

아인슈타인의 소류사량 산정 공식

최성욱 (연세대학교 공과대학 사회환경·건축공학부 조교수)

서론

유사량을 산정하기 위해서는 우선 유수에 의한 입자의 거동을 분석해야 한다. 유수에 의해 浮上된 하상의 토사는 난류에 의해 부유 상태로 유지될 수 있을 때 부유사가 되며, 그렇지 않을 경우에는 다시 바닥에 침강되어 도약하며(saltating) 하류방향으로 이동한다. 입자의 초기 거동에서 평균 흐름에 의한 전단응력이 중요한 역할을 한다고 보면 결정론적 시각으로 접근하는 것이 타당하며, 亂流의 역할이 더 중요하다고 본다면 확률적인 접근 방법이 옳을 것이다. 각각의 방법론에 근거해서 많은 공식이 제시되었으며, Yang(1996)은 소류사 공식을 6가지 범주로 나누어 분류한 바 있다.

소류사량 산정 공식을 개발하거나 적용할 때에는 아인슈타인의 공식이 "약방의 감초"격으로 자주 인용되곤 한다. 이는 아인슈타인 공식에 의한 유사량 예측값이 정확해서라기보다는 접근방법의 타당성 때문으로 보인다. 기존 DuBoys 형태의 소류사량 산정 공식은 한계 전단응력을 결정하기가 어렵고 난류에 대한 영향이 고려되지 않는다. 이러한 점을 인식한 아인슈타인은 소류사량이 입자의 부상 확률의 함수이며, 부상 확률은 동수역학적으로 결정할 수 있다는 이론을 전개하였다. 본 학술 기사에서는 유사이동 연구에 있어 기념비적인 업적으로 평가받고 있는 아인슈타인의 소류사량 산정 공식을 소개하고자 한다.

하상 입자의 퇴적과 부상

지름이 d 인 구형 입자의 평균 이동거리를 $A_L d$ 라고 하자. q_s 를 단위 폭 당 소류사 이동률($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$)이라고 하고 전체 입자 중 지름이 d 인 입자의 비율을 i_s 라고 하면, 단위 시간과 단위 면적 당 바닥으로 퇴적되는 입자의 수는 $q_s i_s$ 를 단위 면적($A_L d \times 1$)과 입자 하나의 무게($\gamma_s k_2 d^3$)로 나누어주면 된다. 즉,

$$N_d = \frac{q_s i_s}{(A_L d \times 1)(\gamma_s k_2 d^3)} \quad (1)$$

여기서 k_2 는 입자의 체적에 관한 상수이다.

하상의 입자가 유수에 의해 이동할 가능성은 단순히 입자의 크기와 난류의 특성에 기인한다. 전과 비슷하게 하상토(bed material)에서 지름이 d 인 구형 입자의 비율을 i_b 라하면, 이것은 전체 하상 면적을 크기 d 인 입자가 차지하는 면적으로 나눈 것과 같다. 따라서 i_b 를 입자 하나의 면적($k_1 d^2$)으로 나누면 단위면적당 크기 d 의 입자 수가 된다. 여기에 입자가 소류사층으로 부상될 확률 p/t_e 을 곱하면 단위 시간과 단위 면적 당 부상되는 입자의 개수가 된다. 즉,

$$N_e = \frac{i_b p}{k_1 d^2 t_e} \quad (2)$$

여기서 t_e 는 유수에서 입자로 운동량이 전이되는데 필요한 교환시간(exchange time)이다. 위의 식에 의하면 동수역학적 조건이 교환시간 이상으로 작용할 때에만 입자가 부상하게 된다. Einstein(1942)은 교환시간이 입자의 침강속도와 관련이 있다고 보아 다음과 같은 식을 제시하였다.

$$t_e \propto \frac{d}{v_s} = k_3 \sqrt{\frac{d}{Rg}} \quad (3)$$

여기서 R 은 입자의 수중단위중량, v_s 는 입자의 침강

속도, 그리고 k_3 는 특성시간에 관한 상수이다.

하상에서 입자의 퇴적과 부상이 평형을 이룬다면 식(1)과 식(2)는 같아야 하고 따라서 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{q_s i_s}{A_L k_2 \gamma_s d^4} = \frac{i_b p}{k_1 k_3} \sqrt{Rgd} \quad (4)$$

1942년 공식

Einstein(1942)은 앞의 부상 모형에서 사용된 확률 p 를 이용하여 입자의 평균 이동거리 $A_L d$ 를 구할 수 있었다. 즉, 입자가 한번 도약하여 이동할 수 있는 거리를 $\lambda_y d$ 라고 하면 평균 이동거리는 다음과 같다.

$$A_L d = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n p^n \lambda_y d = \frac{\lambda_y d}{1-p} \quad (5)$$

위의 식을 식(4)에 대입한 후, p 를 좌변으로 옮겨 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{p}{1-p} = \left(\frac{k_1 k_3}{k_2 \lambda_b} \right) \left(\frac{i_s}{i_b} \right) \left(\frac{q_s}{\gamma_s} \sqrt{\frac{1}{Rgd^3}} \right) \quad (6)$$

위 식의 우변에서 소류사의 수송강도(transport intensity)를 나타내는 다음과 같은 무차원 변수를 정의할 수 있다.

$$\Phi = \frac{q_s}{\gamma_s} \sqrt{\frac{1}{Rgd^3}} \quad (7)$$

Φ 를 이용해서 식(5)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{p}{1-p} = A_* \left(\frac{i_s}{i_b} \right) \Phi = A_* \Phi_* \quad (8)$$

위의 식에서 A_* ($= k_1 k_3 / k_2 \lambda_b$)는 상수로서 실험을 통해서 결정할 수 있으며 Φ_* ($= \Phi \times i_s / i_b$)는 특정 크기 입자의 수송강도를 나타낸다. 식(8)의 우변에서 Einstein(1942)은 고른 입자의 경우와 분포를 갖는 입자에 대해 다음과 같이 표현하였다.

$$A_* \Phi = \frac{k_1 k_3}{k_2 \lambda_b} \frac{1}{F} \frac{q_s}{\gamma_s - \gamma} \sqrt{\frac{1}{Rgd^3}} \quad (9)$$

여기서 F 는 무차원의 침강함수로서 입자의 크기가 1mm 이상인 경우에 0.816의 값을 갖는다.

하상의 입자가 유수에 의해 부상하는 것은 동수역학적으로 입자에 작용하는 양력이 수중무게보다 크

거나 같을 때 발생한다. 따라서 부상 확률은 수학적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p = f \left(\frac{k_2 (\rho_s - \rho) g d^3}{c_L \frac{1}{2} \rho k_1 d^2 u_b^2} \right) \quad (10)$$

여기서 c_L 은 양력계수이고 u_b 는 입자에 작용하는 유수의 유효속도이다. 하상이 수리학적으로 매끈할 때 점성저층에서 입자에 작용하는 유효속도는 다음과 같다.

$$u_b \approx 11.6 u_*' \approx 11.6 \sqrt{g R_h' S} \quad (11)$$

여기서 u_*' 는 하상토에 의한 전단속도, R_h' 는 입자에 대한 동수반경, 그리고 S 는 하상경사를 나타낸다. 위의 식을 식(10)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$p = f \left(\frac{k_2 (\rho_s - \rho) g d^3}{c_L \frac{1}{2} \rho k_1 d^2 135 g R_h' S} \right) \quad (12)$$

위의 식에 무차원 변수를 도입하여 위의 부상 확률을 간단히 다시 쓰면 다음과 같다.

$$p = f(B_* \Psi) \quad (13)$$

여기서 Ψ 와 B_* 는 Einstein(1942)이 정의한 흐름강도(flow intensity)와 흐름 강도의 크기척도를 나타내는 상수로서 각각 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{Rd}{SR_h} \quad (14)$$

$$B_* = \frac{k_2}{\frac{1}{2} c_L k_1 \times 135} \quad (15)$$

이제 식(13)을 식(8)에 대입하여 소류사 이동에 관한 관계식을 전개할 수 있다.

소류사 이동량이 그다지 많지 않을 경우, 즉 $\Phi < 0.4$ 일 때, 식(8)은 우변 분모의 p 를 무시하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p = A_* \Phi \quad (16)$$

식(16)을 식(8)에 대입하고 식(13)의 결과를 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

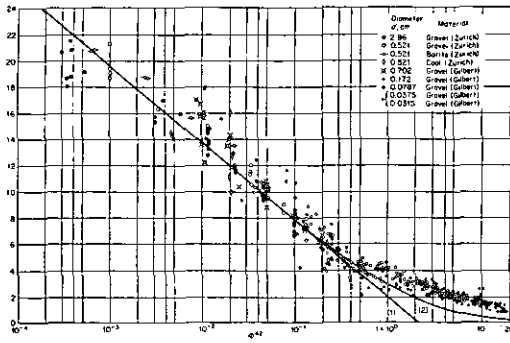


그림 1. 아인슈타인의 소류사 산정공식(1942)

$$A_* \phi = f(B_* \Psi) \quad (17)$$

위의 식에서 상수인 A_* 와 B_* , 그리고 함수 f 는 실험 자료 등을 이용하여 경험적으로 구할 수 있다. 그림 1은 소류사 수송강도와 흐름강도와의 관계를 보여주며, Gilbert(1914)와 Meyer-Peter 등 (1934)의 실험 자료가 함께 도시되었다. 실험 자료와 비교를 통하여 얻어진 관계식은 $\phi < 0.4$ 일 때 다음과 같고, 그림에서는 (1)로 표시되었다.

$$0.465 \phi = e^{-0.391 \Psi} \quad (18)$$

소류사 이동량이 많을 때에는 식(16)의 등식이 성립한다고 할 수 없으므로 식(18)을 적용하기 힘들다. 이러한 경우에는 그림 1.에서와 같이 곡선 (2)가 실험 자료와 더 잘 일치함을 알 수 있다. 그림에서 $\phi > 0.4$ 일 때에도 실험에 의한 수송강도가 제시된 곡선 보다 위에 있는 것은 실험 결과에 부유사가 같이 포함되어 있기 때문이다(Graf, 1984).

1950년 공식

하상의 입자가 부상될 확률은 유수에 의한 양력이 입자의 수중 무게를 초과할 경우에 해당한다. 이를 수학식으로 표현하면 다음과 같다.

$$1 > \frac{k_2(\rho_s - \rho)gd^3}{c_L \frac{1}{2} \rho k_1 d^2 u_*^2 (1 + \eta)} \quad (19)$$

Einstein(1950)은 양력계수 c_L 의 값이 상수로서

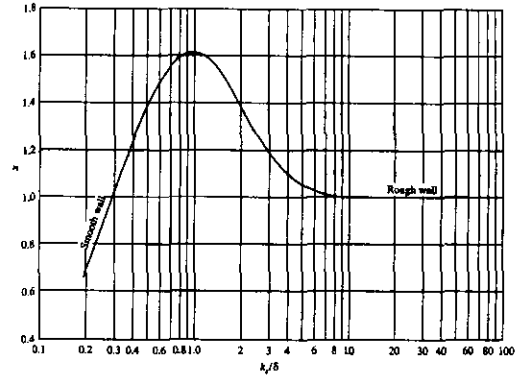


그림 2. 대수법칙에 의한 유효속도 보정계수

0.178이고 η 는 표준편차가 0.5인 정규분포의 무작위 함수로 가정하였다. 또한 아인슈타인은 입자로 인한 하상의 거칠기를 표현하기 위하여 다음과 같은 변형된 형태의 대수법칙을 제시하였다.

$$u = 5.75 u_*' \log \left(30.2 \times \frac{0.35X}{\Delta} \right) \quad (20)$$

여기서 u_*' 는 입자로 인한 전단속도, Δ 는 특성조도 높이(= d_{65}), 그리고 X 는 표면 입자의 지름을 나타낸다. 위의 식에 의하면 소류사층의 대표 입경이 X 일 때, 바닥면으로부터 $0.35X$ 떨어진 지점에서 입자에 작용하는 유효속도가 산정되었음을 알 수 있다. 그림 2를 이용하면 k_s/δ 값을 구하여 x 값을 산정할 수 있고, 다시 k_s 를 x 로 나눈 값이 Δ 가 되는 것이다. 그림 2에서 δ 는 점성저층의 두께로 $11.6\nu/u_*'$ 이다. 식 (19)에서 입자에 작용하는 유효속도를 구하기 위해 식(20)을 사용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$1 > \frac{1}{1 + \eta} \Psi \left[\frac{2k_2}{0.178k_1 \times 5.75^2} \right] \left[\frac{1}{\log(10.6X/\Delta)} \right]^2$$

위의 식을 정리하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$|(1 + \eta)| > \frac{B\Psi}{\beta_x^2} \quad (21)$$

여기서 $B=0.35k_2/k_1$, $\beta_x = \log(10.6X/\Delta)$ 이다. 위의 식에서 우변의 값이 항상 양이므로 좌변에 절대값을 취하였다. Einstein(1950)은 식(21)에 두 개의 보정계수를 추가로 도입하여 다음과 같이 표현하였다.

$$|(1 + \eta)| > \xi Y B \frac{\beta_x^2}{\beta_x^2} \Psi \quad (22)$$

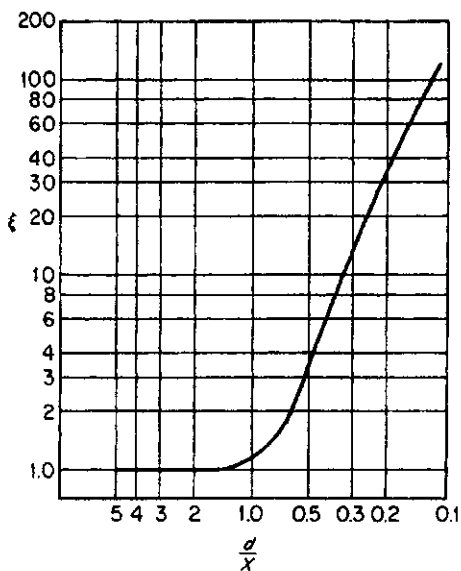


그림 3. 차폐효과 보정계수

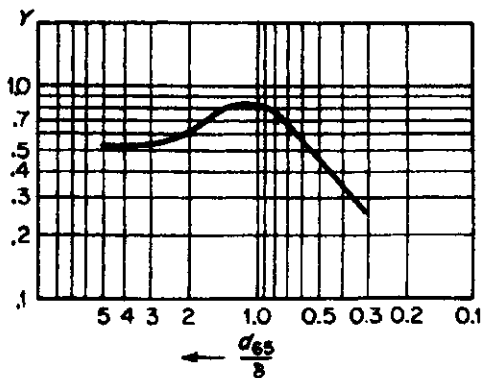


그림 4. 압력 보정계수

여기서 ξ 는 차폐계수(hiding factor), Y 는 양력계수에 대한 보정계수, $B' = B/\beta^2$, 그리고 $\beta = \log 10.6$ 이다. 차폐계수는 크기가 작은 입자가 큰 입자들 사이에서 운동성이 감소되는 것을 고려하기 위한 것으로 그림 3은 차폐계수 ξ 를 d/X 의 함수로 표현하였다. 그림에서

$$X = 0.77d_{65}/x \quad \text{if } d_{65}/(x\delta) > 1.8$$

$$X = 1.398\delta \quad \text{if } d_{65}/(x\delta) < 1.8$$

또한 그림 4는 양력계수에 대한 보정계수를 d_{65}/δ 의 함수로 도시한 것으로 양력은 입자 상하단에 작용하는 압력차에 의해 발생하므로 압력 보정계수라고도

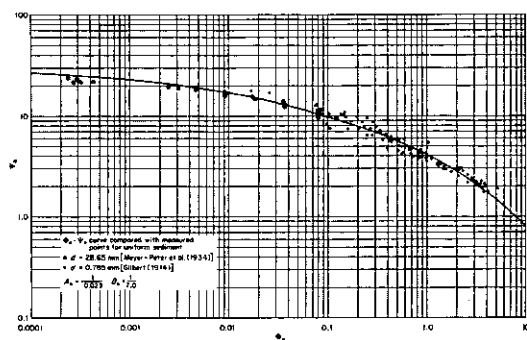


그림 5. 아인슈타인의 소류사 산정공식(1950)

한다. 위의 식을 η_0 로 나눈 후 이를 다시 제곱하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\left(\frac{1}{\eta_0} + \eta_*\right)^2 > B_*^2 \Psi_*^2 \quad (23)$$

여기서 $B_* = B'/\eta_0$ 이고 $\Psi_* = \xi Y (\beta/\beta_*)^2 \Psi$ 이다. 위의 식으로부터 운동이 발생하기 위한 한계조건은 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{\eta_0} + \eta_*\right)^2 = B_*^2 \Psi_*^2 \quad (24a)$$

혹은

$$\eta_* = \pm B_* \Psi_* - \frac{1}{\eta_0} \quad (24b)$$

η 가 정규분포를 갖는다면, η_* 는 평균이 영이고 표준편차가 1인 표준 정규분포를 가지며 η_0 는 표준편차가 된다. 따라서 부상 확률은 다음과 같다.

$$p = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-B_* \Psi_* - 1/\eta_0}^{+B_* \Psi_* - 1/\eta_0} e^{-t^2} dt \quad (25)$$

위의 식을 식(8)과 같이 결합하여 다시 쓰면 다음의 식을 최종적으로 얻을 수 있다.

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-B_* \Psi_* - 1/\eta_0}^{+B_* \Psi_* - 1/\eta_0} e^{-t^2} dt = \frac{A_* \Phi_*}{1 + A_* \Phi_*} \quad (26)$$

위의 식에서 A_* , B_* , 그리고 η_0 는 실험을 통해서 얻을 수 있는 상수이다. 그림 5는 Φ_* 와 Ψ_* 의 관계를 도시한 것이다. 그림에서 Gilbert(1914)와 Meyer-Peter 등 (1934)의 실험결과가 회귀분석을 위해 사용되었으며, $\eta_0 = 0.5$ 일때 결과는 다음과 같다.

$$A_* = 43.5; B_* = 0.143 \quad (27)$$

결론

아인슈타인은 1936년에 스위스의 취리히에 있는 Federal Institute of Technology에서 "확률 문제로서의 소류사 이동"이라는 제목으로 박사학위를 취득하였다. 그리고 1938년 그는 아버지와 함께 미국으로 이민을 떠났다. 미국에서의 첫 직장인 South Carolina 소재의 US Agricultural Experiment Station에서 1942년 논문을 집필하였으며, Caltech의 US Department of Agriculture Cooperative Laboratory에서 1950년 공식이 제안된 보고서를 완성하였다. 한스 아인슈타인이 진로를 결정하기 위해 고심하던 당시 아버지인 알버트 아인슈타인과 나눈 대화를 소개하면서 기사를 마치고자 한다.

The words of Einstein were conveyed in a story which a few river engineers still remember being told by his son, H. A. Einstein, whom junior Einstein had said to his father that he had chosen for his doctoral topic the mechanics of sediment movement and the dynamics of rivers, the senior Einstein, after a prolonged silence, had said: "Amazing ! When I was at the point of choosing my topic I had exactly the same ideas. I never told anybody about this. However, after more detailed serious consideration it became clear to me that this was too difficult a subject. Hence, I opted for the simpler aspects of physics." ●

〈참고문헌〉

- Einstein H.A. (1942), "Formula for the transportation of bed-load." *Transactions of the ASCE*, Vol. 107.
- Einstein, H.A. (1950), "The bed-load function for sediment transportation in open channel flows." U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, *Technical Bulletin No. 1026*.
- Gilbert, K.G. (1914), "The transportation of debris by running water." *U.S. Geological Survey, Prof. Paper 86*.
- Graf, W.H. (1984), *Hydraulics of Sediment Transport*. Water Resources Publications, Highlands Ranch, CO.
- Meyer-Peter, E., Favre, H., and Einstein, H.A. (1934), "Neuere Versuchsergebnisse über den Geschiebetrieb." *Schweiz. Bauzeitung*, Vol. 103, No. 13.
- Yang, C.T. (1996), *Sediment Transport*. McGraw Hill, New York, NY.