

수직축을 중심으로 회전하는 직관과 정지한 곡관내에서의 층류 유동의 유사성 비교

이 공 희* · 백 제 현**
(2000년 6월 21일 접수)

Study on the Similarity of Laminar Flows between in Orthogonally Rotating Square Duct and Stationary Curved Square Duct

Gonghee Lee and Jehyun Baek

Key Words: Secondary Flow(2차 유동), Coriolis Force(코리올리력), Centrifugal Force(원심력),
Duct Flow(덕트 유동), Fully-Developed Laminar Flow(완전 발달 층류 유동)

Abstract

In this study, it is numerically revealed that the secondary flow due to the Coriolis force in a straight duct rotating about an axis perpendicular to that of the duct is analogous to that caused by the centrifugal force in a stationary curved duct. Dimensionless parameters $K_{LR} = Re/\sqrt{Ro}$ and Rossby number in a rotating straight duct were used as a set corresponding to Dean number and curvature ratio in a stationary curved duct. When the value of Rossby number and curvature ratio is large, it is shown that the flow field satisfies the 'asymptotic invariance property', that is, there are strong quantitative similarities between the two flows such as friction factors, flow patterns, and maximum axial velocity magnitudes for the same values of K_{LR} and Dean number.

기호설명

d : 수력 지름
 f : Fanning 관마찰계수 $= \bar{\tau}_w / \frac{1}{2} \rho w_m^2$
 f_0 : 정지한 사각 직관에서의 관마찰계수
 $= 14.23/Re$
 K_{LR} : 회전 직관의 지배 무차원 변수
 $= Re/\sqrt{Ro}$
 K_{LC} : 정지 곡관의 지배 무차원 변수 또는
 Dean수 $= Re/\sqrt{\lambda}$

p : 단면내의 압력
 \bar{p} : 단면 평균 압력
 p^* : 원심력이 포함된 수정 압력
 $= p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + z^2)$
 R : 유로의 곡률반경
 Re : Reynolds 수 $= w_m d / \nu$
 Ro : Rossby 수 $= w_m / \Omega d$
 u, v, w : x, y, z 각 방향의 속도 성분
 V_s : 2차 유동 속도 $= \sqrt{u^2 + v^2}$
 V_{sa} : 2차 축방향 속도
 $= w_{rot} - w_{no\ rot}$ (회전 직관)
 $= w_{curv} - w_{no\ rot}$ (정지 곡관)
 w_m : 평균 속도

* 회원, 포항공과대학교 대학원 기계공학과
 ** 회원, 포항공과대학교 기계공학과
 E-mail : jhbaek@postech.ac.kr
 TEL : (054)279-2168, FAX : (054)279-3199

그리스 문자

- ρ : 유체의 밀도
 ν : 유체의 점도
 λ : 곡률비 = R/d
 Ω : 회전각속도

1. 서 론

유체계의 고성능, 고효율 및 경량화에 대한 요구가 날로 증가하면서 유체기계 내부의 냉각 방법에 대한 많은 연구가 진행되고 있다. 이러한 냉각 시스템내의 열전달을 이해하기 위해서는 정확한 유동 해석이 선행되어야 한다. 일반적으로 유체기계 내부의 유동은 상당히 복잡하며, 3차원적인 유동 특성을 가진다. 이러한 현상은 주로 회전과 곡률의 영향에 의한 2차 유동의 형성에 기인한다. 구체적인 예로써 가스터빈 냉각시스템은 원주 방향으로 회전하는 곡관으로 간주될 수 있으며, 이것은 2가지 단순화된 형태로 나누어 생각할 수 있다. 먼저 주유동 방향에 수직인 축을 중심으로 회전하는 직관 내부의 유동을 고려해 볼 수 있으며, 이 경우에는 회전에 의한 코리올리력의 영향으로 관 내부에 2차 유동이 형성된다. Speziale⁽¹⁾는 회전하는 직관에 대한 수치 계산을 통해서 회전각속도가 작은 경우에는 회전 방향이 서로 반대인 2개의 와류가 발생하지만, Re 수 및 회전각속도가 증가하게 되면 압력면 부근에서 부가적인 비대칭 형태의 와류가 발생하게 된다는 것을 밝혔다. 만일 회전 속도가 더욱 증가하게 되면 유동장은 다시 2개의 와류를 가지며, Taylor-Proudman 영역을 형성하면서 안정화되는 것으로 밝혀졌다. Khesghi와 Scriven⁽²⁾도 Ro 수를 증가하게 되면 유동장은 기존의 2개의 와류에서 4개의 와류로 변화하는 것을 보였다.

다음으로 정지한 곡관에서의 유동을 고려할 수 있다. 이 경우에 곡관 중심의 속도가 빠른 유동은 벽 근처의 속도가 느린 유동에 비해 원심력의 영향을 더욱 크게 받게 되어서, 주방향 유동에 수직하면서 서로 반대방향으로 회전하는 2차 유동이 발생하게 되며, 결과적으로 압력 손실과 열전달률을 상당히 증가시킨다. 곡관 내부의 층류 유동 해석을 처음으로 이론적인 측면에서 접근한 Dean⁽³⁾은 곡관에서 완전 발달된 유동은 주로

Dean수의 영향을 받는다는 것을 알아냈다. 이후로 많은 이론, 실험 및 계산적 접근이 이루어졌는데, Humphrey 등⁽⁴⁾은 90° 곡관에서 LDA(Laser-Doppler Anemometry)를 이용해서 2차 유동 형태와 재순환(recirculation)의 발생위치를 제시하였다. Winters⁽⁵⁾는 선형 안정성 해석(linear stability analysis)을 통해서 2개의 와류는 어느 임의의 2차원 동요(perturbation)에 대해서도 안정적인 반면, 4개의 와류가 존재할 경우에는 대칭적인 동요에 대해서는 조건적으로 안정하지만, 비대칭적인 동요에 대해서는 불안정하다는 것을 보였다. Berger 등⁽⁶⁾은 1980년대 이전의 곡관에 대한 여러 연구들을 체계적으로 종합, 정리하였다.

한편 앞서 언급된 수직축을 중심으로 회전하는 직관과 정지한 곡관에서 볼 수 있는 유동 형태의 유사성에 관한 연구가 주로 원형 단면인 경우에 대해서 단순한 정상적인 접근 방법으로 예전부터 행하여져 왔다. 예를 들어 Thangam과 Hur⁽⁷⁾는 회전하는 직관 유동에서 Ro 수는 곡관 유동에서 곡률비 λ 에 해당한다는 것을 밝혔으나, 곡관 유동에서 기본적인 변수인 Dean수에 상응하는 구체적인 변수나 정량적인 결과를 제시하지는 못했다. 따라서 본 연구에서는 이미 Baek과 Ko⁽⁸⁾의 선행 연구에서 타당성이 검증된 수치 해법을 적용, 수직축을 중심으로 회전하는 정사각 단면 직관과 정지한 곡관 내부 유동에 대한 적절한 무차원 변수 도입 및 수치 해석을 통해서 이들 사이에 강한 정량적인 유사성이 존재하는 것을 밝히고자 한다.

2. 지배방정식 및 수치해법

2.1 지배방정식

2.1.1 회전하는 직관의 경우

y 축을 중심으로 일정한 각속도로 회전하는 정사각 단면 직관 내부의 유동을 해석하기 위해 사용된 직교 좌표계 (x, y, z) 를 Fig. 1에 표시하였다. (x, y, z) 각 방향의 속도 성분을 (u, v, w) 로 정하면, 완전 발달된 유동영역에서 각 방향으로의 속도성분들은 z 방향에 대해서 무관하고, 따라서 연속방정식 및 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2\Omega w \tag{2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2\Omega u \tag{4}$$

여기서 p^* 은 수정된 압력을 나타내며,

$$p^*(x, y, z) = p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + z^2) = \bar{p}^*(z) + p^*(x, y) \tag{5}$$

로 주어진다. 완전 발달된 유동 영역에서 주방향으로의 압력구배는 일정하므로

$$-\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial z} = C_1 \tag{6}$$

로 표시될 수 있으며, 여기서 C_1 은 상수이다. 식 (2)에서 관성력 항과 코리올리력 항을 포함하는 회전하는 직관 내부의 2차 유동의 대표 속도 크기를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$U_{SR} = \sqrt{\Omega w_m d} = w_m / \sqrt{Ro} \tag{7}$$

2차 유동 속도성분 u, v 와 압력 p^* 은 U_{SR} 에 의해서, 축방향 속도성분 w 와 압력 구배 C_1 은 평균 속도 w_m 에 의해서 무차원화 된다. 무차원화된 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{w_m} \sqrt{Ro} & \tilde{v} &= \frac{v}{w_m} \sqrt{Ro} & \tilde{w} &= \frac{w}{w_m} \\ \tilde{p}^* &= \frac{p^*}{\rho w_m^2} Ro & \tilde{C}_1 &= \frac{C_1 d}{\rho w_m^2} \sqrt{Ro} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{d} \quad \tilde{y} = \frac{y}{d} \quad \tilde{z} = \frac{z}{d\sqrt{Ro}}$$

식 (8)의 무차원 변수들을 식 (1)~(4)에 적용하면 다음과 같은 무차원화된 지배방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \\ = -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{K_{LR}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + 2\tilde{w} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \\ = -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{K_{LR}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \\ = \tilde{C}_1 + \frac{1}{K_{LR}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \frac{2}{Ro} \tilde{u} \end{aligned} \tag{12}$$

회전하는 직관에서 유동 특성들을 파악하기 위해서 다양한 무차원 변수들의 조합이 사용되었다. Speziale⁽¹⁾는 Re, Ro 를, Kheshgi와 Scriven⁽²⁾은 $Ro, Re_\Omega = \Omega d^2/\nu$ 을, Baura⁽⁹⁾는 $Re, 1/Ro$ 을 사용하였으나, 다음에 설명할 정지한 곡관에서의 주요 무차원 변수인 곡률비 λ 및 Dean수 $K_{LC} = Re/\sqrt{\lambda}$ 에 상응하지 못했다. 본 연구에서는 식 (10)~(12)에서 볼 수 있듯이 무차원 변수 $K_{LR} = Re/\sqrt{Ro}$ 와 $Ro = w_m/\Omega d$ 을 사용하였다.

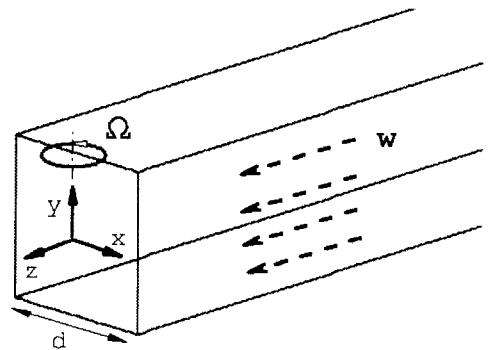


Fig. 1 Coordinate system for flow analysis in a rotating straight duct

여기서 K_{LR} 은 U_{SR} 에 기초한 Re 수를, Ro 수는 코리올리력에 대한 관성력의 비를 나타낸다.

만일 $Ro \rightarrow \infty$ 로 하면, 식 (12)에서 Ro 를 포함한 항은 사라지게 되고, 회전하는 직관 내부의 유동은 오직 K_{LR} 에 의해서만 영향을 받게 되는 '점근적인 불변 특성' (Asymptotic invariance property)을 가지게 된다.

2.1.2 정지한 곡관의 경우

Fig. 2는 곡률 반경이 R 로 표시된 정사각 단면 곡관 유동 해석에 사용된 좌표계를 나타낸다. 정지한 곡관 내부의 유동을 정상상태, 비압축성, 완전 발달된 층류 유동으로 가정하면, 각 방향으로의 속도성분 u, v 및 w 는 z 방향에 대해서 변화가 없게 되고, 앞서 살펴본 회전하는 직관 유동 해석에 적용된 것과 유사한 방법을 사용하여 연속방정식 및 운동방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{R+x} = 0 \tag{13}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{R+x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{14}$$

$$+ \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{R+x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{(R+x)^2} \right]$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \tag{15}$$

$$+ \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R+x} \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{uw}{R+x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \tag{16}$$

$$+ \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R+x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{(R+x)^2} \right]$$

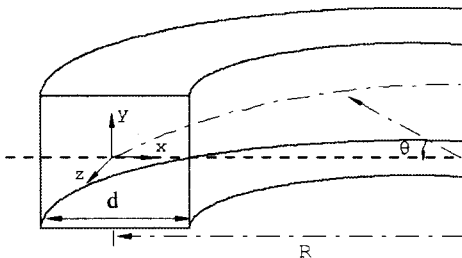


Fig. 2 Coordinate system for flow analysis in a stationary curved duct

여기서

$$p(x, y, z) = \bar{p}(z) + p(x, y) \tag{17}$$

로 주어지며, 회전하는 직관의 경우와 동일하게 완전 발달된 영역에서 주방향으로의 압력구배는 일정하므로

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} = C_2 \tag{18}$$

이며, 여기서 C_2 는 상수이다.

식 (14)에서 관성력 항과 원심력 항을 포함하는 정지 곡관 내부의 2차 유동의 대표 속도 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_{SC} = w_m \sqrt{d/R} = w_m / \sqrt{\lambda} \tag{19}$$

2차 유동 속도성분 u, v 와 압력 p 는 U_{SC} 에 의해서, 축방향 속도성분 w 와 압력 구배 C_2 는 평균 속도 w_m 에 의해서 무차원화된다. 무차원화된 변수는 다음과 같다.

$$\tilde{u} = \frac{u}{w_m} \sqrt{\lambda} \quad \tilde{v} = \frac{v}{w_m} \sqrt{\lambda} \quad \tilde{w} = \frac{w}{w_m}$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho w_m^2} \lambda \quad \tilde{C}_2 = \frac{C_2 d}{\rho w_m^2} \sqrt{\lambda} \tag{20}$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{d} \quad \tilde{y} = \frac{y}{d} \quad \tilde{z} = \frac{z}{d\sqrt{\lambda}}$$

식 (20)의 무차원 변수들에 기초해서 지배방정식을 정리하면

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\tilde{u}}{\lambda + \tilde{x}} = 0 \tag{21}$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\lambda}{\lambda + \tilde{x}} \tilde{w}^2 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}$$

$$+ \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{\lambda + \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\tilde{u}}{(\lambda + \tilde{x})^2} \right] \tag{22}$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$$

$$+ \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{\lambda + \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right] \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \frac{\tilde{u}\tilde{w}}{\lambda+x} = \tilde{C}_2 \\ + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda+x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \frac{\tilde{w}}{(\lambda+x)^2} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 $K_{LC} = Re/\sqrt{\lambda}$ 는 곡관 유동에서 주요한 변수중의 하나인 Dean수를 나타내며, 정지한 직관 유동에서 Re 수와 동일한 역할을 한다. 곡률비 $\lambda = R/d$ 는 원심력에 대한 관성력의 비를 나타낸다. 이처럼 K_{LC} 와 λ 는 곡관 내부의 층류 유동을 특징지워 주는 중요한 변수임을 알 수 있다.

Itô⁽¹⁰⁾와 Soh 등⁽¹¹⁾의 연구 결과에 의하면 $\lambda > 8$ 인 경우에는 λ 의 영향은 실제로 무시할 수 있을 정도로 작은 것으로 알려져 있다. 따라서 식 (21)~(24)에서 $\lambda \rightarrow \infty$ 를 취하게 되면 다음과 같은 무차원화된 지배방정식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{w}^2 \\ = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \\ = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \\ = \tilde{C}_2 + \frac{1}{K_{LC}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

식 (25)~(28)에서 곡률비 λ 는 유동 특성에 영향을 미치지 않고, K_{LC} 만이 지배적인 변수가 된다.

2.2 수치해법

Fractional-step 방법을 사용해서 회전하는 직관 및 정지한 곡관 내부의 완전 발달된 층류 유동을 해석하였다. 먼저 운동 방정식에서 ADI 방법을 이용하여 가상 시간(pseudo-time)을 진행하면서 속도장을 구하고, 다음 시간 단계에서 연속방정식이 만족되도록 압력에 대한 Poisson 방정식을 계산하였다. 점성항과 압력항은 2차 중앙차분법을,

대류항은 2차 상류 차분법을 이용해서 운동 방정식에서 인위적인 소산의 필요를 제거하였다. 수렴 가속화 기법의 하나인 국부시간단계(local time step) 방법을 사용해서 수렴성을 향상하였다. 비엇갈림 격자계의 사용을 통하여 경계조건을 부가를 용이하게 하였고, 각각의 변수값들을 저장하는데서 오는 부가적인 기억장소의 필요를 감소시켰다. 격자수는 폭방향과 높이 방향으로 각각 35×18 개를 사용하였다. 벽 근처에서는 경계층의 영향으로 주유동과 2차 유동의 급격한 구배가 존재하므로 조밀한 격자를 사용하였다. 계산에 적용된 경계조건은 다음과 같다. 벽에서는 접촉(no-slip)조건을, 대칭면에서는 대칭조건을 부여하였다.

$$u = v = w = 0 \quad \text{at } x = \pm d/2, y = \pm d/2 \quad (29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = v = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad (30)$$

3. 결 과

3.1 일반적인 유동 형태

Fig. 3에서 K_{LR} 과 K_{LC} 의 값이 동일한 4가지의 경우에 대해서 2차 유동 속도벡터와 유선을 표시하였다. 상부는 정지한 곡관을, 하부는 회전하는 직관을 나타낸다. 회전하는 직관의 경우, 회전에 의한 코리올리력의 영향으로 직관 중심의 속도가 빠른 유동이 압력면으로 이동하면서 서로 상반된 방향으로 회전하는 2개의 와류가 발생하는 것을 볼 수 있다(Fig. 3(a),(b)). 이러한 2차 유동 형상은 K_L 값이 커지면서 다른 형태를 보이게 된다. 즉, 관성력과 코리올리력이 서로 이루고 있던 균형이 깨어지면서 압력면에서 경계층이 불안정하게 되며, 이로 인해 보조적인 2차 유동이 발생하여 결과적으로 4개의 와류 구조를 형성하는 것을 볼 수 있다(Fig. 3(c),(d)). 반면에 정지한 곡관에서는 곡관 중심의 속도가 빠르고, 비점성 특성을 가지는 유동이 벽 근처의 속도가 느린 유동에 비해서 원심력의 영향을 더욱 크게 받게 된다. 즉, 식 (14)에서 $w^2/(R+x)$ 및 $\partial p/\partial x$ 항이 미세한 크기를 가지며, x 방향으로의 운동량 평형을 이루기 위해서 반경방향 속도 성분 u 의 크기가 이에 상응하여 변하게 된다. 또한 연속방정식

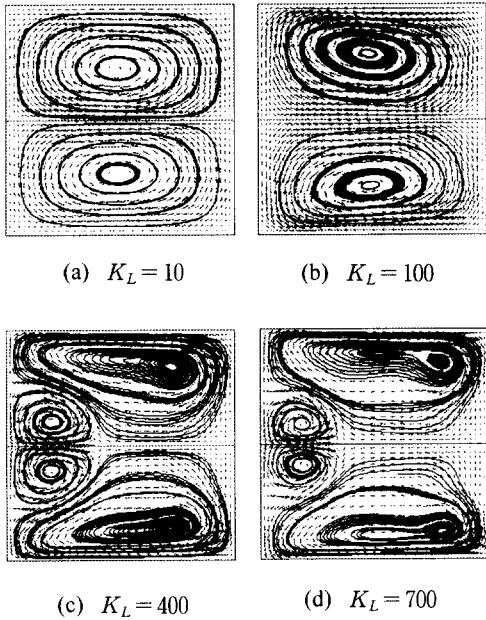


Fig. 3 Secondary velocity vectors and streamlines for $Ro=10$ and $\lambda = 10$

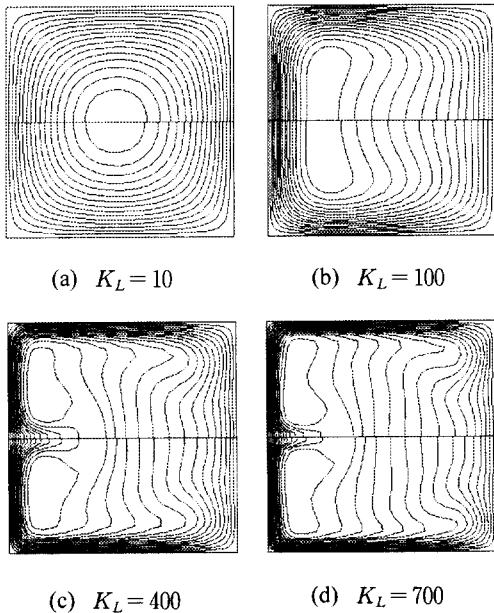


Fig. 4 Axial velocity contours for $Ro=10$ and $\lambda = 10$

을 만족시키기 위해서 속도 성분 v 는 압력면에서는 대칭면으로부터 멀어지고, 흡입면에서는 대칭면쪽을 향하게 된다. 이러한 속도 분포는 곡관 단면의 직경에 해당하는 크기를 가지는 2차 유동을 형성하게 된다(Fig. 3(a),(b)). 한편 회전하는 직관 내부의 유동 불안정성과 유사한 형태의 2차 유동이 반경 방향 압력 구배 및 원심력의 불균형으로 인해 곡관의 바깥쪽벽에서 형성되는 것을 볼 수 있다(Fig. 3(c),(d)).

Fig. 4에서는 무차원화된 축방향 속도 (w/w_m)를 표시하였다. Fig. 4(a)와 같이 K_L 값이 작은 경우는 유동장이 대칭적인 형태를 보이지만, K_L 값이 증가하면서 축방향 속도의 최대값의 위치가 압력면쪽으로 이동하게 된다. 조사된 K_L 값들에 대해서 두 유동의 속도 분포가 전체적으로 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 5에서는 대칭면에서 수평방향으로 축방향 속도 형상을 표시하였다. 그림 하단의 PS는 압력면(pressure side)을, SS는 흡입면(suction side)을 각각 표시한다. $K_L = 10$ 인 경우에는 2차 유동이 축방향 속도 형상에 거의 영향을 미치지 않지만, $K_L = 50$ 과 100으로 증가하면서 축방향 속도 형상이 비대칭이 되며, 최대 속도 지점이 압력면으로 치우치게 된다. $K_L = 100$ 에서 $K_L = 200$ 으로 증가하면, 축방향 속도 크기가 감소하게 되고, 최대 속도 지점이 다시 관 중심으로 이동하게 된다.

Fig. 6은 관 중심에서 수직방향으로 축방향 속도 형상을 나타낸다. 그림 하단의 LW는 하부벽을, UW는 상부벽을 표시한다. Fig. 6(b)에서 벽 근처에서의 2개의 속도 최고값들은 이 부분에서 와류가 존재한다는 것을 알려주며, 관 중심에서의 또 다른 최대 속도의 존재는 압력면에서 부가적인 와류의 발생으로 인해 손실된 유선 방향 운동량의 일부가 이 지점 근처에서 흡수되는 것을 보여준다.

회전 및 곡률이 유동에 미치는 영향을 보다 효과적으로 분석하기 위해서 2차 축방향 속도, V_{Sa} ,를 도입하였다. 2차 축방향 속도는 정지한 직관에서 완전 발달된 유동의 축방향 속도와 해당 K_L 값에서 계산된 축방향 속도의 차로 구해진다.

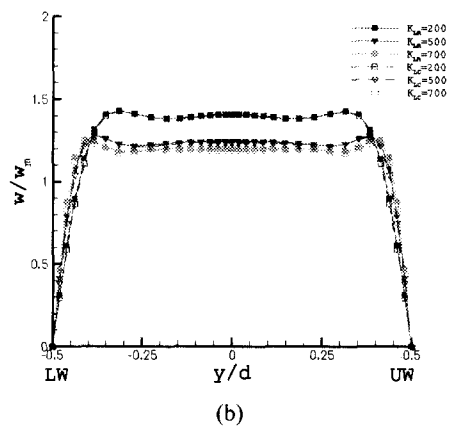
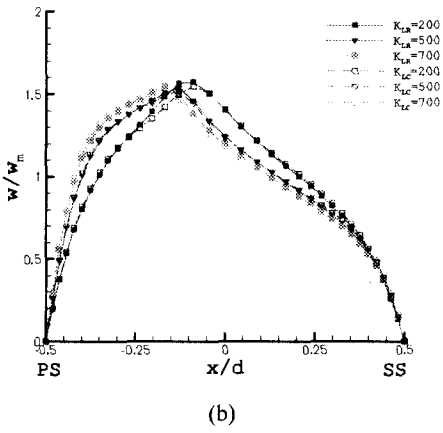
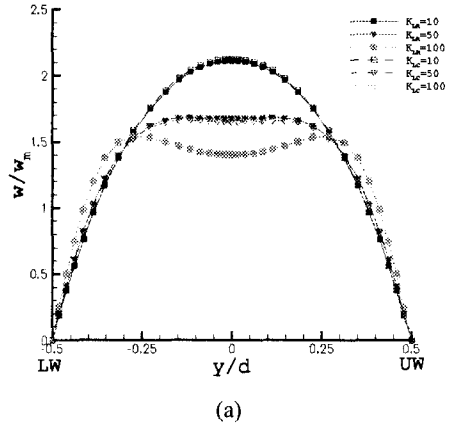
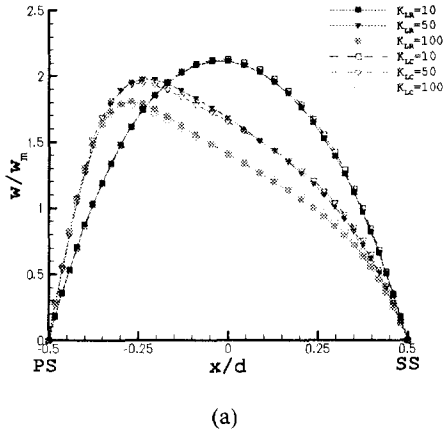


Fig. 5 Axial velocity profiles along the horizontal centerline of the duct for $Ro=10$ and $\lambda = 10$

Fig. 6 Axial velocity profiles along the vertical centerline of the duct for $Ro=10$ and $\lambda = 10$

Fig. 7에서 K_L 값 증가시 코리올리력 및 원심력의 영향으로 2차 축방향 속도형상이 상당히 왜곡되는 것을 볼 수 있다.

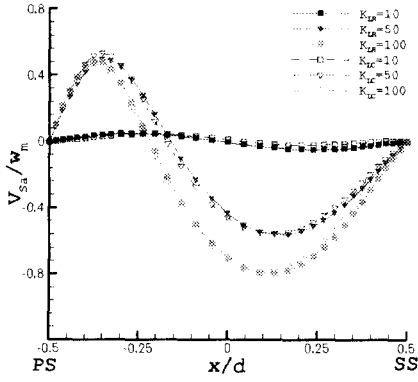
3.2 마찰계수

관 유동 해석시 가장 중요한 것 중의 하나가 바로 마찰 계수를 정확히 구하는 것이다. Fig. 8은 마찰계수의 비를 나타내며, 여기서 f_0 는 정지한 사각 직관에서의 마찰 계수이다. K_L 값의 변화에 따른 마찰계수의 증가 형태는 기존의 실험 및 계산 결과와 비교시 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

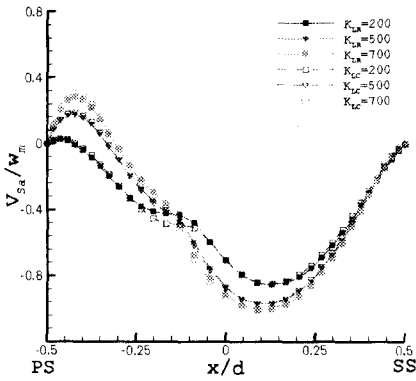
3.3 다른 유동 특징들

무차원 변수 K_L 의 ‘점근적인 불변 특성’ 이 실제로 Ro 수 및 λ 의 크기가 클 경우에도 잘 만족하는지 알아보기 위해 Ro 수 및 λ 값이 각각 50과 100인 경우에 대해서 계산을 수행하였다.

Fig. 9는 K_L 값의 변화에 따른 최대 축방향 속도의 비 (w_{max}/w_m)를 나타내고 있다. 유체의 불안정성이 발생하는 임계값 $K_{LRcrit} \approx 154$ 근처에서 불안정성이 존재하는 것을 제외하고는 두 유동의 최대 축방향 속도의 비가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한 최대 축방향 속도값들이 Ro 수 및 λ 값의 크기 변화에 거의 영향을 받지 않는 것으로 보이며, 따라서 앞에서 가정한 ‘점근적인 불변 특성’ 이 타당하다는 것을 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 7 Secondary axial velocity profiles along the horizontal centerline of the duct for $Ro=10$ and $\lambda = 10$

Fig. 10은 K_L 값의 변화에 따른 무차원화된 2차 유동 강도의 변화를 나타내고 있다. Fig. 8의 마찰 계수와 같은 적분 물성치(integral property)는 정량적으로 잘 일치하는 것에 비해서, 2차 유동 강도는 K_L 값이 작은 영역에서 약간의 차이를 보여주고 있다. 이러한 현상이 발생하는 이유는 회전하는 직관 내부의 유동에서 코리올리력은 Ωw 에 비례하나, 곡관 유동에서 원심력은 w^2/R 에 비례하기 때문이다. 이러한 두 종류의 힘들이 단면의 모든 곳에서 동일할 수는 없고, 결국 2차 유동 강도와 같은 국부적인 값들은 약간의 차이를 보이게 된다.

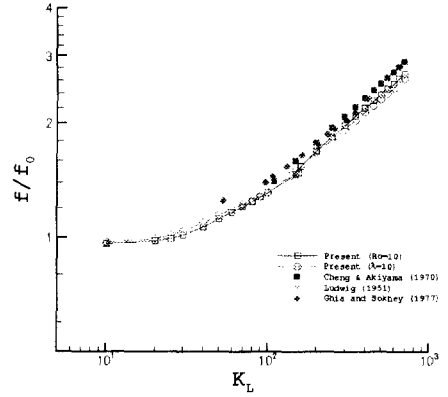


Fig. 8 Friction Factor Ratio

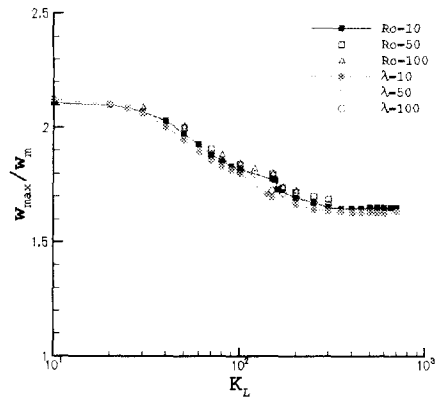


Fig. 9 Variation of the maximum axial velocity ratio with K_L

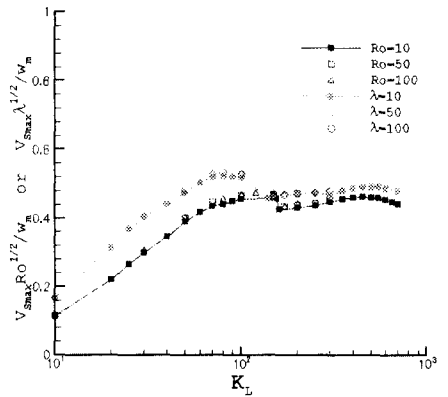


Fig. 10 Variation of the secondary velocity intensity with K_L

4. 결론

주유동에 수직축을 중심으로 회전하는 정사각 단면의 직관과 정지한 정사각 단면의 곡관에서의 완전 발달된 층류 유동의 정량적인 유사성을 밝히기 위해 물리적으로 타당한 상사변수와 고차의 정확도를 가진 수치 해법을 이용하여 계산한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 회전하는 직관내의 유동의 경우에 무차원 변수 K_{LR} 과 Rossby수 Ro 는 정지한 곡관 내의 Dean수 K_{LC} 와 곡률비 λ 에 각각 대응한다는 사실이 확인되었다.

(2) Ro 와 λ 가 충분히 큰 값을 가지는 경우 ($Ro, \lambda > 8$), K_{LR} 과 K_{LC} 는 각각 회전하는 직관과 정지한 곡관 유동에서 유일한 지배변수가 되며, 유동 특성들은 이들 무차원 변수들에 대해 '접근적인 불변 특성'을 나타내게 된다. 결과적으로 동일한 K_L 값에 대해서 두 유동의 정량적인 유사성이 있다.

(3) 마찰계수와 같은 적분형태의 물성치 및 주유동의 형태는 일치하였으며, 단면에서의 최대 축방향 속도 및 2차 유동 강도 또한 폭넓은 K_L 값의 범위안에서 서로 유사한 형태를 나타내었다.

본 연구에서 살펴본 완전 발달된 층류 유동에서 회전하는 직관과 정지한 곡관 유동의 정량적인 유사성은 점성력을 적절히 고려해 줄 경우 난류 유동에서도 확인이 가능하며, 여기에 관련된 내용은 별도로 다루고자 한다.

후 기

본 연구는 BK21 지원 사업의 일부로 수행되었으며, 日韓産業技術協力財團 및 과학재단이 지원하는 “理工係靑少年交流事業”의 일환으로 日本航空宇宙研究所 방문시 많은 기술적 조언을 해주신 Dr. Ishigaki께 감사의 말씀을 드립니다.

참고문헌

(1) Speziale, C. G., 1983, “Numerical Study of

Viscous Flow in Rotating Rectangular Ducts,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 122, pp. 251~271

(2) Khesghi, H. S. and Scriven, L. E., 1985, “Viscous Flow through a Rotating Square Channel 1,” *Phys. Fluids*, Vol. 28, pp. 2868~2979

(3) Dean, W. R., 1927, “Note on the Motion of Fluid in a Curved Pipe,” *Phil. Mag.*, Vol. 4, pp. 208~223

(4) Humphrey, J. A. C., Taylor, A. M. K. and Whitelaw, J. H., 1977, “Laminar Flow in a Square Duct of Strong Curvature,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 83, pp. 509~527

(5) Winters, K. H., 1987, “A Bifurcation Study of Laminar Flow in a Curved Tube of Rectangular Cross-section,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 180, pp. 343~369

(6) Berger, S. A., Tabolt, L. and Yao, L.-S., 1983, “Flow in Curved Pipes,” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 15, pp. 461~512

(7) Thangam, S. and Hur, N., 1990, “Laminar Secondary Flows in Curved Rectangular Ducts,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 217, pp. 421~440

(8) Baek, J. H. and Ko, C. H., 2000, “Numerical Flow Analysis in a Rotating Square Duct and a Rotating Curved Duct,” *Int. J. Rotating Machinery*, Vol. 6, pp. 1~9

(9) Baura, S. N., 1954, “Secondary Flow in a Rotating Straight Pipe,” *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. 227, pp. 133~139

(10) Ito H., 1959, “Friction Factors for Turbulent Flow in Curved Pipes,” *J. Basic Eng.*, Vol. 81, pp. 123~134

(11) Soh, W. Y. and Berger, S. A., 1987, “Fully Developed Flow in a Curved Pipe of Arbitrary Curvature Ratio,” *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 733~755

(12) Cheng, K. C. and Akiyama, M., 1970, “Laminar Forced Convection Heat Transfer in Curved Rectangular Channels,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 13, pp. 471~490

(13) Ghia, K. N. and Sokhey, J. S., 1977, “Laminar Incompressible Viscous Flow in Curved Ducts of Regular Cross-Sections,” *J. Fluids Eng.*, Vol. 99, pp. 640~648