1678 대한기계학회논문집 B권, 제24권 제12호, pp. 1678~1682, 2000

구배두께를 이용한 대류열전달의 재해석

김 찬 중*

(2000년 5월 21일 접수)

An Alternative Use of the Heat Transfer Coefficient in Terms of the Gradient Thickness

Charn-Jung Kim

Key Words: Gradient Thickness(구배두께), Heat Transfer Coefficient(열전달계수), Nusselt Number (누셀트 수), Reynolds Number(레이놀즈 수)

Abstract

In this article, the concept of gradient thickness is further extended to characterize the gradient behavior of the thermal and momentum boundary layer near a solid surface. The gradient thickness can replace the use of the conventional heat transfer coefficient used in the analysis of convective heat transfer. Also, the re-interpretation of the Nusselt and Reynolds numbers in terms of the gradient thickness provides a much easier grasp of the physical and practical meaning of the processes involved. Although there is no urgent need to discard the concept of the conventional convective heat transfer coefficient, the concept of the gradient thickness is believed to serve as an efficient tool in helping students understand underlying physics.

1. 서 론

열전달의 기본모드는 열전도, 대류열전달 및 복사열전달의 세 가지 형태로 구분되어 다루어진다. 각 열전달 모드에 대해서 열유속(단위면적 당 열전달량)은 다음과 같이

$$\circ\ 전도:\ q_w'' = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\circ\ 대류:\ q_w'' = h(T_w - T_\infty) \tag{1}$$

$$\circ\ 복사:\ q_w'' = \varepsilon\sigma(T_w^4 - T_\infty^4)$$

의 형태로 구성방정식이 주어지고, 이러한 관계는 자연법칙인 열역학 제1법칙과 결합되어 전달현상을 해석하는 지배방정식을 보충하는 경계조건으로 귀착된다. 그런데 위의 세 가지 열전달 모드에서 전도와 복사의 구성방정식에 참여하는 인자 k, ε, σ와는 대조적으로 대류의 구성방정식에서 나타나는 열전달계수 h는 유동의 상태에 의존하는 비례상수로서의 역할을 한다.

역사적으로 거슬러 올라가 이러한 배경을 살펴보면 대류의 해석은 뉴턴의 냉각법칙으로 시작되었으며 열전도도와 열경계층의 개념은 훨씬 이후에 도입되었기 때문으로 생각된다. 이 후 열경계층의 개념이 프란틀에 의해 제안되어 고체벽면에서 유체로의 열전달은 유체에서의 푸리에법칙

$$q_w'' = -k_f\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w \tag{2}$$

으로 서술될 수 있다는 것이 알려졌다. 이 결과는

* 회원, 서울대학교 기계항공공학부
E-mail : kimcj@plaza.snu.ac.kr
TEL : (02)880-1662 FAX : (02)883-0179

뉴턴의 냉각법칙과 결합하면

$$q_w'' = \underbrace{h(T_w - T_\infty)}_{\substack{\text{convection}\\ \text{in fluid}}} = \underbrace{-k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w}_{\substack{\text{conduction}\\ \text{in fluid}}} \tag{3}$$

와 같이 쓸 수 있다. 위 식에 기초하여 열전달계수는

$$h = -\frac{k_f}{T_w - T_\infty} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{4}$$

으로부터 결정할 수 있으며, 열경계층에서의 온도분포는 해석적 또는 실험이나 수치실험에 의해서 결정하게 된다.[1]

본 연구는 기존의 열전달계수 대신에 구배두께라는 개념을 도입하여 대류의 해석이 가능하다는 사실을 제안하고 이러한 방법은 열경계층의 상태를 있는 그대로 이해하고 파악하는 데 휠씬 유리하다는 점을 알리고자 수행되었다. 그러나 이러한 시도는 열전달계수가 더 이상 유용하지 않다는 시각에서가 아니라 구배두께를 이해함으로써 열전달의 교육에 보다 좋은 계기가 될 것으로 판단하는 관점에서 이해되어야 할 것이다.

2. 구배두께의 개념

2.1 구배두께의 정의

고체 표면에서의 대류열전달이 어떻게 일어나는가를 Fig. 1을 참고하여 생각해보자. 고체 표면의 온도 T_w이 유체의 온도 T_∞보다 높은 경우, 고체에 인접한 유체 내부의 열경계층에서의 온도분포는 그림에 보인 바와 같이 될 것이다.

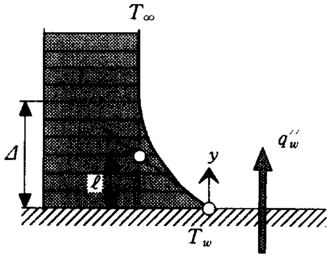


Fig. 1 A new concept of the gradient thickness in the thermal boundary layer

먼저 구배두께의 개념을 도입하기 위해서 Fig. 1에서 고체벽면으로부터 유체 내부의 온도분포 위에 접선을 긋고 $T = T_\infty$인 선과 만나는 점을 찾아보자. 그리고 이 점으로부터 벽면까지의 거리를 온도곡선의 구배두께(gradient thickness) ℓ이라 정의하기로 한다. 그림에서 알 수 있듯이 구배두께는 열경계층의 두께 Δ보다는 작게 나타나는 경우가 일반적이고 상사(similarity)가 이루어지는 경우에는 비율 ℓ/Δ가 일정한 값을 가지게 된다.

본 연구에서 정의하는 구배두께는 이전부터 화학공학자들이 즐겨 사용하던 "equivalent stagnation film thickness"와 본질적으로 같다.[2] 그러나 이전의 연구자들이 구배두께 대신에 대류열전달계수를 보다 중요시한 관점과는 달리 본 연구에서는 구배두께의 역할이 대류열전달계수에 비해 더욱 의미가 있으며 또한 속도경계층에 대해서도 개념을 확장할 수 있다는 것을 밝히고자 한다.

2.2 누셀트 수의 재해석

여기서 새롭게 정의된 구배두께 ℓ은 쉽게 이해할 수 있는 물리적인 양일뿐만 아니라 열경계층의 상태를 가장 명백히 기술하는 양이 된다. 한편 구배두께를 이용하면 벽면에서의 열유속은

$$q_w'' = -k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = k_f \frac{T_w - T_\infty}{\ell} \tag{5}$$

으로 된다. 위 식과 (3)을 결합하면 길이스케일 ℓ을 기준한 누셀트 수는

$$\mathrm{Nu}_\ell = \frac{h(T_w - T_\infty)}{k_f \dfrac{T_w - T_\infty}{\ell}} = \frac{h\ell}{k_f} = 1 \tag{6}$$

와 같이 표현된다. 그런데 실용적인 관점에서는 열전달 문제를 특성짓는 적당한 길이스케일 L에 대한 누셀트 수를

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{hL}{k_f} = \frac{L}{\ell} \tag{7}$$

으로 정의하여 사용한다. 윗식에서 첫 번째 등호는 전통적으로 사용되어 온 누셀트 수의 정의이고, 두 번째 등호는 본 연구에서 도입하는 누셀트 수의

정의이다.

열전달 시스템의 특정한 길이스케일 L은 유체의 온도분포로부터 결정되는 구배두께 ℓ보다 작지 않기 때문에 보통 $\mathrm{Nu}_L \geq 1$이 되며, 새로운 길이스케일 L을 크게 잡을수록 Nu_L는 자동적으로 커진다는 점에도 매우 주의하여야 한다. 또한 무차원 거리와 무차원 온도를

$$y^* = \frac{y}{L}, \quad T^* = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \tag{8}$$

로 정의하면 누셀트 수는 잘 알려진 바와 같이

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}_L &= \frac{L}{k_f}\frac{q_w''}{T_w - T_\infty} \\ &= \frac{L}{T_\infty - T_w}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)_{y^*=0} \end{aligned} \tag{9}$$

인 형태로 길이스케일 L을 기준한, 표면에서의 무차원 온도구배를 나타낸다. 따라서 지금까지의 논의를 정리하면 누셀트 수는

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{hL}{k_f} = \frac{L}{\ell} = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)_{y^*=0} \tag{10}$$

와 같이 표현할 수 있다. 위에서 $\mathrm{Nu}_L = \frac{L}{\ell}$인 해석은 본 연구에서 제안하는 것으로 실제로 열전달계수 h를 사용하는 것보다 구배두께 ℓ을 사용하는 것이 물리적으로 이해하기도 쉽고 간단하다는 것을 알게 된다.

2.3 길이비로 정의한 누셀트 수의 활용

본 연구에서 누셀트 수를 길이비로 정의할 때의 장점에 대해서 논의하기로 한다. Fig. 2에서 유체유동에 의한 열전달이 $\mathrm{Nu}_x = 4$로 특성된다고 할 때 구배두께는 누셀트 수의 정의

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{x}{\ell} = 4 \tag{11}$$

으로부터

$$\ell = \frac{x}{4} \tag{12}$$

을 구할 수 있다. 이것을 이용하면, Fig. 2와 같이 유체의 온도 T_∞을 나타내는 선을 그린 다음에 T_∞을 나타내는 선에서 높이가 $\ell = x/4$가 되는 점에서 T_w을 나타내는 점을 연결하여 벽면에서의 온도기울기를 결정한 다음에 개략적인 온도분포를 그리면 된다. 그러나 누셀트 수로부터는 온도분포의 기울기만을 구할 수 있으므로 온도분포가 유일하게 주어지는 것은 아니다. 더구나 T_∞의 값에 따라 온도분포는 또 다른 모양을 가지게 된다.

흔히 열전달 교과서에서 누셀트 수는 전도열전달에 대한 대류열전달의 비로 설명하고 있는데 이것은 $\mathrm{Nu}_x = 4$인 경우를 유동이 정지한 경우보다 대류에 의한 열전달이 4배 증가하는 것으로 착각하게 되는 원인이 된다.

그러나 본 연구에서 정의하는 누셀트 수에 의하면 $\mathrm{Nu}_x = 4$는 길이스케일 x에 비해서 구배두께 ℓ이 1/4이라는 물리적인 상태를 알려주고 열전달량은

$$q_w'' = k_f \frac{T_w - T_\infty}{\ell} \tag{13}$$

으로부터 바로 구할 수 있다는 사실을 포함한다. 다시 말해서 구배두께 ℓ을 이용하면 온도분포의 기울기를 바로 알 수 있을 뿐만 아니라 열전달량도 쉽게 결정할 수 있는 반면에, 열전달계수 h를 사용할 때는 열전달량은 바로 구할 수 있지만 온도분포가 어떤 형태의 곡선이라는 것을 알기 어렵다.

3. 속도장에 대한 구배두께

속도경계층에 대해서도 열경계층에서와 마찬가지로 구배두께를 정의할 수 있으므로 이에 대해서

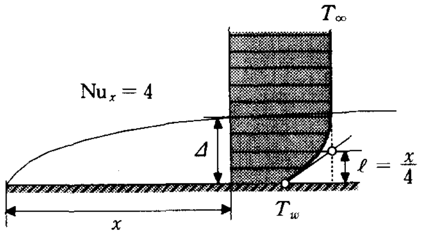


Fig. 2 The Nusselt number and the temperature profile near the solid surface

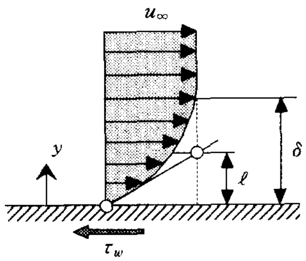


Fig. 3 The gradient thickness in the velocity boundary layer

알아보기로 한다. Fig. 3에는 경계층의 두께가 δ인 속도경계층이 고체 표면에서 발달한 상태를 나타내었다. 속도경계층의 바깥은 u_∞인 속도이고 벽면에서 속도곡선에 그은 접선으로부터 구한 구배두께를 ℓ이라고 하면 벽면에서 유체에 작용하는 전단응력은

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \mu \frac{u_\infty}{\ell} \tag{14}$$

이다. 여기서 점성력에 대한 관성력의 비를 나타내는 레이놀즈 수(Reynolds number)는

$$\mathrm{Re}_\ell \equiv \frac{\rho u_\infty^2}{\tau_w} = \frac{\rho u_\infty^2}{\mu \dfrac{u_\infty}{\ell}} = \frac{u_\infty \ell}{\nu} \tag{15}$$

으로 쓸 수 있고, 또한 벽면에서의 마찰계수는

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} \tag{16}$$

으로 정의되므로 구배두께 ℓ에 기준한 레이놀즈 수 $\mathrm{Re}_\ell = \dfrac{u_\infty \ell}{\nu}$와 비교하면

$$\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_\ell = 1 \tag{17}$$

을 얻는다. 다시 말해서 마찰계수를 알면 Re_ℓ를 구할 수 있고, 그 반대도 성립한다.

실질적으로는 적절한 의미를 가지는 새로운 길이스케일 L에 기준한 레이놀즈 수를

$$\mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{L}{\ell}\frac{u_\infty \ell}{\nu} = \frac{L}{\ell}\mathrm{Re}_\ell \tag{18}$$

으로 정의하고 사용하는 것이 편리하다. 그리고 식 (17)과 (18)을 결합하면

$$\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_L = \frac{L}{\ell} \tag{19}$$

임을 알 수 있다. 또한 마찰계수와 레이놀즈 수의 정의로부터

$$\begin{aligned}\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_L &= \frac{u_\infty L}{\nu}\frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} \\ &= \frac{u_\infty L}{\nu}\frac{1}{\rho u_\infty^2}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w\end{aligned}$$

이므로 $y^* = y/L$ 및 $u^* = u/u_\infty$를 정의하면

$$\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_L = \frac{L}{\ell} = \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)_{y^*=0} \tag{20}$$

으로 알려진 바와 같이 무차원온도구배와 동일하게 된다.

4. 상사관계

앞에서 정의한 온도구배두께와 속도구배두께를 구분하기 위해서 첨자 t와 m을 붙이기로 하고 정리하면 Table 1에 보인 바와 같이 된다. 특히 속도와 온도분포가 각각 기하학적인 상사관계를 이룬다고 하면

$$\frac{u}{u_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right),\quad \frac{T-T_w}{T_\infty - T_w} = g\left(\frac{y}{\Delta}\right) \tag{21}$$

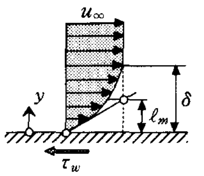
으로 상사함수를 정의할 수 있다. 위의 상사함수를 이용하면

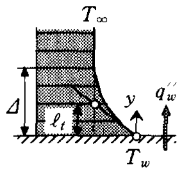
$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{\mu}{\rho u_\infty^2}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{f'(0)}{\mathrm{Re}_x}\frac{x}{\delta}$$

이므로

$$f'(0) = \frac{\delta}{\ell_m} \tag{22}$$

Table 1 Interpretation of the Reynolds and Nusselt number in terms of the gradient thickness, where x represents any meaningful length scale





속도경계층두께 δ	온도경계층두께 Δ
속도구배두께 ℓ_m	온도구배두께 ℓ_t
$\tau_w = \mu \frac{u_\infty}{\ell_m}$	$q_w'' = k_f \frac{T_w - T_\infty}{\ell_t}$
$\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_x = \frac{x}{\ell_m} = \frac{\partial u^*}{\partial y^*}$	$\mathrm{Nu}_x = \frac{x}{\ell_t} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*}$
$f'(0) = \frac{\delta}{\ell_m}$	$g'(0) = \frac{\Delta}{\ell_t}$

*속도 및 온도경계층이 각각 상사관계에 있을 때는 상사함수를 $\frac{u}{u_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$, $\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = g\left(\frac{y}{\Delta}\right)$라고 하자.

인 관계가 성립한다. 마찬가지로 열경계층에 대해서도 상사함수를 미분하면

$$g'(0) = \frac{\Delta}{\ell_t} \tag{23}$$

으로 상사함수의 벽면에서의 미분값은 구배두께와 열경계층두께의 비를 나타낸다. 이러한 비로부터 속도구배두께와 온도구배두께의 역할의 중요성을 또한 파악할 수 있다.

그리고, Table 1에서 $\frac{C_f}{2}\mathrm{Re}_x$와 Nu_x의 비를 구하면

$$\frac{C_f}{2}\frac{\mathrm{Re}_x}{\mathrm{Nu}_x} = \frac{\ell_t}{\ell_m} \tag{24}$$

으로 된다. 그런데 압력구배가 없고 평판 위를 흐르는 층류자유흐름에 대해서는 속도 및 온도분포가 상사관계를 이루고, 적당한 크기의 프란틀 수 Pr 에 대해서 구배두께의 비는 경계층두께의 비와 같으므로

$$\frac{\ell_t}{\ell_m} = \frac{\Delta}{\delta} = \mathrm{Pr}^{-1/3} \tag{25}$$

이 성립한다. 그리고 스탠톤 수(Stanton number)

$$\mathrm{St} \equiv \frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr}} = \frac{h}{\rho c_p u_\infty} \tag{26}$$

를 이용하면 식 (24)는

$$\frac{C_f}{2} = \mathrm{St}\,\mathrm{Pr}^{2/3} \tag{27}$$

인 콜본 상사(Colburn analogy)에 도달한다.

5. 결 론

본 연구에서는 지금까지 전통적으로 사용되어온 열전달계수 h를 대신할 수 있는 개념인 온도구배두께 ℓ을 제안하였다. 이러한 구배두께에 대해서는 이전의 연구자들에 의해 언급된 바가 있지만 열전달계수를 보다 중요시하는 경향으로 그다지 깊이 취급되지 않았다. 온도구배두께는 온도분포 자체로부터 결정할 수 있는 물리적인 두께를 나타내며, 열전달량은 $q_w'' = k_f \frac{T_w - T_\infty}{\ell}$으로부터 구할 수 있고, 길이스케일 x에 기준한 누셀트 수는 $\mathrm{Nu}_x = \frac{x}{\ell}$으로 해석된다. 이러한 관점에서 보면 열전달계수는 열전달량을 구할 때에는 도움이 되지만 온도분포의 상태를 바로 알려주는 것이 아니므로 구배두께보다 사용이 불편함을 알 수 있다. 그러나 본 연구의 결과는 지금까지 사용되어온 열전달계수를 사용하지 않는 방향을 주장하기 보다는 구배두께를 이용하여 대류열전달의 이해를 높히는 교육적인 측면에서 이해되는 것이 바람직하다.

후 기

본 연구는 서울대학교 정밀기계설계공동연구소(TPMRC) 및 G7 윤활· 유동해석기술개발사업의 지원을 받아 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

(1) 김찬중, "길잡이 열전달," 문운당, 출간예정.
(2) Mills, A. F., 1995, *Basic Heat and Mass Transfer*, Irwin.