

## Einstein 부유사량 산정식의 개선 Improvement of Einstein's Suspended Load Equation

유 동 훈\* / 신 승 호\*\* / 임 학 수\*\*\*  
Yoo, Dong Hoon / Shin, Seung Ho / Lim, Hak Soo

---

### Abstract

In the present work Einstein's(1942) suspended load equation is refined in various aspects. After checking the flow characteristics a new method is presented for the estimation of zero velocity point at the condition of smooth turbulent flow, and non-dimensional number of suspended load is introduced for the clear representation of suspended load equation. And a recent equation of bed load is employed in order to calculate accurately the sediment concentration at a reference point. Several approximation equations are also developed to compute directly or explicitly two integrals introduced in the equations. The refined equation has been tested against the measurement data collected by Brownlie(1981) in comparison with Einstein's original equation.  
*keywords* : suspended load, zero velocity point, smooth turbulent flow, non-dimensional number of suspended load, bed load, sediment concentration

---

### 요 지

Einstein(1942)의 부유사량 산정식 유도과정에 있어 몇 가지 문제점들을 개선하였다. 수류조건을 판별하여 완 난류 조건에서 유속의 영점높이를 산정하는 방법을 제시하고 부유사량 산정식을 일반화할 수 있는 무차원수를 도입하였다. 또한, 기준점 농도 산정의 정확성을 개선하기 위하여 최근에 개발된 소류사량 산정식으로부터 관련치를 추정하였으며, 수치적으로 또는 도표를 이용하여 해를 구해야 하는 수심적분치의 근사식을 개발하였다. Einstein의 기존 부유사량 산정식과 개선된 부유사량 산정식의 정확도를 검토하여 Brownlie(1981)가 수집한 자료에 대한 산정결과를 제시하였다.

**핵심용어** : 부유사, 영점높이, 부유사량 무차원수, 완난류조건, 소류사량, 임계마찰력, 부유사 농도, 양해적 근사적분식

---

\* 아주대학교 토목설계공학과 교수  
Professor, Dept of Civil Engrg., Ajou Univ., Suwon, Kyonggi, 442-749, Korea  
(E-mail : dhy@hydroprogram.com)

\*\* 국토연구원 연구원  
Researcher, Korea Research Institute for Human Settlement, Anyang, Kyonggi, 431-712, Korea

\*\*\* 아주대학교 건설교통공학과 석사과정  
Graduate Student, Dept. of Civil and Traffic Engrg. Ajou Univ., Suwon, Kyonggi, 442-749, Korea(E-mail : hslim@hanalook.com)

## 1. 서론

부유사란 물보다 비중이 큰 토사가 유수상태에서 난류의 와운동으로 인하여 입자의 무게보다 큰 연직방향 힘에 의하여 부유되어 이동하는 것을 말한다. 황천시 하천이나 해안에서의 토사 이동량은 일반적으로 소류사량보다 부유사량이 큰 것으로 알려져 있다. 부유사량을 해석하는 기본적인 개념은 부유사 운동이 평형상태에 도달할 경우, 난류에 의한 운동속도에 의해 연직방향으로 운동되는 토사량이 침강에 의한 양과 일치한다고 가정하는 것이다. 이 가정에 따라 해석하기 위해서는 부유사의 연직방향에 대한 농도분포와 유속에 관한 산정방법이 필요하다.

1940년대 개발된 Einstein(1942)의 부유사량 산정식은 지금까지도 실무에서 많이 이용되고 있는 반면에 최근의 관측자료와 비교하여 신뢰성이 상당히 떨어지는 것으로 확인되었다. 이는 이론적으로 유도된 Einstein식의 유도과정에 있어 몇 가지 가설의 문제점들 때문인 것으로 추정된다.

Einstein의 부유사량 산정식이 제시된 후, 기존식의 결점들을 보완하기 위하여 Bagnold(1966), Engelund과 Hansen(1967), Acker and White(1973) 등은 하천의 상사이론을 바탕으로 유속의 평균속도와 소류력의 곱의 함수를 사용한 전유사량식을 제시하였다. 상사법칙을 기초로 개발된 대부분의 산정식들은 경험계수의 조정만으로 관측자료와 비교하여 상당히 양호한 산정결과를 보여준다. 그러나 물리적 현상규명이 미흡하거나 결여된 상사법칙 산정식들은 다양한 현장조건에 대한 적합성이 부족할 것으로 여겨져 왔다.

한편 최근 van Rijn(1984)은 농도영향을 고려한 침강속도식과 소류사 경계층 두께를 소류사량 산정식으로부터 부유사량 적분식을 개선하였으며 일정 수리조건에 적합한 양해적 근사식을 개발하였다. 본고에서는 van Rijn(1984)과 같이 Einstein이 제시한 경계층 두께 대신에 최근에 개발된 소류사량 산정식을 도입하여 부유사와 소류사의 경계층 두께를 산정하였다. 하상에서의 소류사 이동속도를 계산하기 위하여 Einstein이 제시한 단순한 관계식을 지양하고 임계마찰력을 고려하여 그 잉여치를 소류사 이동속도 산정식에 도입하였다. 또한 부유사의 연직농도 산정에 있어서 중요한 기준점 농도의 정밀산정을 위하여 최근에 개발된 경계층식과 하상속도식, 그리고 소류사량식을 이용하였다. Einstein 부유사량식에 대하여 여러 연구자들이 와점

성계수를 조정하여 개선하였으나 그 결과가 크게 향상되지 않아 본고에서는 영점높이의 재검토로 개선책을 마련하고자 하였으며, 이를 위하여 개수로 흐름 조건을 전난류(rough turbulent flow) 조건이 아닌 원난류(smooth turbulent flow) 조건으로 가정하여 적분식을 유도하였다.

상기식의 검토 후 최근의 소류사량 공식에 이용된 무차원수를 도입하여 Einstein의 기본식과 개선된 식을 이용하여 산정한 후 실제 토사 이동량과 비교하여 그 결과를 제시하였다. 또한 부유사량 산정에 도입되는 적분식을 간편하게 산정할 수 있는 근사식을 개발하여 제시하였다. van Rijn이 개발한 근사식은 수리조건외 범위가 상당히 제한되어 있는데, 본 연구에서 개발된 근사식은 실제 현장에서 나타나는 수리조건 범위를 모두 포함하였다.

## 2. Einstein 부유사량 산정식

부유사량의 크기는 부유사량 농도에 유속을 곱하여 구할 수 있다. 부유사 농도는 연직으로 대수분포를 가지며 부유사량의 계산은 수로단면의 미소면적을 통과하는 토사량을 전수심에 걸쳐 적분하여 계산한다. 따라서 단위폭당 부유사량  $q_s$ 는 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$q_s = \int_{\delta}^h c_z u_z dz \quad (1)$$

여기서  $c_z$ 는 수로바닥으로부터 연직으로  $z$ 만큼 떨어진 지점에서의 부유사농도,  $u_z$ 는  $z$ 위치에서의 점유속이고,  $\delta$ 는 수로 바닥으로부터 취한 미소거리로서 부유사와 소류사의 경계점까지의 거리이며,  $h$ 는 전수심이다.

부유사량은 식 (1)의 적분에 의하여 구할 수 있으며, 이러한 방법은 지금까지의 이론 및 경험적 방법 중 가장 많이 활용되고 있다. Einstein은 소류사량 산정에 서처럼 하상재료의 입도분포에 의해 몇 개의 입자크기 구간으로 나누고 구간별 부유사량을 계산하여 합산하는 방법을 채택하였다. 식 (1)의 토사를 부유시키는 점유속  $u_z$ 의 분포식으로서 Prandtl(1925)이 개발한 식은 다음과 같다.

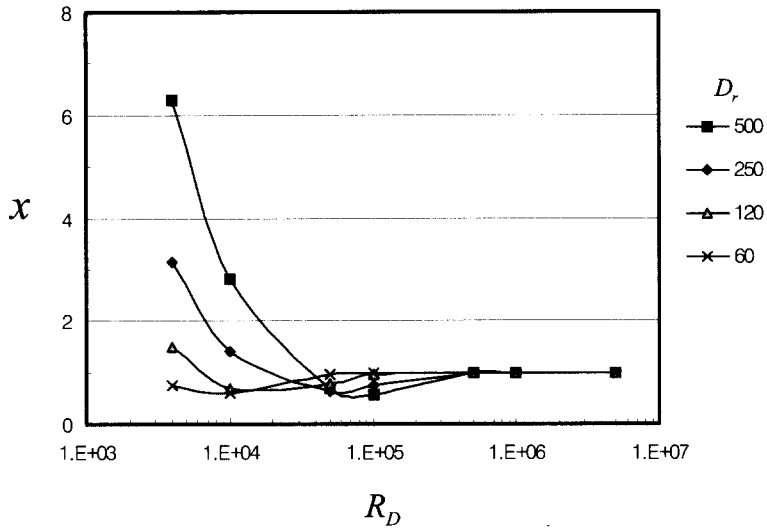


그림 1. 관경레이놀즈( $R_D$ )에 대한 영점높이비의 변화율( $x$ )

$$\frac{u_z}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{z}{z_o} \quad (2)$$

상기식 (2)에서  $k$ 는 von Karman 상수로 0.4이며,  $u_*$ 는 수로 바다에서의 마찰속도이고,  $z_o$ 는 유속이 영으로 수렴하는 영점높이이다. Einstein은 식 (2)의 영점높이  $z_o$ 를 다음과 같이 가정하였다.

$$z_o = \xi k_w \quad (3)$$

상기식 (3)에서  $k_w$ 는 등가조고이며  $k_w = \phi_{65}$  즉, 하상토사의 입도분포곡선에 있어서 분포율 65%에 해당하는 입경으로 가정하였다. 등가조고  $k_w$ 에 대한 영점높이  $z_o$ 의 비는  $\xi = 1/30 x$ 으로  $x$ 는 수리조건에 따라 변이하는 영점높이비의 변화율이다. Einstein은  $x$ 를 추정하기 위하여 Nikuradse의 관로마찰계수 분포로부터 추정된 그림 1을 이용할 것을 제안하였다. 그림에서  $R_D$ 는 관경레이놀즈 수  $VD/\nu$ 이고,  $D_r$ 은 등가조고  $k_w$ 에 대한 관경( $D$ )의 비를 나타낸다. 한편 유동훈과 강기훈(1995)은 완난류, 천이난류 구간 등 각 구간에 적합한 양해법 영점높이비 산정식을 개발하

였다. 그러나 유동훈-이종원(1997)과 유동훈-이민호(1999)에 의하면 폭넓은 사각형 개수로에서는 주로 완난류조건인 흐름이 발달하며 이때 영점높이는 점성계수와 마찰속도의 비( $\nu/u_*$ )에 비례함을 알 수 있다. 또한, 부유사 농도는 Rouse(1946)가 개발한 다음 식 (4)로 산정된다.

$$c_z = c_b \left( \frac{h-z}{z} \cdot \frac{\delta}{h-\delta} \right)^Z \quad (4)$$

$$Z = \frac{w_f}{k u_*} \quad (5)$$

여기서  $c_b$ 는 소류사층의 평균농도이며,  $Z$ 는 Rouse 수라 칭하고,  $w_f$ 는 침강속도이다.

부유사량 산정식 (1)에 식 (4)의 부유사농도  $c_z$ 와 식 (2)의 점유속  $u_z$ 를 대입하여 적분하면다음과 같다.

$$q_s = \frac{u_*}{k} h c_b \left( \frac{A}{1-A} \right)^Z [P, J_1 + J_2] \quad (6)$$

여기서

$$A = \frac{\delta}{h} \quad (7)$$

$y = z/h$  로 표기할 경우,  $P_r, J_1, J_2, Z$  는 다음과 같다.

$$P_r = \ln\left(\frac{h}{z_0}\right) \quad (8)$$

$$J_1 = \int_A^1 \left(\frac{1-y}{y}\right)^Z dy \quad (9)$$

$$J_2 = \int_A^1 \left(\frac{1-y}{y}\right)^Z \ln y dy \quad (10)$$

부유사랑 산정식을 일반화하기 위하여 식 (6)에 소류사층의 평균농도  $c_b = \frac{q_b}{\delta u_b}$  를 대입하여 전개하면 부유사랑은 소류사랑( $q_b$ )의 함수로 다음과 같이 산정된다.

$$q_s = \frac{u_*}{k u_b} \frac{A^{Z-1}}{(1-A)^Z} [P_r J_1 + J_2] q_b \quad (11)$$

식 (11)의 부유사랑식을 소류사랑식의 비례형태로 표기하면 다음과 같다.

$$q_s = \zeta q_b \quad (12)$$

$$\zeta = \frac{u_*}{k u_b} \frac{A^{Z-1}}{(1-A)^Z} [P_r J_1 + J_2] \quad (13)$$

Einstein(1950)은 바닥 경계 두께  $\delta = 2\phi$  로 토사입동속도  $u_b = 11.6 u_*$  로 가정하여 소류사층의 평균농도  $c_b$ 를 다음과 같은 식으로 산정하였다. 여기서  $\phi$ 는 토사입경이다.

$$c_b = \frac{1}{11.6} \frac{q_b}{\delta u_*} \quad (14)$$

이를 부유사랑 산정식 (6)에 대입하면 식 (13)은 다음과 같이 간략화할 수 있다.

$$\zeta = P_r I_1 + I_2 \quad (15)$$

식 (15)에서  $I_1, I_2$ 는 각각 식 (16), (17)과 같다.

$$I_1 = 0.216 \frac{A^{Z-1}}{(1-A)^Z} J_1 \quad (16)$$

$$I_2 = 0.216 \frac{A^{Z-1}}{(1-A)^Z} J_2 \quad (17)$$

또한 토사입동량 산정식 비교를 위하여 무차원수를 도입하였는데 Meyer-Peter-Mueller(1948)가 제시한 무차원수  $\Phi_M$  은 다음과 같다.

$$\Phi_M = \frac{q}{\sqrt{(s-1)g\phi^3}} \quad (18)$$

식 (18)에서  $q$ 는 단위폭당 토사입동량이며,  $s$ 는 토사의 상대밀도,  $g$ 는 중력가속도이다. 부유사랑과 소류사랑에 적용할 수 있도록 토사입동량 무차원수에 소류사랑  $q_b$ 를 대입하여 식 (19)와 같이 소류사랑 무차원수  $\Phi_B$  를 정의하고, 부유사랑  $q_s$ 를 대입하여 식 (20)과 같이 부유사랑 무차원수  $\Phi_S$  를 정의하였다.

$$\Phi_B = \frac{q_b}{\sqrt{(s-1)g\phi^3}} \quad (19)$$

$$\Phi_S = \frac{q_s}{\sqrt{(s-1)g\phi^3}} \quad (20)$$

식 (13)에 상기의 토사입동량 무차원수를 도입하여 정리하면 부유사랑 무차원수는 다음과 같다.

$$\Phi_S = \zeta \Phi_B \quad (21)$$

### 3. 종말속도와 영점높이

낙하물체는 중력과 부력이 작용함과 동시에 항력을 받는데, 낙하 초기에는 중력가속도를 받아 점차 속도가 증가하다가 어느 조건에 이르면 부력과 항력의 합이 중력과 평형을 이루어 속도가 더 이상 증가하지 않고 일정 속도에 도달하게 된다. 이러한 일정속도를 종말속도(terminal velocity)라 칭하며, 종말속도에 이르기

전에 낙하속도는 점차 가속하게 된다. 정수 중 낙하물체의 시간별 낙하속도 및 낙하이동거리의 산정은 낙하하는 물체의 침강속도와 최종침강속도인 종말속도가 주된 영향을 미치므로 이의 정확한 산정이 중요하다.

낙하하는 물체의 항력을 산정할 때 종말속도  $w_t$ 는 힘의 평형식으로 다음과 같이 산정된다.

$$F_t = \sqrt{\frac{4}{3C_D}} \quad (22)$$

여기서  $C_D$ 는 토사의 항력계수이며,  $F_t$ 는 상대밀도 종말후루드수(relative densimetric terminal Froude number)로서 다음과 같다.

$$F_t = \frac{w_t}{\sqrt{(s-1)g\phi}} \quad (23)$$

식 (23)에서  $w_t$ 는 종말속도이다.

유동훈(1995)은 종말속도 산정식들에 무차원수  $N$ 을 대입하고 종말속도를 입경, 중력가속도, 상대밀도 점성계수의 함수로 다음과 같이 제시하였다.

$$F_t = 1.826 \tanh X \quad (24)$$

$$\begin{aligned} X &= 0.030N & N < 4.5 \\ X &= 0.041N^{0.8} & 4.5 < N < 18.9 \\ X &= 0.158N^{0.34} & 18.9 < N \end{aligned}$$

식 (24)에서 종말속도를 포함한 무차원수 레이놀즈수  $R$  대 후루드수  $F$ 의 비인 Reynolds-Froude 무차원수  $N$ 은 다음과 같다.

$$N = \frac{R}{F} = \frac{\sqrt{(s-1)g\phi^3}}{\nu} \quad (25)$$

부유사랑 산정에 있어서 Einstein이 고려한 개수로의 유속흐름은 조고비만의 함수로 표현되는 전난류 산정식이다. 그러나 유동훈과 이민호(1999)는 개수로 실험자료를 정밀 검토하여 개수로 흐름에서도 분명히 다섯 가지의 흐름특성이 존재하며, 폭넓은 사각형 개수로 흐름에서는 대부분 동수반경레이놀즈수가 증가함에 따라 마찰계수가 감소하는 완난류 흐름임을 간접적으로 확인하였다. 토사이동 실험은 수심에 비해서 폭이 넓은 사각형 수로에서 수행한다. 따라서 Einstein의 부유사

랑 산정식중 식 (8)의 영점높이( $z_o$ )는 전난류 조건이 아닌 완난류 조건일 수도 있음을 알 수 있다. 한편, 영점높이를 Prandtl의 대수분포식 (2)에 도입하고 어떤 형태의 개수로 단면에 적분하여도 다음과 같은 마찰계수 산정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{\alpha}{k} \left[ \ln \frac{H}{z_o} + \beta \right] \quad (26)$$

여기서 마찰계수  $C$ 는 영점높이 산정식의 형태에 따라 완난류 조건에서는 동수반경 레이놀즈수  $R_H (= \frac{VH}{\nu})$ , 마찰계수, 등가조고 등의 함수이며, 전난류 조건에서는 조고비와 등가조고의 함수이다.  $H$ 는 동수반경이지만 팽곡수로로 가정할 경우 수심  $h$ 와 같다고 가정할 수 있으며  $\beta$ 는 -1 이다.

한편, 유동훈과 이민호(1999)는 학술지에 발표된 기존 관측자료를 이용하여 다음과 같은 사각형 완난류 양해법 마찰계수 산정식을 개발하였다.

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{\alpha}{k} \left[ \ln R_H^{0.89} + \beta_{HS}' \right] \quad (27)$$

상기식 (27)에서  $\alpha$ 는 주로 수로형상에 따라 결정되는 기율기이고,  $\beta_{HS}'$ 는 질점계수이다. 또한, 완난류 마찰계수 산정식 (27)과 (26)을 같게 놓으면 영점높이 산정식은 다음과 같이 유도된다.

$$z_o = e^{\beta - \beta_{HS}'} h R_H^{-0.89} \quad (28)$$

유동훈과 이민호(1999)는 질점계수  $\beta_{HS}'$ 에 대하여 사각형 개수로에서 계수  $\beta_{HS}' = 1.53 - 1.01k_w$ 로 추정하였으며 이를 식 (28)에 대입하면 다음과 같다.

$$z_o = e^{\beta - 1.53 + 1.01k_w} h R_H^{-0.89} \quad (29)$$

여기서  $k_w$  단위는 mm를 사용하여 표면장력과 마찰력을 대표하는 수치로서 실제로는 무차원수이다.  $k_w$ 를 토사이동경에 비례한다고 가정하고,  $k_w = \mu\phi$ 를 대입하면

$$z_o = e^{-B} h R_H^{-0.89} \quad (30)$$

여기서

$$B = 1.53 - \beta - 1.01\mu\phi \quad (31)$$

식 (31)로 도출된 바와 같이  $P_r$ 은 레이놀즈수와 함께 계수  $B$ 의 함수이며,  $B$ 는 토사입경과 계수  $\beta$ 와  $\mu$ 의 함수이다. 이들 계수들은 수로 형상과 하상조건에 따라 변이하는 것으로 추정된다.

식 (8)에 식 (30)을 대입하여 정리하면 완난류 조건인 경우  $P_r$ 은 다음과 같다.

$$P_r = \ln\left(\frac{h}{z_o}\right) = 0.89 \ln R_H + B \quad (32)$$

#### 4. 부유사량 양해적 근사식

부유사량 식을 유도할 때  $c_b$ 는 소류사층 경계에서의 부유사농도이며 이는 소류사층의 평균농도  $c_b$ 와 거의 같다고 간주하여 다음과 같이 추정된다.

$$c_b = \frac{q_b}{u_b \delta} \quad (33)$$

식 (33)에서  $\delta$ 는 수로바닥에서 취한 미소거리로서 부유사와 소류사의 경계선까지의 거리이며 이 점에 대하여 Einstein은 단순히 토사입경의 2배로 간주하였다. 한편, van Rijn은 소류사층의 두께를 산정하기 위하여 무차원입경  $D_{gr}$ 과 이동단계지수  $T$ 의 함수비로 바로 구하는 추정식을 개발하였는데 이를 재분석하면 다음과 같다.

$$\delta = 0.48(S-1)^{0.82} N^{0.47} \phi \quad (34)$$

여기서  $S$ 는 입계마찰력에 대한 마찰력의 비 ( $u_* / u_{*c}$ )이며, 활동지수(mobility ratio)라 칭한다.

Einstein은 소류사층의 이동속도를 마찰속도에 비례하는 식으로  $11.6 u_*$ 를 제시하였다. 그러나 이 식은 마찰력이 입계마찰력 보다 작을 때에도 소류사층의 이동속도를 계산하므로 본고에서는 다음과 같은 유동훈(1996)의 하상속도식을 이용하였다.

$$u_b = 7.25(S-1)^{0.2} u_* \quad (35)$$

여기서  $S < 1$ 일 때  $u_b = 0$ 이다. 또한 Einstein의

소류사량 산정식은 마찰속도가 작을 때도 소류사량을 산정하는 단점이 있으므로 그 단점을 보완하기 위하여 입계마찰력의 항을 고려한 Yoo(2000)의 소류사량 산정식 (36)을 적용한다.

$$q_b = 1.7N^{-0.2}(S-1)^2 F_* \sqrt{(s-1)g\phi^3} \quad (36)$$

지금까지 소류사층 두께, 소류사층의 이동속도식, 소류사량 산정식을 검토하였는데 마찰후루드수  $F_* = u_* / \sqrt{(s-1)g\phi}$ 를 도입하고 식 (34)와 식 (35), 식 (36)을 식 (33)에 대입하여 정리하면 기준점 농도식은 다음과 같다.

$$c_b = 0.488(S-1)^{0.98} N^{-0.67} \quad (37)$$

상기 제시된 하상속도식 (35)를 식 (13)에 대입하면 소류사량에 대한 부유사량의 비  $\zeta$ 는 다음과 같다.

$$\zeta = 0.345(S-1)^{-0.2}(P_r K_1 + K_2) \quad (38)$$

여기서  $K_1$ 과  $K_2$ 는 다음과 같다.

$$K_1 = \frac{A^{z-1}}{(1-A)^z} J_1 \quad (39)$$

$$K_2 = \frac{A^{z-1}}{(1-A)^z} J_2 \quad (40)$$

일반적으로 Einstein식의 산정을 위해서는 복잡한 적분식 (16)과 (17) 또는 식 (9)과 (10)의 해를 구하기 위하여 수치해석을 이용하거나 그래프를 이용하여야 한다. 이러한 불편함을 줄이기 위해서  $A$ 의 범위에 따라 다양한 형태의 근사식을 개발하였으며 다음과 같다.

$$J = a + b \exp(cZ) \quad (41)$$

$$J = a \exp(bZ^c) \quad (42)$$

$$J = a + bZ + cZ^2 \quad (43)$$

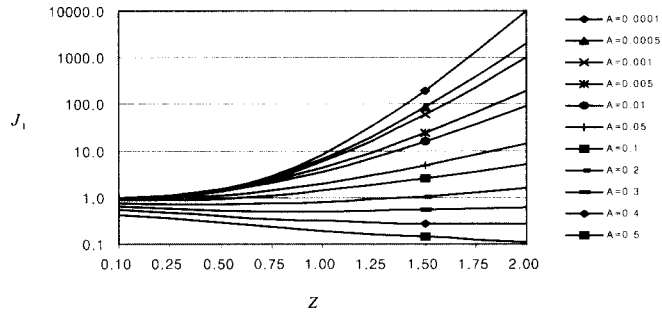
식 (40), (41), (42)에 사용되는 각 수치는 표 1에 제시되어 있다.

그림 2와 그림 3에는 정밀식 (9)과 (10)에 의한 산

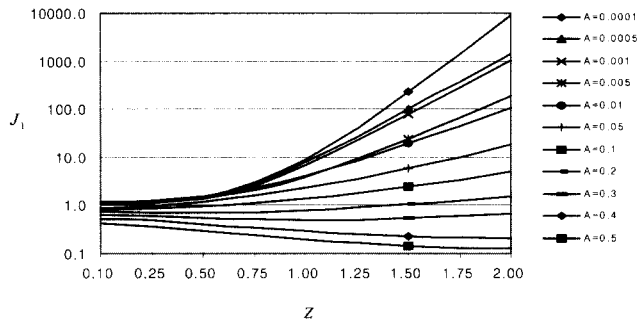
표 1. 부유사량 적분치의 근사식 적용 범위와 계수

| 구 간                      | 관련식  | 계수 | $J_1$                      | $J_2$                       |
|--------------------------|------|----|----------------------------|-----------------------------|
| $0.0001 \leq A < 0.0005$ | (41) | a  | 1.2                        | -1.2                        |
|                          |      | b  | $0.0036 - 0.885A + 678A^2$ | $-0.027 + 11.8A - 32500A^2$ |
|                          |      | c  | $7.54 - 2587A$             | $7.67 - 2442A$              |
| $0.0005 \leq A < 0.02$   | (41) | a  | 1                          | -1                          |
|                          |      | b  | $0.035 - 0.885A + 678A^2$  | $-0.026 - 26.48A + 988A^2$  |
|                          |      | c  | $5.46 - 337A + 14152A^2$   | $-0.423 - 0.9 \ln A$        |
| $0.02 \leq A < 0.2$      | (42) | a  | $0.88 - 0.15A - 3.36A^2$   | $-0.95 + 2.5A$              |
|                          |      | b  | $1.61 - 14.37A + 35.72A^2$ | $2.44 - 19.24A + 49.67A^2$  |
|                          |      | c  | $1.68 - 2.75A + 35A^2$     | $1.31 - 0.58A + 5.1A^2$     |
| $0.2 \leq A < 0.5$       | (43) | a  | $1.03 - 1.153A$            | $-0.6 + 0.91A$              |
|                          |      | b  | $-0.43 + 0.24A - 0.175A^2$ | $-0.37 + 1.82A - 1.82A^2$   |
|                          |      | c  | $1.07 - 4.46A + 5A^2$      | $-0.43 + 1.83A - 2A^2$      |

정밀해는 수치적분하여 구하였고 이에 대한 회귀 분석을 실시하여 근사식을 구하였다. 근사식에 의한 산  
 정밀해는 수치적분하여 구하였고 이에 대한 회귀 정은 계산이 편리할 뿐 아니라 원식의 수치적분해와

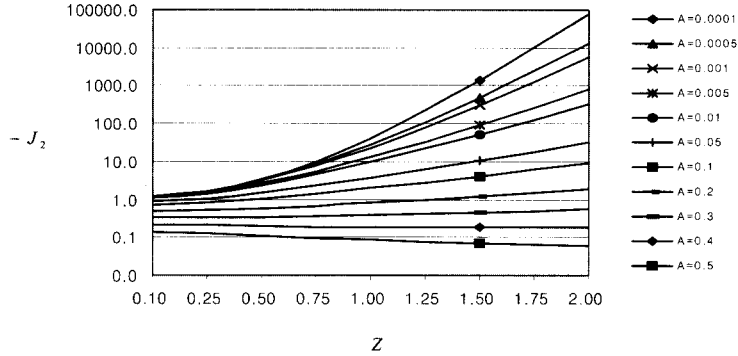


(a) 정밀식

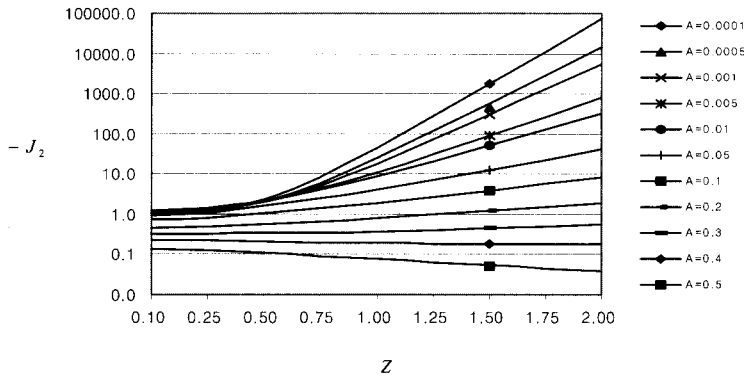


(b) 근사식

그림 2. 정밀식과 근사식에 의한  $J_1$  값의 비교



(a) 정밀식



(b) 근사식

그림 3. 정밀식과 근사식에 의한  $J_2$  값의 비교

비교하였을 때, 정밀도가 상당히 높은 것으로 나타났다. Rouse 수  $Z$ 가 5이상일 경우에는 부유사가 거의 발생하지 않는 것으로 간주하여 근사식 추정에서 제외하였다.

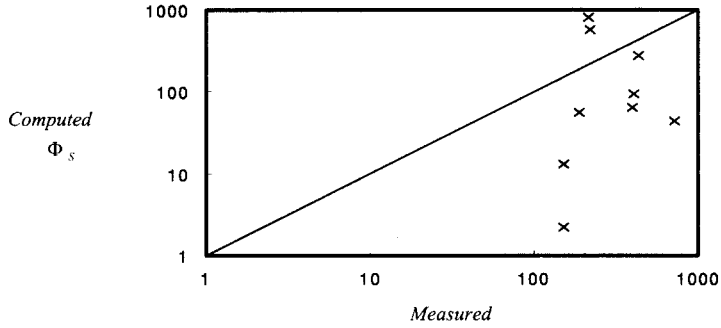
### 5. 자료 분석

부유사량 산정식의 검증을 위하여 자료가 방대하고 다양하며 제시된 수리조건이 명확한 Brownlie(1981)의 자료를 이용하였다. Brownlie의 자료집(1981)에는 7,000여개의 실험 수로 및 하천 실측 자료가 있다. Brownlie의 수집자료를 보면 하상의 형태에 따라서 8가지 자료로 구분하고 있다. 먼저 평탄하상(plane bed) 가까이서 막 움직이려는 형태, 그리고 Ripples,

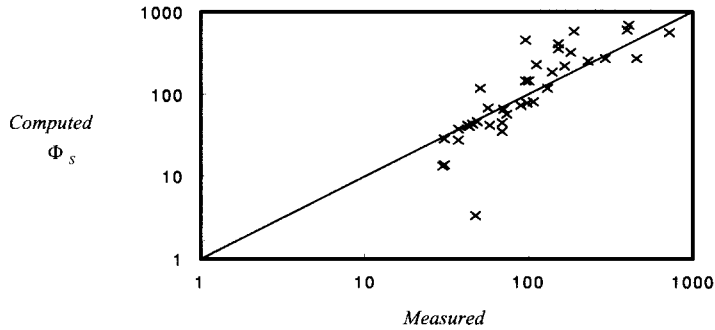
Dunes, Transition, Plane bed, Standing waves, Antidunes, Chute-pool로 구분하고 있다. 이중 부유사량과 밀접한 관련이 있는 자료를 추출하였다. 이 자료중에서 부유사량 산정식을 검증하기 위해 van Rijn이 제시한 소류사와 부유사의 구분방법을 사용하였다.

van Rijn은 소류상태와 부유상태를 구분함에 있어서 사립자의 최대도약고를 운동 방정식으로 기술하고, 입자가 최대도약고 보다 낮게 도약하면 소류사로, 더 높이 도약하면 부유사로 구분하였다. 이를 마찰 속도  $u_*$ 와 침강속도  $w_f$ 의 함수로 표시하고,  $u_*/w_f < 1$ 이면 소류상태,  $u_*/w_f > 1$ 이면 부유상태가 된다고 제시하였다. 이 방법과 충분한 수심을 만족하는 Brownlie 자료의 수는 총 40개이다.

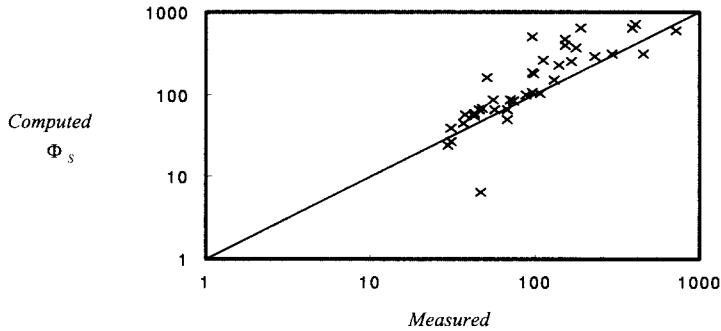




(a) 기본식



(b)  $J_1, J_2$  적분식



(c)  $J_1, J_2$  근사식

그림 4. Einstein의 기본식, 개선식( $J_1, J_2$  적분식, 근사식)에 의한 산정결과

개선된 부유사량 공식의 우수성을 비교함에 있어서 Brownlie(1981) 자료에서 구한 토사량 실측치와의 비교를 시도하였다. 각 공식의 정확도는 불일치율( $r$ )의 향들로 산정하여 비교하였다.

$$\text{불일치율}(r) = \frac{\text{토사량산정치}}{\text{토사량실측치}}$$

표 2는 Einstein 소류사량 기본식과  $J_1, J_2$ 를 적분식과 근사식으로 적용한 Yoo의 소류사량 개선식을 Brownlie에 의해 전세계에서 수집한 실측 토사량 자료에 대하여 불일치율의 범위  $r = 0.77 \sim 1.3, 0.67 \sim 1.5, 0.5 \sim 2$ 에서의 일치율을 계산하여 제시하였다. 여기서 일치율은 각 공식의 우열을 가늠하는 기준으로 사용되며 최대 값은 1이다.

표 2. 부유사량 산정식의 일치율과  $\zeta$  계수

|             |                   | $\zeta$                            | $\phi_B$                  | 일 치 율      |            |           |
|-------------|-------------------|------------------------------------|---------------------------|------------|------------|-----------|
|             |                   |                                    |                           | 0.77<r<1.3 | 0.67<r<1.5 | 0.5<r<2.0 |
| Einstein 식  |                   | $P_r I_1 + I_2$                    | $40 F_t F_*^6$            | 0.025      | 0.125      | 0.2       |
| 개<br>선<br>식 | $J_1, J_2$<br>적분식 | $0.345(S-1)^{-0.2}(P_r K_1 + K_2)$ | $1.7 N^{-0.2}(S-1)^2 F_*$ | 0.5        | 0.63       | 0.83      |
|             | $J_1, J_2$<br>근사식 |                                    | $1.7 N^{-0.2}(S-1)^2 F_*$ | 0.48       | 0.63       | 0.83      |

그림 4에는 표 4에서 산정된 일치율을 도시하였다. 그림에 나타난 바와 같이 Einstein 기본식으로 추정된 산정치는 토사량 실측치보다 상당히 작게 산정되는 경향을 보이고 있다. 또한 Einstein 소류사량 공식은 부유사량이 음의 값으로 나타나기도 한다. Einstein의 부유사량 개선식은 Einstein의 기본식에 비하여 산정치가 분산되지 않고 크게 개선된 것을 알 수 있다. 이식이 토사량 실측치와 근접한 산정결과를 보이는 이유는 Yoo(2000)의 소류사량 산정식이 Einstein식에 비하여 더욱 정밀하고, 개수로의 완만류 조건식을 적용하여 계수  $P_r$ 의 산정이 더욱 합리적이고 정확하기 때문이다. 본 연구에서 계수  $P_r$ 의 추정을 위하여 완만류 영점높이 산정식을 도입하여 관련식 (32)를 개발하였는데, 관측자료에서 입경의 범위가 크지 않은 관계로 모든 자료에 동일한 수치를 적용하여 회귀분석한 결과  $B = -6.6$  로 추정되었다. 따라서  $\mu = 1$  로 가정하면  $\phi \approx 0.1mm$  이므로 식 (31)의  $\beta$ 는 약 8.03으로 추정된다. Einstein의 부유사량 개선식에  $J_1, J_2$ 의 양해적 근사해를 이용한 수치는 수치적분하여 구한 산정결과와 거의 일치하는 것으로 나타났다.

### 6. 결 론

본 연구에서는 기존의 부유사량 산정식의 문제점을 파악하고 개수로의 완만류조건을 도입한 후 Brownlie의 토사량 실험자료를 분석하였다. 이러한 과정에서 기존 Einstein의 부유사량 산정식의 결함과 적용상의 어려움을 확인하고 개선하였다.

부유사량 산정식의 경우 무차원화 하였을 때 기존 부유사량 산정식의 복잡성을 탈피하여 계산과정의 단순화가 가능하였다. 또한, 기준점 농도 산정식의 개선

을 위하여 최근에 개발된 소류사 이동량 산정식의 경계층위치, 소류사층의 이동속도식 등을 도입하였다. Einstein이 제시한 전만류조건을 완만류조건으로 수정하여 도입하면 정밀도가 향상되는 것으로 보아 개수로의 유수 흐름조건은 대부분의 경우 완만류조건인 것을 간접적으로 확인할 수 있었다. 또한 Einstein식의 적분식을 회귀분석하여 용이하게 산정할 수 있는 양해법 근사식을 개발하였다. Einstein의 부유사량 산정식의 경우 소류사량식의 정확도가 부유사량의 정확한 산정에 중요한 요소임을 확인하였다. 개선된 소류사량식을 적용한 경우 Einstein 부유사량 산정식에 비하여 정밀도가 상당히 향상되는 점을 확인할 수 있었다.

Brownlie가 수집한 자료중 부유사 조건에 해당되는 토사입경의 범위가 제한되어 있으며 자료의 수가 매우 적었다. 따라서 보다 많은 국외의 관측자료와 우리나라 현장조건에서 관측한 자료를 확보하여 부유사량 산정식에 대한 비교 검증이 필요할 것이다.

### 참 고 문 헌

유동훈 (1994). "소류사량 산정의 개선책.", 한국해안·해양공학회지, 한국해안·해양공학회학술발표 논문초록집, pp. 53~57.  
 유동훈 (1995). "구형체의 종말속도.", 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제15권, 제1호, pp. 157~163.  
 유동훈, 강기훈 (1995). "영점높이와 관마찰계수.", 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제 15권, 제 1호, pp. 1~12.  
 유동훈 (1996). "소류사량 산정식.", 한국해양·해안공학회지, 한국해안·해양공학회, 제8권, 제1호, pp. 52~60.

- 유동훈, 이종원 (1997). "사각형 개수로의 완난류 마찰계수.", *대한토목학회 논문집*, 대한토목학회, 제17권, 제II-5호, pp. 441~452.
- 유동훈, 이민호 (1999). "대수형 마찰계수 산정식.", *대한토목학회 논문집*, 대한토목학회, 제19권, 제II-2호, pp. 159~167.
- Acker, P., and White, R. (1973). "Sediment transport : new approach and analysis.", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, No. HY11.
- Bagnold, R. A. (1966). "An approach to the sediment transport problem from general physics.", *Geological Survey Prof. Paper* 422- I, Washington.
- Brownlie, W.R. (1981). "Compilation of alluvial channel data ; laboratory and field, Report KH-R-438.", *W.M. Keck Lab. of Hydraulics and Water Resources*, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Einstein, H. A. (1942). "Formulas for the transportation of bed load.", *Trans. Am. Soc. Civil Eng.*, p. 107.
- Einstein, H. A. (1950). "The bed-load function for sediment transportation in open channel flows.", *Technical Bulletin 1026*, U.S. Department of Agriculture, Washington, D. C.
- Engelund, F. and Hansen, E. (1967). "A monograph on sediment transport.", *Teknisk Forlag*, Copenhagen, Denmark. p. 62.
- Meyer-Peter, E., and Mueller, R. (1948). "Formulas for bed load transport.", *Proc. 2nd IAHR meeting*, Stockholm.
- Prandtl, L. (1925). "Bericht ber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz.", *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol 5, No. 2, p. 136.
- Rouse, H. (1946). "Elementary mechanics of fluids.", *John Wiley & Sons, Inc.*, New York, NY.
- Rubey, W. W. (1933). "Settling velocities of gravel, sand and silt particles.", *A. J. Sci.*, Vol. 225, pp. 325~338.
- Van Rijn, L. C. (1984). "Sediment transport, Part II: suspended load transport.", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 110, No. 11, pp. 1613~1641.
- Yoo, D. H. (2000). "Suspended Sediment Load with Zero Velocity Point Corrected.", *Advances in Hydro Science and Engineering*, Vol. 4.

(논문번호:00-012/접수:2000.02.18/심사완료:2000.12.12)