 있으며, 매끄럽게 움직이는 점들의 속도벡터를 구할 수 있고, 각 점에서 접공간(tangent space)이 잘 정의된다.

그러나 다양체의 접벡터들은 기준점이 다르면 다른 공간에 있는 벡터들이므로, 이들을 비교할 수 있는 방법—즉, 평행이동법이 주어져 있지 않으면, 움직이는 점들의 *가속도 벡터*라는 개념은 의미를 가지지 않는다.

리만 다양체는 가속도 벡터를 말할 수 있는 대표적인 보기이다. 이 글에서는 리만다양체의 평행이동법을 측정하는 홀로노미군을 살펴 보고, 최근의 연구업적을 소개한다.

평행이동법은 유사(pseudo) 리만 다양체 또는 더욱 일반적인 "아핀 다양체"에서도 이야기할 수 있지만 이들은 이 글의 주제에서 벗어난다.

제 1 절 리만 다양체

다양체의 각 점에서 접공간에 내적(inner product)을 정한 것이 점의 변화에 대하여 매끄럽게 변하면, 그러한 정함을 *리만계량*(Riemannian metric)이라 한다. 조금 더 자세히 설명하면 다음과 같다: 다양체 M 의 점 m 에서 접공간 T_mM 에 주어진 내적을 g_m 으로 나타내자. 그러면

$$g_m : T_mM \times T_mM \to \mathbb{R}$$

Received June 23, 2000. Revised August 25, 2000.
2000 Mathematics Subject Classification: 53C10, 53C15.
Key words and phrases: holonomy group, Riemannian manifold.

은 양의 대칭 이중선형 사상이다. 만약 $(x^1, \ldots, x^n)$ 이 m 근방의 국소좌표계이면 벡터 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_m, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_m\right)$ 이 T_mM 의 기저이다. 이때 함수

$$m \mapsto g_{ij}(m) := g_m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_m, \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_m\right) \qquad (1 \le i, j \le n)$$

이 무한급(C^∞)함수이면 $g = \{g_m \mid m \in M\}$ 을 리만계량이라 한다. 리만계량은 흔히 "벡터의 제곱길이"를 재는"이차형식"

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

로 나타낸다.

우리가 다루는 다양체의 위상은 거리화가 가능하므로, 모든 다양체에는 리만계량이 존재한다. *리만 다양체*(Riemannian manifold)란 리만계량이 정해져 있는 다양체를 뜻한다.[1]

리만 다양체에서는 매개화된 곡선의 속력을 구할 수 있고, 따라서 곡선의 길이를 측정할 수 있다. 그러므로 두 점 사이의 거리를 잴 수 있고, 어떤 점열이 코시열(Cauchy sequence)인지를 판별할 수 있다. 모든 코시열이 수렴하는 리만 다양체를 **완비**(complete) 리만 다양체라 한다. 위상공간에서는 단순연결된(simply connected) 공간이 가장 단순하고 중요하듯이, 리만 다양체에서는 완비 공간이 그러하다. 모든 다양체에는 완비계량이 존재한다 ([50]).

리만 다양체에 대하여 최근에 출판된 것 중에서는 [7], [8], [32], [35], [53], [54], [57] 등이 있다.

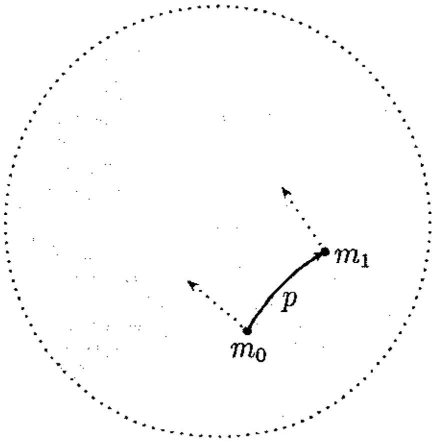
제 2 절 평행이동

리만 계량이 주어져 있지 않거나, 평행이동의 개념이 없는 일반적인 다양체에서는 서로 다른 점에서의 벡터(즉, 접벡터)를 비교할 수 있는 자연스러운 방법이 존재하지 않는다. 그러므로 일반 다양체에서는 움직이는 점의 속도벡터는 측정할 수 있지만 가속도 벡터는 의미가 없다.

---

[1] 리만기하학은 Bernhard Riemann(1826–1866)이 1854 년 6 월 10 일 (토) 11 시 30 분에 Göttingen 대학에서 발표한 "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"에서 탄생하였다 ([24], [44], [60]). Riemann 이 생각한 계량은 더욱 일반적인 것으로 Riemann-Finsler 계량이라 한다.

그러나 리만 다양체에서는 주어진 경로를 따라 벡터를 평행이동시킬 수 있고, 이 평행이동을 통하여 움직이는 점의 가속도 벡터를 구할 수 있다.[2]



리만 다양체 (M, g) 에서 점 m_0 을 출발하여 점 m_1 에 이르는 경로[3] p 에 대하여 평행이동사상

$$\tau_p : T_{m_0}M \to T_{m_1}M$$

은 벡터의 길이를 보존하는 사상이고, 따라서 선형사상이며 각을 보존한다.

일반적으로, 두 경로가 출발점이 서로 같고 도착점도 서로 같다 하더라도 이 두 경로에서 얻은 평행이동사상이 같을 필요는 없다. 그러나 평행이동사상을 합성하면 여전히 평행이동사상이다. 즉, 경로 p_1 의 도착점이 경로 p_2 의 출발점과 같으면

$$\tau_{p_2} \circ \tau_{p_1} = \tau_{p_2 * p_1}$$

[2]일반 벡터다발에서 "평행이동구조"의 공리는 [56] 등에서 찾을 수 있다. 평행이동의 개념은 1917년에 T. Levi-Civita(1873–1941)가 처음으로 소개하였다. 리만 다양체의 전형적인 접속(connection)은 1884–1894년에 G. Ricci(1853–1925, 원래 성은 Ricci-Curbastro)에 의하여 처음으로 분명하게 되었다. 이 접속을 그 제자의 이름을 따서 "Levi-Civita 접속"이라고 부르는 것은 적합하다고 보기 어렵다 ([14]). M. Grossmann은 A. Einstein에게 Ricci의 "절대미분법"(absolute differential calculus)이 중력 방정식을 세우는 데 유용할 것이라고 말하였다 ([27]). 접속의 개념은 H. Weyl, E. Cartan 등에 의하여 발전하였지만, 현재 수학자들이 사용하는 다발에서의 접속 개념으로 명확하게 일반화한 이는 1950년 경의 C. Ehresmann(1905–1979)이었다 ([26]).

[3]이 글에서 **경로**(path)란 "매개화된 경로"—즉, 조각적 무한급 사상 $\gamma : [0, 1] \to M$ 의 동등류(equivalence class)를 뜻한다. 두 개의 매개화된 경로가 동등하다는 것은 서로가 다른 것을 "동향 재매개화"하여 얻을 수 있다는 뜻이다.

이다. 특히 "상수 경로"를 따르는 평행이동사상은 항등사상이다. 또 p^{-1} 이 경로 p 의 역경로이면

$$\tau_{p^{-1}} = (\tau_p)^{-1}$$

이다.

이와 같이 벡터들을 주어진 경로를 따라 평행이동하는 방법이 주어져 있으면, 이를 이용하여 임의의 벡터장 V 의 변화율 ∇V 를 측정할 수 있다. 벡터장의 변화율을 측정하는 법을 **접속**(connection) 또는 **공변미분**(covariant derivative)이라 한다. 경로 p 를 따라 정의된 벡터장 V 가 한 벡터를 평행이동시켜 얻은 것이면 V 의 변화율은 영이고, 따라서 p 의 접벡터장 $\dot{p}$ 에 대하여

$$\nabla_{\dot{p}} V = 0$$

이다. 이러한 벡터장을 "경로 p 를 따르는 나란한 벡터장"이라 부른다.

접속은 흔히 E. B. Christofell(1829-1901)이 1869 년에 도입한 것을 발전시킨 기호 Γ^i_{jk} 를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \sum_i \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

역으로 접속은 평행이동사상을 결정한다: 출발점이 m_0 이고 도착점이 m_1 인 경로 p 를 매개화하여 $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, 로 두었다고 하면, 이 경로를 따라 벡터 $V_0 \in T_{m_0}M$ 을 평행이동하는 사상은 미분방정식

$$(1) \qquad \nabla_{\gamma'(t)} V = 0, \qquad V(0) = V_0$$

을 풀어

$$\tau_p(V_0) := V(1)$$

로 정해진다. 방정식 (1) 은, 국소적으로, 초기조건이 주어진 연립 선형 상미분방정식

$$\frac{dv^i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{d\gamma^j}{dt} \right) v^k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

이고 따라서 오직 한가지 해를 가진다.

닮은 리만 다양체들 (M, g), $(M, c^2 g)$ 는 같은 접속을 가지고, 따라서 평행이동의 개념이 같다.

2.1. 텐서장과 평행이동

다양체 M 의 접속은 경로를 따라 벡터의 평행이동을 가능하게 할뿐 아니라, 모든 텐서장의 평행이동을 가능하게 하고 그들의 공변미분을 구할 수 있게 하여 준다 ([48]).

공변미분이 영인 텐서를 **평행 텐서** 또는 **나란한 텐서**라 한다. 어떤 텐서가 나란하다는 것과 평행이동에 대하여 불변이라는 것은 같은 뜻이다.

함수 $f : M \to \mathbb{R}$ 의 "헤시안"은 벡터장 X, Y 에 대하여

$$\mathrm{Hess}\, f(X,Y) := (\nabla(df))(X,Y) := (\nabla_X(df))(Y) := X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$$

로 정의하는 텐서이다.

리만기하학의 기본정리는 다음 두가지 조건을 만족시키는 접속 ∇ 가 오직 하나뿐임을 말한다:

(i) 리만계량이 나란하고 (즉, $\nabla g = 0$)

(ii) 임의의 함수의 헤시안이 대칭 사상이다.

위에서 두번째 조건

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$$

을 "토션이 없다"고 말한다.

제 3 절 홀로노미군

리만 다양체 (M, g) 에서 출발점과 도착점이 모두 같은 점 m 인 경로— 즉, 점 m 을 기준으로 하는 고리(loop) p 에 대하여, 평행이동사상

$$\tau_p : T_m M \to T_m M$$

은 직교변환군 $O(T_m M) =: O_m$ 의 원소이다. 그러므로, 점 m 을 기준으로 하는 고리 전체 집합을 $\mathcal{P}_m$ 이라 하면,

$$H_m := \{\tau_p \mid p \in \mathcal{P}_m\}$$

는 O_m 의 부분군이다. 이 군을 "점 m 에서 리만 다양체 (M, g) 의 **홀로노미군**"이라고 부른다. 홀로노미(holonomy)라는 용어는 E. Cartan(1869–1951)이 일반상대론을 연구하던 1923년에 ([22], [23]) 처음으로 사용하였다.[4]

[4]그리스어로 $\acute{o}\lambda o\varsigma$ 는 "전체"를 뜻하고 $\nu o\mu o\varsigma$ 는 "법칙"을 뜻한다. H. Hertz는 1899년에 역학계를 서술하는 과정에서 처음으로 홀로노미라는 단어를 사용하였다 ([18]).

3.1. 향과 홀로노미군

만약 M 이 가향(orientable) 공간이면 모든 평행이동 사상은 향을 보존하고, 따라서 $H_m \subset \mathrm{SO}_m$ 이다. 역으로 $H_m \subset \mathrm{SO}_m$ 이면 M 은 가향 공간이다.

3.2. 제한된 홀로노미군

점 m 을 기준으로 하는 고리 중에서 축약가능한(contractible) 것만 생각하면 이들은 *제한된 홀로노미군*(restricted holonomy group) H_m^0 을 이룬다.

Cartan 이후에 홀로노미군은 한동안 잊혀져 있다가 [Borel-Lichnerowicz, 1952]의 연구 결과로 다시 주목을 끌기 시작하였다. 이들의 정리 ([42], p. 186)에 의하면 제한된 홀로노미군은 SO_m 의 연결된 닫힌 부분군이고, 특히 옹골(compact) 리군이다. 제한된 홀로노미군 H_m^0 은 제한없는 홀로노미군 H_m 의 항등원의 연결성분이다. 홀로노미군의 정의로부터 M 의 기본군(fundamental group) $\pi_1(M,m)$ 에서 정의된 전사인 준동형(homomorphism)

$$\pi_1(M,m) \to H_m/H_m^0$$

을 바로 얻는다. 그러므로 제한 없는 홀로노미군 H_m 의 연결 성분의 개수는 가산수(countable number)임을 안다.

연구자들은 옹골 리만 공간의 (제한없는) 홀로노미군이 여전히 옹골인지 알고 싶어 하였지만, 최근에 와서야 [Wilking, 1999]이 무한개의 연결 성분을 가지는 5차원 공간의 보기를 들었다.

단순 연결된 공간에서는 제한된 홀로노미군은 홀로노미군과 같다.

3.3. 기준점의 변화와 홀로노미군

점 m_0 에서의 홀로노미군 H_{m_0} 과 점 m_1 에서의 홀로노미군 H_{m_1} 사이에는 다음과 같은 관계가 있다. 우선 점 m_0 을 출발하여 점 m_1 에 도착하는 경로를 하나 선택하여 이를 p 라 하자. 그러면

$$H_{m_1} = \tau_p H_{m_0} {\tau_p}^{-1} \tag{2}$$

이다.

선형 등장사상(isometry) $l_0 : T_{m_0}M \to \mathbb{R}^n$ 은 홀로노미군 H_{m_0} 을 직교군 $\mathrm{O}(n)$ 의 부분군 $l_0(H_{m_0})$ 으로 보게 하여 주고, 마찬가지로 선형 등장사상 $l_1 : T_{m_1}M \to \mathbb{R}^n$ 은 홀로노미군 H_{m_1} 을 $\mathrm{O}(n)$ 의 부분군 $l_1(H_{m_1})$ 으로 보게 하여 준다. 관계식 (2)는 $l_0(H_{m_0})$ 과 $l_1(H_{m_1})$ 이

서로 켤레(conjugate)임을 말하여 준다. 따라서 $O(n)$ 의 부분군의 켤레류(conjugacy class)로서 **홀로노미군**

$$H(M, g)$$

가 잘 정의된다.

마찬가지 방법으로 리만 다양체에서 제한된 홀로노미군 $H^0(M,g)$ 를 정의한다. 만약 $(\tilde{M},\tilde{g}) \to (M,g)$ 가 국소적으로 거리를 보존하는 **보편덮개**(universal cover)이면

$$H^0(M,g) = H(\tilde{M},\tilde{g})$$

이다.

3.4. 곱공간의 홀로노미군

두 리만 다양체 (M,g), (N,h) 의 곱공간 $(M \times N, g \times h)$ 에 대하여

$$H(M \times N, g \times h) = H(M,g) \times H(N,h)$$

이다.

제 4 절 De Rham 의 분해정리

리만 다양체 M 의 점 m 에서 접평면 T_mM 의 선형부분공간들을 생각하자. 이들 가운데에서 홀로노미군 H_m 에 대하여 변하지 않는 것이 T_mM 이거나 또는 자명한 것 $\{0\}$ 뿐이면, 그러한 리만다양체를 **기약** 리만 다양체라 한다.

홀로노미군 H_m 이 단위구면 $\mathbf{S}(T_mM)$ 에 추이적으로 작용하면—즉, 단위 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_mM$ 가 임의로 주어졌을 때, $\mathbf{v}$ 를 어떤 경로를 통하여 평행이동시켜 $\mathbf{w}$ 를 얻을 수 있다면—M 은 기약 리만 다양체이다.

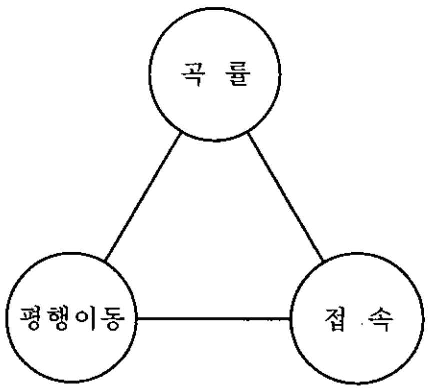
마치 모든 자연수가 소수들의 곱으로 표현되고 그 방법이 오직 한가지 뿐이듯이, 단순연결된 완비 리만 다양체들도 비슷한 성질이 있다.

정리 1 (de Rham, 1952). *단순연결된 완비 리만 다양체는 유클리드 공간과 기약 리만 다양체들의 곱으로 나타낼 수 있고, 이러한 방법은 (곱하는 순서를 무시한다면) 오직 한가지 뿐이다.*

이 정리와 3.4 덕분에 기약 리만 다양체의 홀로노미군을 이해하는 것이 중요함을 안다.

제 5 절 곡률

리만 기하학에서 가장 중요한 개념은 평행이동과 접속 및 곡률이라 할 수 있다.



곡률이라는 것이 휘어진 정도를 측정하는 데 사용되는 개념인 것은 사실이지만, 그러한 이름으로 부르는 것에는 여러가지가 있다.

5.1. 곡선과 곡률

n-차원 리만 다양체에서 곡선 $\gamma(t)$ 를 따라 "움직이는 정규직교틀"

$$\mathbf{e}(t) := (e_1(t), \ldots, e_n(t))$$

를 생각하자. 이때 곡선 $\gamma(t)$ 를 따라 틀 $\mathbf{e}(t)$ 의 변화율 $\mathbf{e}'(t) := \nabla_{\gamma'(t)}\mathbf{e}(t)$ 는 반대칭 행렬 $A(t) \in \mathfrak{o}(n)$ 에 대하여

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$$

로 주어진다.[5] 그러면 벡터함수 $f(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ \vdots \\ f^n(t) \end{pmatrix}$ 에 대하여 곡선 $\gamma(t)$ 를 따르는 벡터장 $\sum_{i=1}^{n} e_i f^i = \mathbf{e}f$ 가 나란할 필요충분조건은

$$0 = (\mathbf{e}f)' = \mathbf{e}'f + \mathbf{e}f' = \mathbf{e}(Af + f'),$$

즉,

$$f' = -Af$$

이다. ($n = 2$ 이면 $A(t)$ 는 가환 리대수 $\mathfrak{o}(2)$ 의 원소이고, 따라서 구적법을 이용하여 잘 풀 수 있다: $f(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} A(\bar{t})\,d\bar{t}} f(t_0)$)

특히, 유향곡면의 곡선 $\gamma(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, 에서 표준 단위 접벡터

$$\mathbf{t} := \gamma'/|\gamma'|$$

를 90° 회전한 "표준 단위 법벡터"를 $\mathbf{n}$ 으로 두면 Serret-Frenet 공식은

$$\mathbf{t}' = v\kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -v\kappa\mathbf{t} \qquad (v = |\gamma'|)$$

이고, 평행이동사상

$$\tau : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$$

[5]곡선 $\gamma(t)$ 의 속도, 가속도, 가가속도, ... 등 n 가지의 벡터

$$\gamma'(t), \quad \gamma''(t) := \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t), \quad \ldots, \quad \gamma^{(n)}(t) := \left(\nabla_{\gamma'(t)}\right)^{n-1}\gamma'(t)$$

가 모두 일차독립이면 Gram-Schmidt 과정을 거쳐 곡선 $\gamma(t)$ 를 따라 "움직이는 틀" $(e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t))$ 를 정할 수 있다. 이러한 곡선을 "n-차 정규 곡선"이라 부른다. 이때에는 제1곡률, 제2곡률, ..., 제$(n-1)$곡률

$$\kappa_1, \quad \kappa_2, \quad \ldots, \quad \kappa_{n-1} \qquad > 0$$

과 $v = |\gamma'|$ 에 대하여 Serret-Frenet 공식

$$\begin{aligned} e_1' &= v\kappa_1 e_2 \\ e_2' &= v(-\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_3) \\ &\vdots \\ e_n' &= -v\kappa_{n-1}e_{n-1} \end{aligned}$$

을 얻는다. 유향공간에서는 마지막 벡터를 $e_n := e_1 \times \cdots \times e_{n-1}$ 로 둘 수 있으므로 $(n-1)$-차 정규 곡선에 대하여 Serret-Frenet 공식이 있고, 이 경우 마지막 곡률 κ_{n-1} 은 음양을 다 허락한다.

을 서술하는 행렬은, 기저 $(\mathbf{t},\mathbf{n})$ 와 각변화량 (또는 총곡률) $\alpha := \int_{t_0}^{t_1} v\kappa\, dt = \int_\gamma \kappa\, ds$ 에 대하여

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3}$$

로 나타난다. 특히, 곡선에서 자신의 접벡터를 평행이동시키면, 곡선이 휘어진 것을 보완하여, 곡률벡터 $\kappa\mathbf{n}$ 으로부터 멀어짐을 알 수 있다.

5.2. 곡률텐서

리만 다양체 M 에서 점 m 의 두 벡터 v_1, v_2 에 대하여 **곡률텐서**

$$R_{v_1v_2} : T_mM \to T_mM$$

은 다음과 같이 정의한다: 우선 v_1, v_2 를 점 m 근방에서 정의된 벡터장 V_1, V_2 로 확장한다. 이때 편의상 이 두 벡터장이 서로 교환가능하다고 가정하자: $[V_1, V_2] = 0$. 그러면 이들은 m 근방에서 흐름(flow) Φ_t^1, Φ_t^2 를 유도하고, 이로부터 점 m 에서 출발하여 처음 s 시간동안 Φ_t^2 를 따라 움직이고, 다음 s 시간동안 Φ_t^1 를 따라 움직이며, 다음 s 시간동안은 Φ_{-t}^2 를 따라 움직이고, 마지막 s 시간동안 Φ_{-t}^1 를 따라 처음 위치 m 으로 돌아오는 곡선 p_s 를 얻는다. 이 곡선을 따라 평행이동하는 사상을 τ_s 라 하자: $\tau_s \in H_m$. 그러면

$$R_{v_1v_2}(v) := \frac{1}{2}\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_0 \tau_s(v) \qquad (v \in T_mM) \tag{4}$$

이다.[6] 이러한 정의에서 $R_{v_1v_2}$ 가 H_m 의 리대수 $\mathfrak{h}_m \subset \mathfrak{o}(T_mM)$ 의 원소임은 분명하다.

다음에 소개하는 Cartan 의 "홀로노미 정리"는 [Ambrose-Singer, 1953]에 의하여 엄밀하게 증명되었다.

정리 2. *홀로노미 리대수* $\mathfrak{h}_m$ *은*

$${\tau_\gamma}^{-1} \circ R_{\tau_\gamma(v_1)\tau_\gamma(v_2)} \circ \tau_\gamma$$

들로 생성된다. 여기에서 $v_1, v_2 \in T_mM$ *이고* γ *는* m *을 출발점으로 하는 경로이다.*

---

[6] 또는 $R_{V_1V_2} := [\nabla_{V_1}, \nabla_{V_2}] - \nabla_{[V_1,V_2]}$ 로 둔다.

5.3. Ricci 곡률

리만다양체에서 **Ricci 곡률텐서**는 다음과 같이 정의한다: 벡터장 X, Y, Z 에 대하여

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R_{ZX}(Y)).$$

리만다양체의 접속은 토션이 없으므로 Ricci 곡률텐서는 대칭텐서이다.

보기를 들어 표준단위구면

$$\mathbf{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

의 Ricci 곡률을 구하여 보자. 우선 구면을 경도-위도 좌표 (θ,φ) 로 매개화한다.

$$p(\theta,\varphi) := (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi).$$

그러면 위선—즉, 제일좌표곡선

$$\theta_0 \le \theta \le \theta_0 + \Delta\theta, \qquad \varphi \equiv \varphi_0$$

과 경선—즉, 제이좌표곡선

$$\theta \equiv \theta_0, \qquad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 + \Delta\varphi$$

으로부터 서로 수직이고 교환가능한 벡터장

$$V_1 := \frac{\partial p}{\partial\theta} = \cos\varphi(-\sin\theta, \cos\theta, 0), \qquad |V_1| = \cos\varphi$$
$$V_2 := \frac{\partial p}{\partial\varphi} = (-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi), \qquad |V_2| = 1$$

을 얻는다.

경선은 움직이는 방향을 바꾸지 않는 곡선—즉, **측지선**(geodesic)이다. 그러므로 경선을 따르는 평행이동사상을, 벡터장 V_1, V_2 를 기저로 하여 나타낸 행렬은, 항등행렬이다.

한편, 위선은 곡률(signed geodesic curvature)이

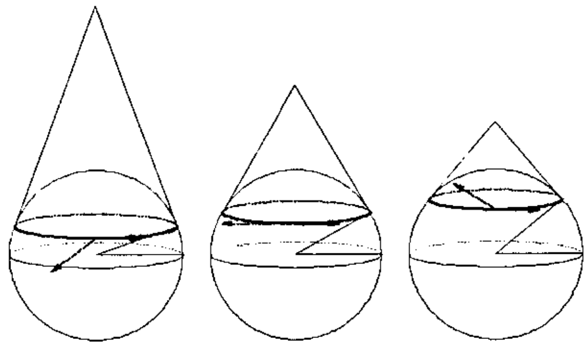
$$\kappa = \tan\varphi_0$$

이다. 그러므로 (3)에서 위선을 따르는 평행이동사상은, 벡터장 $V_1/|V_1|$, V_2 를 "움직이는 틀"로 하였을 때

$$-\Delta\theta \cdot \sin\varphi_0$$

만큼 회전이동하는 사상이다.

예를 들어 위도가 N48° 인 위선을 따라 벡터를 평행이동시켜 한바퀴 돈 결과는 처음 벡터를 $-2\pi\sin 48°$ 만큼 회전시킨 것이고, 이 각도는 프랑스의 파리에 있는 J. Foucault(1819–1868)의 진자가 하루동안 움직인 각과 같다 ([51]).



한편

$$\Phi_t^1(p(\theta,\varphi)) = p(\theta+t,\varphi), \qquad \Phi_t^2(p(\theta,\varphi)) = p(\theta,\varphi+t)$$

이다. 그러므로 기저 $V_1/|V_1|, V_2$ 와

$$\alpha(s) := s(\sin(\varphi+s)-\sin\varphi), \quad \alpha(0)=0, \quad \alpha'(0)=0, \quad \alpha''(0)=2\cos\varphi$$

에 대하여 곡률텐서 (4)를 표현하면

$$\begin{aligned} R_{V_1V_2} &= \frac{1}{2}\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \alpha' \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(2\cos\varphi)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다. 즉,

$$R_{V_1V_2}(V_1) = -(\cos^2\varphi)V_2, \qquad R_{V_1V_2}(V_2) = V_1$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(V_1,V_1) &= \mathrm{tr}\, R_{\cdot V_1}(V_1) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi \end{pmatrix} = |V_1|^2 \\ \mathrm{Ric}(V_1,V_2) &= \mathrm{tr}\, R_{\cdot V_1}(V_2) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathrm{Ric}(V_2,V_2) &= \mathrm{tr}\, R_{\cdot V_2}(V_2) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |V_2|^2 \end{aligned}$$

이고, 표준단위 구면의 Ricci 곡률텐서는 리만 계량과 일치함을 안다. 이와 같이 Ricci 곡률텐서가 리만 계량의 상수배인 다양체를 Einstein 다양체라 한다.

제 6 절 보기

6.1. 평평한 공간과 홀로노미군

평평한 — 즉, 곡률이 영인 리만 다양체 (M, g) 에서는 서로 동륜인(同倫, homotopic) 두 경로는 같은 평행이동사상을 낳는다. 그러므로 전사인 사상

$$\pi_1(M, m) \to H_m(M, g)$$

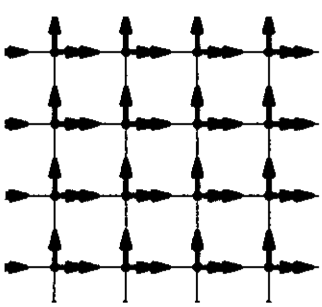
을 얻는다.

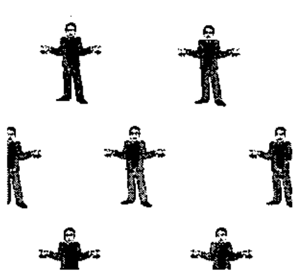
곡률이 영인 공간은 모두 유클리드 공간을 나누어 얻는다.

6.1.1. *유클리드 공간.* 유클리드 공간의 홀로노미군은 자명하다.

6.1.2. *원환면.* 유클리드 공간을 격자로 나누면 평평한 원환면(torus)을 얻는다:

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{E}^n / L.$$





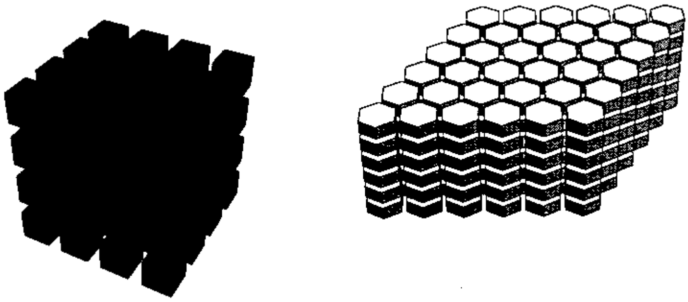


그림: 여러가지 원환면

원환면의 홀로노미군도 자명하다.

6.1.3. *클라인 병.* 평평한 클라인 병 K 의 홀로노미군은 원소가 2개인 이면군 D_1 이다.

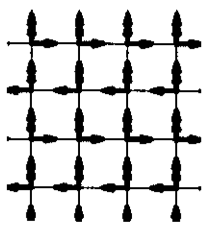


그림: 클라인 병K

6.1.4. *Bieberbach 군.* 유클리드 공간 $\mathbb{E}$ 의 운동군 $\mathrm{M}(\mathbb{E})$ 는 평행이동군 $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ 와 회전이동군 $\mathrm{O}(\overrightarrow{\mathbb{E}})$ 로 구성되어 있다:

$$1 \to \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \mathrm{M}(\mathbb{E}) \to \mathrm{O}(\overrightarrow{\mathbb{E}}) \to 1.$$

$\mathrm{M}(\mathbb{E})$ 의 부분군 G 가

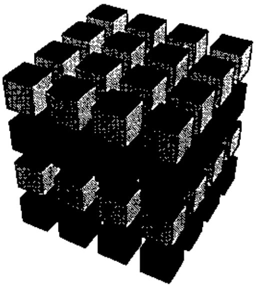
(i) 이산군이고

(ii) $\mathbb{E}/G$ 가 옹골공간이고

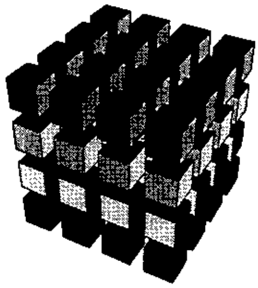
(iii) G 의 원소 가운데 반복시행하여 항등 변환이 되는 것은 항등원

이라 하자. 그러면, Bieberbach 의 정리에 의하여, G 속의 평행이동들로 이루어진 군 $T(G) := G \cap \overrightarrow{\mathbb{E}}$ 에 대하여 G 의 점군(point group) $G/T(G)$ 가 유한군이고, 이것은 몫공간 $\mathbb{E}/G$ 의 홀로노미군이다:

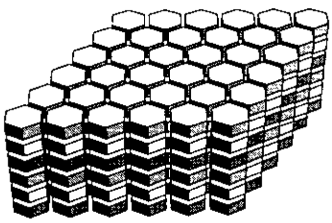
$$H(\mathbb{E}/G) = G/T(G).$$



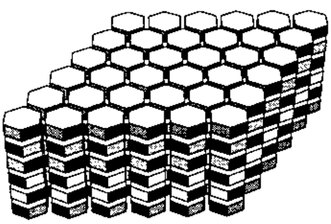
H $= C_2$



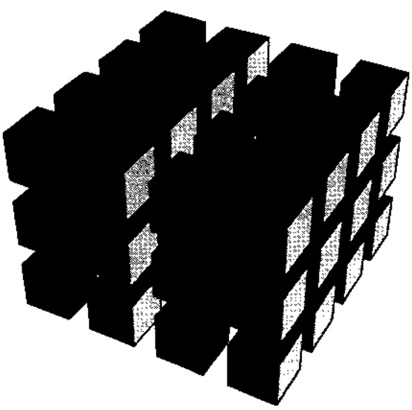
H $= C_4$



H $= C_3$



H $= C_6$



$H(K \times S^1) = D_1$

6.2. 쌍곡공간

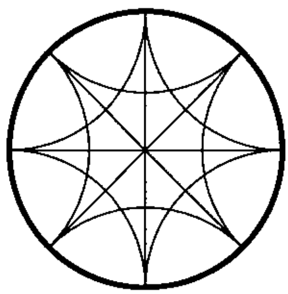
단면곡률이 항등적으로 $-1/r^2$ 인 공간의 모형으로 반지름의 길이가 r 인 공

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$$

에 리만 계량이

$$ds^2 = 4\frac{{dx_1}^2 + \cdots + {dx_n}^2}{(1-(|x|/r)^2)^2}$$

으로 주어진 공간을 생각하자. 이 공간의 홀로노미군은 $\mathrm{SO}(n)$ 이다.



6.3. 구면

구면 $\mathbf{S}^n$ 의 홀로노미군은

$$H(\mathbf{S}^n) = \mathrm{SO}(n)$$

이다.

6.4. 사영공간

n-차원 **사영공간**(projective space)은 다음과 같이 서술할 수 있다. 우선 $(n+1)$-차원 유클리드 공간 $\mathbb{E}^{n+1}$ 에서 직선 전체 집합을 생각하자. 나란한 두 직선은 이승에서는 만나지 않지만, 무한대(저승?)에서 만나고 오직 한 점에서 만난다고 여긴다. 이와 같이 무한대의 점들을 다 모든 집합을 n-차원 사영공간이라 하고 $\mathbf{P}(\mathbb{E}^{n+1})$ 또는 $\mathbf{P}^n$ 으로 나타내기로 한다.

사영공간에서 두 점 p_1, p_2 사이의 거리는 다음과 같이 정한다. 우선 $\mathbb{E}^{n+1}$ 의 한 점 O 를 고정한다. 그러면 O 를 지나고 무한대 점 p_1 을 지나는 직선이 오직 하나 존재한다. 이 직선을 l_1 이라 하자. 마찬가지로 점 O 를 지나고 무한대에서 점 p_2 를 지나는 직선을 l_2 라 하자. 그러면

$$\mathrm{dist}(p_1, p_2) := \angle(l_1, l_2)$$

로 정의한다. 즉, 점 O 에서 무한대 점 p_1, p_2 를 바라 보았을 때 그 사이각의 크기가 바로 p_1, p_2 사이의 거리이다.

홀수차원 사영공간은 가향공간이지만 짝수차원 사영공간은 비가향공간이다. 이들의 홀로노미군은

$$H(\mathbf{P}^n) = \begin{cases} \mathrm{O}(n) & (n \text{ 이 짝수 일 때}) \\ \mathrm{SO}(n) & (n \text{ 이 홀수 일 때}) \end{cases}$$

이다.

6.5. 복소사영공간

복소사영공간 $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ 는 복소유클리드공간의 무한대점들로 이루어져 있다. 만약 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{n+1}$ 이 단위벡터이면, 이들이 표현하는 사영공간의 두 점 $[z_1], [z_2] \in \mathbf{P}^n$ 사이의 거리는

$$\mathrm{dist}([z_1], [z_2]) = \arccos |\langle z_1, z_2 \rangle|$$

이다. 여기에서 $\langle\ ,\ \rangle$ 는 Hermite 내적을 나타낸다.

복소사영공간에서 평행이동은 복소구조를 보존하고,

$$H(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})) = \mathrm{U}(n)$$

이다.

6.6. Kähler 공간

6.6.1. *복소다양체.* 준복소(almost complex) 다양체 (M, J) 의 임의의 리만 계량 g 에 대하여 새로운 계량

$$\tilde{g} := \frac{1}{2}(g + J^* g)$$

는 준복소구조에 대하여 불변인 계량—즉, Hermite 계량이고, 이때 준복소구조는 $\tilde{g}$ 에 대한 등장변환이다.

Hermite 계량이 주어진 준복소다양체 (M, g, J) 에서 경로를 따라 벡터를 평행이동하는 사상이 준복소구조를 변화시키지 않으면, Nijenhuis 텐서

$$N(X, Y) := [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

가 항등적으로 영이다. ($[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ 이므로.) 그러므로 [Newlander-Nirenberg, 1957] 정리에서 (M, J) 는 복소다양체이다. 이와 같이 복소구조가 나란한 Hermite 다양체 (M, g, J) 를 **Kähler 다양체**라 한다.

복소 n 차원 Kähler 다양체의 홀로노미군은 유니타리군 $\mathrm{U}(n)$ 의 부분군임은 자명하다.

거꾸로, 실차원이 $2n$ 인 어떤 리만 다양체 (M,g) 의 홀로노미군이 $\mathrm{U}(n)$ 에 포함된다고 하자. 이것의 의미는 다음과 같다: M 의 한 점 m 에서 직교변환 $J_m : T_mM \to T_mM$ 이 존재하여 ${J_m}^2 = -\,\mathrm{id}$ 이고, 점 m 을 기준으로 하는 고리를 따라 평행이동하는 사상이 모두 J_m 과 교환가능하다. 이때 J_m 을 M 의 다른 점으로 평행이동시키면 공간 전체에서 잘 정의된 등장사상 $J : TM \to TM$ 을 얻는다. 이 사상은 여전히 $J^2 = -\,\mathrm{id}$ 이다. 한편 Newlander-Nirenberg 정리에서 M 은 복소다양체이고, 따라서 (M,g,J) 는 Kähler 다양체이다 ([43]).

6.7. Ricci 곡률이 영인 Kähler 다양체

실벡터 공간 V 에 준복소구조

$$J : V \to V, \qquad J^2 = -\,\mathrm{id}$$

가 있으면 J-불변 대칭이중선형사상

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

은 J-불변 반대칭이중사상

$$\omega(v_1, v_2) := g(Jv_1, v_2) \qquad (v_1, v_2 \in V)$$

을 유도하고, 그 역도 성립한다.

Kähler 다양체에서는 곡률텐서 R 이 복소구조 J 와 교환가능하고, 따라서 Ricci 곡률도 J-불변 대칭이중사상이다. 이에 대응되는 반대칭형식 ρ 를 **Ricci 형식**이라 부른다:

$$\rho = \sqrt{-1} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \rho_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu = \sqrt{-1} d'' d' \log \det(g_{\mu\bar{\nu}}).$$

n-차원 Kähler 다양체 (M,g,J) 에서 다음 두 명제는 동치이다:

(i) 제한된 홀로노미군이 특수 유니타리군 $\mathrm{SU}(n)$ 에 포함된다.

(ii) (M,g) 의 Ricci 곡률이 영이다.

이러한 옹골 다양체의 보기는 S. Yau 가 E. Calabi 의 예상(cf. [Calabi, 1955], [13])을 증명하고 나서 알려졌다 [Yau, 1977, 1978]).

옹골 Kähler 다양체 (M,ω) 에서 Ricci 형식은 제일 실(real) Chern 류의 2π 배

$$2\pi c_1(M) \in H^2(M,\mathbb{R})$$

을 표현한다는 것이 잘 알려져 있다. Calabi 는 $2\pi c_1(M)$ 을 표현하는 임의의 미분 (1,1)-형식에 대하여 이것을 Ricci 곡률로 가지는 Kähler 형식 $\tilde{\omega}$ 가 존재할 뿐 아니라 $\tilde{\omega}$ 의 코호몰로지류가 ω 의 코호몰로지류와 같은 것이 오직 하나뿐이라고 예상하였다.

Yau 가 이 예상을 증명하였고, 따라서 $c_1(M) = 0$ 인 옹골 Kähler 다양체에는 Ricci 곡률이 영인 Kähler 계량이 존재한다.

Ricci 곡률이 영인 Kähler 다양체를 한 때 "특수 Kähler 다양체"라고 부르기도 하였으나, 요즈음은 이 용어를 다른 의미로 사용한다 ([29]).

6.8. 초캘러 다양체

6.8.1. *사원수.* **사원수**(quaternion)는 복소수의 한 쌍으로 볼 수 있다:

$$(z_1, z_2) = z_1 + z_2 j \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}).$$

이때 $j^2 = -1$ 이고, 임의의 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$zj = j\bar{z}$$

이다. 사원수 $q = z_1 + z_2 j$ 에 대하여 **켤레 사원수**는

$$\bar{q} = \bar{z}_1 - z_2 j$$

이다. 또 두 사원수 q_1, q_2 에 대하여

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$$

이다.

사원수 전체 집합을 $\mathbb{H}$ 로 나타내고, n-차원 공간 $\mathbb{H}^n$ 에서 "사원수 내적"을

$$\langle (q_1, \ldots, q_n), (p_1, \ldots, p_n) \rangle := \bar{q}_1 p_1 + \cdots + \bar{q}_n p_n$$

으로 정의하자. $\mathbb{H}^n$ 의 자기 사상 중에서 사원수 내적을 보존하는 것들 전체 집합을 **사교군**(symplectic group)이라 하고 $\mathrm{Sp}(n)$ 으로 나타낸다:

$$\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SU}(2n) \subset \mathrm{U}(2n) \subset \mathrm{SO}(4n).$$

6.8.2. *초캘러 다양체.* $4n$-차원 다양체 M 에서 항등식

$$(xI + yJ + zK)^2 = -(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{id} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

을 만족시키는 준동형

$$I, J, K : TM \to TM$$

이 존재한다고 하자. 이때 어떤 계량 g 에 대하여 I, J, K 가 모두 나란한 등장변환들이면 (M, g, I, J, K) 를 **초캘러(hyperKähler)** 다양체라 한다. E. Calabi 는 1979 년에 모든 $4n$-차원에 대하여 완비인 이러한 공간의 보기

$$H((T'\mathbf{P}^n(\mathbb{C}))^*) = \mathrm{Sp}(n)$$

을 처음으로 들면서 그러한 이름을 붙였다 ([21]). ([Atiyah] 는 이러한 다양체를 Hamilton 다양체라고 부르자고 제안하였으나 역사를 바꾸는 것

은 쉬운 일이 아니다.) 옹골공간의 보기는 [Fujiki], [Beauville], [Mukai] 등에 의하여 알려졌다.

초캘러 다양체의 홀로노미군은 사교군 $\mathrm{Sp}(n)$ 의 부분군이다.

거꾸로, $4n$-차원 리만 다양체 (M, g) 의 홀로노미군이 사교군 $\mathrm{Sp}(n)$ 에 포함되면 (M, g) 는 초캘러 다양체이다.

초캘러 다양체는 Ricci 곡률이 영이다.

6.9. 사원 캘러 다양체

사교군 $\mathrm{Sp}(n)$ 은 특수 직교군 $\mathrm{SO}(4n)$ 의 부분군이다. 한편 단위 사원수를 $\mathbb{H}^n$ 의 오른쪽에서 곱하는 사상을 생각하면 포함사상

$$\mathrm{Sp}(1) \subset \mathrm{SO}(4n)$$

을 얻는다. 이제 $\mathrm{SO}(4n)$ 안에서 $\mathrm{Sp}(n)$ 과 $\mathrm{Sp}(1)$ 의 공통부분은 $\{\pm 1\}$ 이다. 이 두 부분군으로 생성된 군

$$\mathrm{Sp}(n) \cdot \mathrm{Sp}(1) \simeq (\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1))/\{\pm 1\} \qquad (n \geq 2)$$

을 홀로노미군으로 가지는 리만다양체를 **사원 캘러 다양체**(quaternionic Kähler manifold)라고 부른다.[7]

이러한 다양체의 보기로는 사원 사영공간을 들 수 있다:

$$H(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})) = \mathrm{Sp}(n) \cdot \mathrm{Sp}(1).$$

그러나 아직도 이러한 다양체의 보기는 드물다 (cf. [7], p.103).

6.10. 대칭공간과 홀로노미군

리만 다양체 사이의 등장사상

$$f, g : M \to N$$

이 M 의 한 점 m 과 N 의 한 점 n 에 대하여

$$f(m) = n = g(m), \qquad df_m = dg_m : T_m M \to T_n N$$

이면 f 와 g 는 항등적으로 같다. 즉, 등장사상은 한 점에서의 접사상에 의하여 완전히 결정된다.

그러므로 주어진 점 $m \in M$ 에 대하여

$$I_m(m) = m, \qquad dI_m = -\,\mathrm{id}$$

[7] 일반적으로, 사원 캘러 다양체는 캘러 다양체가 아니므로 이러한 용어는 약간 혼란을 준다. $n = 1$ 일 때에는 $\mathrm{Sp}(1) \cdot \mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SO}(4)$ 이다.

를 만족시키는 등장변환 $I_m : M \to M$ 은, 만약 존재한다면, 오직 한가지뿐이다. 앞으로 I_m 을 "m 을 기준으로 하는 **점대칭 변환**"이라 부르기로 한다.

대칭공간(symmetric space)이란 그 공간의 각 점을 기준으로 하는 점대칭 변환이 존재하는 리만 다양체를 뜻한다 ([9], [34], [35], [42], [57], [58], [62], [65]).

대칭공간은 균질(homogeneous)공간이고, 따라서 완비공간이다.

대칭공간의 개념은 **국소 대칭공간**이라는 개념으로 자명하게 확장할 수 있다. E. Cartan은 국소 대칭공간이라는 개념이 "곡률텐서가 나란하다"는 것과 동치임을 보였다. 역으로 단순연결인 국소 대칭공간은 대칭공간이다.

단순연결된 대칭공간은 유클리드 공간과 기약 대칭공간의 곱으로 표현할 수 있고, 이러한 표현은 순서를 무시하면 오직 한가지 뿐이다.

Cartan은 단순 리대수의 분류를 이용하여 단순연결된 기약 대칭공간을 완전히 분류하였다.

대칭공간에서는 Ricci 텐서가 나란하므로, 기약대칭공간은 아인슈타인 공간이다.

6.10.1. *보기.* 만약 G 가 이중불변 계량을 가지는 리군이면 역원변환

$$I : g \mapsto g^{-1}$$

은 항등원을 기준으로 한 점대칭변환이고, 일반 점 $g \in G$ 에 대하여

$$I_g := R_g \circ I \circ R_g{}^{-1}$$

는 점대칭변환이다. 그러므로 이중불변 계량을 가진 리군은 대칭공간이다.

6.10.2. *대칭공간의 홀로노미군.* 만약 M 이 대칭공간이면 M 의 등장변환군의 항등 성분 G 가 M 에 추이적으로 작용한다. 이때 M 의 한 점 m 을 고정하면 등방군(isotropy subgroup)

$$K := \{g \in G \mid g(m) = m\}$$

을 얻는다. 만약 M 이 단순연결된 공간이면

$$H_m(M) \simeq K$$

이다.

제 7 절 Berger 의 분류

대칭공간의 홀로노미군은 다 알려져 있다. M. Berger 는 다음과 같은 분류를 하였다.[8]

정리 3 (Berger, 1955). *대칭공간이 아닌 단순연결된 n-차원 기약 리만 다양체의 홀로노미군은 다음 가운데 하나이다:*

$$\mathrm{SO}(n),\ \mathrm{U}(n/2),\ \mathrm{SU}(n/2),\ \mathrm{Sp}(n/4),\ \mathrm{Sp}(n/4)\cdot\mathrm{Sp}(1),\ \mathrm{G}_2,\ \mathrm{Spin}(7).$$

Berger 의 목록을 보고, A. Borel 은 그것이 구면에 추이적으로 작용하는 군이라는 것을 지적한 편지를 보냈다. 어떤 일반차원 구면에 효과적이고 추이적으로 작용하는 연결된 옹골 리군의 분류는 [Montgomery, Samelson, 1943], [Borel, 1949, 1950] 이 완성하였다 ([9], p.179]).

Borel 의 지적으로 [Simons, 1962] 가 Berger 정리를 새롭게 증명하였고 그 덕분에 다음 정리를 얻는다 ([9], p.306)).

정리 4. *리만 다양체 M 의 제한된 홀로노미군 $H^0(M)$ 은 다음 군들서 선택하여 곱한 군이다: 기약 대칭공간의 홀로노미군, Berger 목록에 나오는 군.*

제 8 절 예외적인 리만 다양체

홀로노미군이 G_2 또는 Spin(7) 인 리만 다양체를 예외적인 리만 다양체라 부르기로 한다.

Berger 의 분류에도 불구하고, 예외적인 리만 다양체의 보기는 오랫동안 알려지지 않았다. Bryant 는 국소적인 보기를 들었고, Bryant 와 Salamon 은 완비인 보기를 들었다 ([16], [19]). 최근에 D. Joyce 에 의하여 처음으로 많은 옹골 보기들이 발견되었다 ([36]~[41]).

8.1. Cayley 대수와 예외적인 군

팔원수(octonion) 또는 **Cayley 수**는 한 쌍의 사원수

$$(q_1, q_2) =: q_1 + q_2 l$$

로 이해할 수 있다. 팔원수들은 서로 곱할 수 있다:

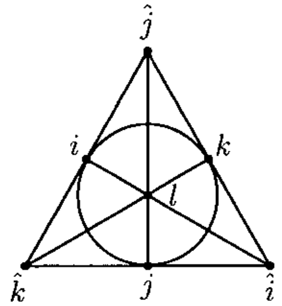
$$(q_1 + q_2 l) \cdot (p_1 + p_2 l) := (q_1 p_1 - \bar{p}_2 q_2) + (p_2 q_1 + q_2 \bar{p}_1) l.$$

[8]Berger 의 목록은 약간 수정하여야 하는 부분들이 있었다 ([17], [18]). 그 목록에는 Spin(9) 도 있었으나 [Alekseevski, 1968] 가 그러한 공간은 "팬더"—즉, Cayley 사영 평면 $\mathbf{P}^2(\mathbb{O})$ 처럼 대칭공간임을 보였다. Berger 는 리만 계량의 경우 이외에도 토션이 없는 아핀 접속의 홀로노미군을 분류하였으나 이것도 완벽하지는 않았다 [45].

특히

$$q_1(q_2l) = (q_2q_1)l, \quad ql = l\bar{q}, \quad (lq_1)q_2 = l(q_2q_1), \quad (q_1l)(q_2l) = -\bar{q}_2q_1,$$
$$(q_1l)q_2 = (q_1\overline{q_2})l, \qquad q_1(lq_2) = l(\overline{q_1}q_2), \qquad (lq_1)(lq_2) = -q_2\bar{q_1}$$

이므로 팔원수의 곱은 결합법칙을 만족시키지 않음을 안다. 팔원수의 곱하기 표는 다음 "Fano의 사영평면"이 말하여 준다 ([55]).



사원수 q_1, q_2 에 대하여 $c := q_1 + q_2l$ 의 **켤레 팔원수**는

$$\bar{c} := \overline{q_1} - q_2l$$

이다. 앞으로 팔원수 전체집합을 $\mathbb{O}$ 로 두기로 한다. 팔원수 c 가 $\bar{c} = -c$ 이면 이를 **순허수**라 하고, 순허수 전체 집합을 $\mathrm{im}\,\mathbb{O}$ 로 둔다. Cayley 대수—즉, 팔원수 대수 $\mathbb{O}$ 의 중심(center)은 실수체 $\mathbb{R}$ 이다. 한편

$$(q_1 + q_2l)\overline{(q_1 + q_2l)} = |q_1|^2 + |q_2|^2 = \overline{(q_1 + q_2l)}(q_1 + q_2l)$$

이므로 영이 아닌 팔원수는 곱셈에 대한 역원을 가진다.

또 팔원수 c_1, c_2 에 대하여

$$\overline{c_1c_2} = \overline{c_2}\,\overline{c_1}$$

이고 팔원수의 절대값은

$$|c| = \sqrt{c\bar{c}}$$

이다. 그리고

$$|c_1c_2| = |c_1|\,|c_2|$$

이 성립한다 ([1], [15], [31], [33]).

8.1.1. Spin(7). 특수직교군 SO(7) 은 $\mathbb{R}^7$ 에서 벡터의 길이를 보존하고 향을 보존하는 자기 변환 전체로 이루어진 군이다.

특수직교군 안에서, 주어진 특수직교행렬과 항등행렬을 잇는 경로들의 동륜류(homotopy class)에는 두가지가 있다. 스핀군 Spin(7) 은 이러한 동륜류 전체로 이루어진 군이다. 항등행렬을 기준점으로 하는 축약가능 고리들의 동륜류가 Spin(7) 의 항등원 $1 \in \mathrm{Spin}(7)$ 이다. 항등행렬을 기준점으로 하는 축약 불가능한 고리들의 동륜류는 제곱하면 항등원이 되는 원소 $-1 \in \mathrm{Spin}(7)$ 이다. 경로의 종점을 대응시키는 사상은 이중 덮개인 준동형이다:

$$\pi : \mathrm{Spin}(7) \to \mathrm{SO}(7).$$

이때 $\ker(\pi) = \{\pm 1\}$ 이다.

역으로 어떤 연결된 리군 G 에 대하여 이중 덮개 준동형 $G \to \mathrm{SO}(7)$ 이 있으면 G 는 Spin(7) 과 동형이다.

어떤 실벡터 공간 V 로의 표현(representation)

$$\rho : \mathrm{Spin}(7) \to \mathrm{GL}(V) \tag{5}$$

에서 $-1 \in \ker \rho$ 이면 이 표현은 SO(7) 의 표현을 통하여 얻어진 것이다. 표현 (5) 에서 $-1 \notin \ker \rho$ 이면 이 표현을 **스핀 표현**이라 한다. Spin(7) 의 스핀 표현은 오직 한가지 뿐이고 그 차원은 8 이다.

Spin(7) 은 $\mathrm{SO}(\mathbb{O}) = \mathrm{SO}(8)$ 의 부분군으로 볼 수 있다. 팔원수 x 에 대하여 "오른쪽에서 곱하는 사상"

$$R_x : \mathbb{O} \to \mathbb{O}, \qquad y \mapsto yx$$

를 생각하자. 만약 $x \neq 0$ 이면, $R_x \in \mathrm{GL}^+(\mathbb{O})$ 이고

$${R_x}^{-1} = R_{x^{-1}}$$

이다. 만약 $|x| = 1$ 이면, $R_x \in \mathrm{SO}(\mathbb{O})$ 이다. Spin(7) 은

$$R_x, \qquad x \in \mathbf{S}^6 := \{x \in \mathrm{im}\,\mathbb{O} : |x| = 1\}$$

로 생성된 $\mathrm{SO}(\mathbb{O})$ 의 부분군이다. 만약 $x, y \in \mathbf{S}^6$ 이면, $xy = -yx$ 이고

$$R_x \circ R_y \circ R_x^{-1} = R_{-xyx}$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{Spin}(7) = \{g \in \mathrm{SO}(8) \mid \forall x \in \mathrm{im}\,\mathbb{O}, \exists y \in \mathrm{im}\,\mathbb{O}, g \circ R_x \circ g^{-1} = R_y\}$$

로 정의하여도 된다. 이러한 정의에서 Spin(7) 이 7차원 공간

$$\{R_x \mid x \in \mathrm{im}\,\mathbb{O}\}$$

에 작용함을 알고, 이로부터 이중 덮개 사상 $\mathrm{Spin}(7) \to \mathrm{SO}(7)$ 을 얻는다.

Spin(7) 의 또 다른 정의를 소개한다. Cayley 대수 $\mathbb{O}$ 에서 삼중 곱하기는 다음과 같이 정의한다:

$$a \times b \times c := \frac{1}{2}\left(a\left(\bar{b}c\right) - c\left(\bar{b}a\right)\right).$$

이 사상은 교대 삼중선형사상이다. 이때 $\mathbb{O}$ 의 **기본 4-형식** Ω_0 는 다음과 같이 정의한다:

$$\Omega_0(a,b,c,d) := \langle a \times b \times c, d\rangle.$$

그러면

$$\mathrm{Spin}(7) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{O}) \mid g^*\Omega_0 = \Omega_0\} \subset \mathrm{SO}(\mathbb{O})$$

이다.

Spin(7) 은 21-차원이고 단순 연결된 옹골 단순 리군이다.

8.1.2. G_2. Cayley 대수 $\mathbb{O}$ 의 자기 동형군을 G_2 라 한다:

$$\mathrm{G}_2 := \mathrm{Aut}(\mathbb{O}).$$

만약 $g : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ 가 동형이면 임의의 $x \in \mathbb{O}$ 에 대하여

$$g \circ R_x \circ g^{-1} = R_{g(x)}$$

이고 따라서

$$\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{Spin}(7)$$

이다. G_2 는 차원이 14 인 단순연결된 옹골 단순리군이다.

만약 $g \in \mathrm{G}_2$ 이면

$$g(\bar{c}) = \overline{g(c)} \qquad (c \in \mathbb{O})$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
\langle g(c_1), g(c_2)\rangle &= \frac{1}{2}\left(g(c_1)\overline{g(c_2)} + g(c_2)\overline{g(c_1)}\right) \\
&= \frac{1}{2}g\left(c_1\overline{c_2} + c_2\overline{c_1}\right) \\
&= g\left(\langle c_1, c_2\rangle\right) \\
&= \langle c_1, c_2\rangle
\end{aligned}$$

임을 안다.

실수는 Cayley 대수의 중심에 속하므로 g-불변이다. 따라서 순허수공간 $\mathrm{im}\,\mathbb{O}$ 도 g-불변이다:

$$g : \mathrm{im}\,\mathbb{O} \to \mathrm{im}\,\mathbb{O}.$$

그러므로

$$\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{SO}(7)$$

으로 이해할 수 있다.

G_2 의 원소가 $\mathbb{O}$의 **기본 3-형식**

$$\varphi_0(x, y, z) := \langle x, yz \rangle$$

를 보존하는 것은 쉽게 알 수 있다. 순허수 공간 $\mathrm{im}\,\mathbb{O}$ 의 표준 좌표계 $(x^2, \ldots, x^8)$ 에 대하여

$$dx^{ijk} := dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \qquad (2 \le i, j, k \le 8)$$

로 두면

$$\varphi_0 = dx^{234} + dx^{256} + dx^{287} + dx^{357} + dx^{368} + dx^{458} + dx^{476}$$

이다.

거꾸로, φ_0 을 변화시키지 않는 $\mathrm{im}\,\mathbb{O}$ 의 자기 선형사상은 G_2 의 원소이다.

8.2. Spin(7) 다양체

8차원 다양체 M 에서 열린 덮개 $\{U_\alpha\}$ 를 생각하자. 이때 U_α 들이 충분히 작으면 U_α 의 모든 점에서 정의되고 일차독립인 벡터장으로 이루어진 틀

$$e_\alpha = (e_{\alpha,1}, \ldots, e_{\alpha,8})$$

이 존재한다. 이러한 틀들은 공통 정의역에서 추이사상

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(8)$$

을 정의한다: $e_\beta = e_\alpha g_{\alpha\beta}$. 만약 열린 덮개 $\{U_\alpha\}$ 와 틀 $\{e_\alpha\}$ 를 잘 잡아 추이사상들 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 의 값이 $\mathrm{Spin}(7)\ \big(\subset \mathrm{SO}(8) \subset \mathrm{GL}(8)\big)$ 에 속하도록 할 수 있다면, 그러한 수집 $\{U_\alpha, e_\alpha\}$ 는 M 에 Spin(7)-구조를 준다. Spin(7)-구조는 M 에 리만계량과 향을 정한다. 더 나아가서 $\mathbb{O}$의 기본 4-형식 Ω_0 를 당겨서 M 전체에서 잘 정의된 미분 4-형식 Ω 를 정의한다.

이제 8차원 옹골 리만 다양체 (M, g) 이 Spin(7)-구조 Ω 를 가진다고 하자 ([28]). 그러면 다음이 동치이다:

(i) $H(M, g) \subset \mathrm{Spin}(7)$
(ii) $\nabla\Omega = 0$

(iii) $d\Omega = 0$.

그리고 위 조건이 만족되는 경우에

$$H(M, g) = \mathrm{Spin}(7)$$

일 필요충분조건은 M 이 단순연결되어 있고,

$$\hat{A}(M) = 1 \qquad (\text{ 또는 마찬가지로 } b^3 + b^4_+ = b^2 + 2b^4_- + 25 \text{ })$$

인 것이다 ([36]).

Joyce는 표준 Spin(7)-구조를 가지는 평평한 원환면 $\mathbb{T}^8 = \mathbb{R}^8/\mathbb{Z}^8$ 에서 Spin(7)-구조를 보존하는 등장 변환

$$\sigma : \mathbb{T}^8 \to \mathbb{T}^8, \qquad \sigma^2 = \mathrm{id}$$

들로 이루어진 유한군 G 를 생각하였다. 그리고 궤도다양체(orbifold) $\mathbb{T}^8/G$ 의 특이점을 분해하여 원하는 위상적인 성질을 가지는 8-차원 옹골 다양체를 얻었다. 그리고 약간 복잡한 해석학을 이용하여 $d\Omega = 0$ 인 Spin(7)-구조 Ω 를 가지는 리만 계량의 존재를 밝혔다. 이로부터 홀로노미군이 Spin(7) 인 다양체의 보기를 구하였다.

최근에 [Taylor]는 비슷한 방법을 이용하여 Spin(7) 홀로노미 군을 가지는 다양체를 많이 구하였다.

8.3. G_2 다양체

옹골 7-차원 리만 다양체 M 의 홀로노미군이 G_2 이면 M 은 G_2-구조를 가지고, 기본 3-형식 φ 가 닫힌 형식이다. 또 M 은 Ricci 곡률이 영이므로 "Bochner 기교"를 이용하여 제일 Betti 수 $b_1(M)$ 이 영이고, Cheeger-Gromoll 의 분해정리([Besse, p.168])에서 M 의 기본군 $\pi_1(M)$ 이 유한군임을 안다.

그러므로 홀로노미군이 G_2 인 옹골 다양체를 구하기 위해서는 $d\varphi = 0$ 인 G_2-구조를 가지는 다양체 (M, g, φ) 를 먼저 설계하여야 한다.

Joyce는 평평한 7-차원 원환면 $\mathbb{T}^7$ 을 유한 등장변환군 Γ 로 나눈 궤도공간 $\mathbb{T}^7/\Gamma$ 의 특이점들을 분해하여 원하는 보기들을 많이 들었다 [36].

이러한 보기는 최초로 발견된 Ricci 곡률이 영이고 단순연결된 홀수차원 옹골 리만 다양체이다.

8.4. 끈 이론

높은 에너지 이론 물리학의 한 분야인 "끈 이론"(string theory)은 양자역학과 중력이론을 통합하려는 것을 목표로 한다. 이 이론에서 "입자"란 "끈이라 부르는 1차원 다양체"이다. 이 이론 중의 하나인 "초대칭 끈 이론"에서는 우주란 국소적으로 $\mathbb{R}^4 \times M$ 이다. 여기에서 M 은 반경

이 10^{-33}cm 정도인 6-차원 옹골 다양체(Calabi-Yau 다양체)이다. 최근에 끈 이론 학자들은 'M 이론'에서 4+7 차원 우주를 논하고 ([64]), 'F 이론'에서 4+8 차원 우주를 논한기도 한다. 끈이론에 부정적인 견해를 가진 학자가 없는 것은 아니지만 ([52]), 이러한 이론과 예외적인 홀로노미를 가지는 다양체와의 관계를 연구하는 학자들이 있다.

참고 문헌

[1] J. Adams, *Lectures on Exceptional Lie Groups*, Univ. of Chicago Press, 1996.

[2] D. Alekseevski, *Riemannian spaces with exceptional holonomy groups*, Functional Anal. Appl. **2** (1968), 97–105.

[3] W. Ambrose, I. M. Singer, *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1953), 428–443.

[4] M. Atiyah, *HyperKähler manifolds*, in Complex Geometry and Analysis, Ed. V. Villani, Lec. Notes in Math. **1422** (1988), 1–13.

[5] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la lére classes de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 755-782.

[6] M. Berger, *Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955), 279–330.

[7] ———, *Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century*, Amer. Math. Soc., 2000.

[8] ———, *Encounter with a Geometer*, Notices of the Amer. Math. Soc. **47** (2000), 183–194, 326–340.

[9] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, 1987.

[10] A. Borel, *Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 580–587.

[11] ———, *Le plan projectif des octaves et les sphéres comme espaces homogénes*, C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 1378–1380.

[12] A. Borel, A. Lichnerowicz, *Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes*, C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 1835–1837.

[13] J. Bourguignon, *Premierès formes de Chern des variétés kählериennes compactes [d'après E. Calabi, T. Aubin et S. T. Yau]*, Séminaire Bourbaki, 30e annee (1977/78), Exp. No. 507, pp. 1–21, Lecture Notes in Math., 710, Springer, Berlin, 1979.

[14] ———, *Ricci curvature and Einstein metrics*, Global differential geometry and global analysis (Berlin, 1979), pp. 42–63, Lecture Notes in Math., 838, Springer, Berlin-New York, 1981.

[15] R. Bryant, *Submanifolds and special structures on the octonians*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 185–232.

[16] ———, *Metrics with exceptional holonomy*, Ann. Math. **126** (1987), 525–576.

[17] ———, *Classical, Exceptional, and Exotic Holonomies: A Status Report*, Actes de la Table Ronde de Geométrie Différentielle (Luminy, 1992), 93–165, Sémin. Congr., 1, Soc. Math. France, Paris, 1996.

[18] ______, *Recent Advances in the theory of holonomy*, Séminaire BOURBAKI, 1998–99, no. 861.

[19] R. Bryant, S. Salamon, *On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy*, Duke Math. J. **58** (1989), 829–850.

[20] E. Calabi, *On Kähler manifolds with vanishing canonical class* in Algebraic Geometry and Topology, a symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ. Press (1955), 78–89.

[21] ______, *Métriques kähleriennes et fibrés holomorphes*, Ann. Ecol. Norm. Sup. **12** (1979), 269–294.

[22] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **40** (1923), 325–412; **41** (1924), 1–25; **42** (1925), 17–88.

[23] ______, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*, Acta. Math. **48** (1926), 1–42.

[24] J. Casey, *Exploring Curvature*, vieweg, 1996.

[25] G. de Rham, *Sur la réductibilité d'un espace de Riemann*, Commen. Math. Helv. **26** (1952), 328–344.

[26] C. Ehresmann, *Les connexion infiniteésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologies, Bruxelles (1950), 29–55.

[27] A. Einstein, M. Grossmann, *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie des Gravitation; I. Physikalische Teil von A. Einstein, II. Mathematischer Teil von M. Grossmann*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **62** (1913), 225-261.

[28] M. Fernández, *A Classification of Riemannian Manifolds with structure Group Spin(7)*, Ann. Mat. Pura Appl. **143** (1986), 101–122.

[29] D. Freed, *Special Kähler manifolds*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), no. 1, 31–52. MR 2000f:53060

[30] A. Fujiki, *On primitively symplectic compact Kähler V-manifolds of dimension four*, in "Classification of algebraic and analytic manifolds" ed. Ueno, Progress in Math. **38** (1983), Birkhäuser.

[31] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[32] M. Gromov, *Sign and geometric meaning of curvature*, Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano **61** (1991), 9–123. MR 95j:53055

[33] R. Harvey, H. Lawson, *Calibrated Geometries*, Acta Mathematica **148** (1982), 48–157.

[34] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[35] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, 1995.

[36] D. D. Joyce, *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy* G_2 *I, II*, J. Diff. Geom. **43** (1996), 291–328, 329–375.

[37] ______, *Compact 8-manifolds with holonomy Spin(7)*, Invent. Math. **123** (1996), 507-552.

[38] ———, *Compact Manifolds with Exceptional Holonomy*, Geometry and Physics (Aarhus, 1995), 245–252, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **184**, Dekker, New York, 1997. MR: 97m:53085.
[39] ———, *Compact Manifolds with Exceptional Holonomy*, Doc. Math. Extra Vol. ICM 1998 II, 361–370.
[40] ———, *A new construction of compact 8-manifolds with holonomy Spin(7)*, preprint, 1999.
[41] ———, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Univ. Press, 2000.
[42] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, I, II, Interscience Publishers, 1963, 1969.
[43] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Rome, 1957.
[44] J. McCleary, *Geometry From a Differentiable Viewpoint*, Cambridge Univ. Press, 1994.
[45] S. A. Merkulov, L. J. Schwachhöfer, *Addendum to: "Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections" [Ann. of Math. (2)* **150** *(1999), no. 1, 77–149]*. Ann. of Math. (2) **150** (1999), no. 3, 1177–1179.
[46] D. Montgomery, H. Samelson, *Transformation groups of spheres*, Ann. Math. **44** (1943), 454–470.
[47] S. Mukai, *Symplectic structure on the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surfaces*, Invent. Math. **77** (1984), 101–116.
[48] E. Nelson, *Tensor Analysis*, Princeton Univ. Press, 1967.
[49] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. Math. **65** (1957), 391–404.
[50] K. Nomizu, H. Ozeki, *The existence of complete Riemannian metrics*, Proc. Amer. math. Soc., **12** (1961), 889–891.
[51] J. Oprea, *Geometry and Foucault Pendulum*, Amer. Math. Monthly **102** (1995), 515–522.
[52] R. Penrose, *Mathematical physics on the* 20^{th} *and* 21^{st} *century*, in Mathematics: Frontiers and Perspectives, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, editors, Amer. Math. Soc. (2000), 219–234.
[53] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Springer, 1998.
[54] ———, *Aspects of global Riemannian geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 297–344.
[55] B. Polster, *Yea Why Try Her Raw Wet Hat, A Tour of the Smallest Projective Space*, The Mathematical Intelligencer **21** No. 2 (1999), 38–43.
[56] W. Poor, *Differential Geometric Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1981.
[57] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs **149**, Amer. Math. Soc., 1996.
[58] S. Salamon, *Riemannian geometry and holonomy groups*, Longman Scientific & Technical, 1989.
[59] J. Simons, *On the transitivity of holonomy system*, Ann. Math. **76** (1962), 213–234.
[60] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to DIFFERENTIAL GEOMETRY*, Vol. II, Publish or Perish, Inc., 1979.

[61] C. Taylor, *New examples of compact 8-manifolds of holonomy Spin(7)*, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 5-6, 557–561.

[62] V. V. Trofimov, *Introduction to Geometry of Manifolds with Symmetry*, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[63] B. Wilking, *On compact Riemannian manifolds with noncompact holonomy groups*, preprint, 1999.

[64] E. Witten, *Magic, mystery, and matrix*, in Mathematics: Frontiers and Perspectives, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, editors, Amer. Math. Soc. (2000), 343–352.

[65] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

[66] S. T. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **74** (1977), 1798–1799.

[67] ———, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampére equation I*, Com. Pure and Appl. Math. **31** (1978), 339–411.

서울대학교 수리과학부
서울 151–747