대형 설계 시스템의 효율적 반응표면 근사화를 위한 점진적 이차 근사화 기법

홍경진* · 김민수** · 최동훈***

(2000 년 5 월 16 일 접수)

Progressive Quadratic Approximation Method for Effective Constructing the Second-Order Response Surface Models in the Large Scaled System Design

Kyung-Jin Hong, Min-Soo Kim and Dong-Hoon Choi

Key Words : Progressive Quadratic Approximation(점진적 이차 근사화), Response Surface(반응표면), Sequential Approximate Optimization(순차적 근사 최적화), Trust Region(신뢰영역)

Abstract

For effective construction of second-order response surface models, an efficient quad ratic approximation method is proposed in the context of trust region model management strategy. In the proposed method, although only the linear and quadratic terms are uniquely determined using 2 n+1 design points, the two-factor interaction terms are mathematically updated by normalized quasi-Newton formula. In order to show the numerical performance of the proposed approximation method, a sequential approximate optimizer is developed and solves a typical unconstrained optimization problem having 2, 6, 10 , 15, 30 and 50 design variables, a gear reducer system design problem and two dynamic response optimization problems with multiple objectives, five objectives for one and two objectives for the other. Finally, their optimization results are compared with those of the CCD or the 50 % over-determined D-optimal design combined with the same trust region based sequential approximate optimizer. These comparisons show that the proposed method gives more efficient than others.

1. 서 론

CFD 나 비선형 FEA 와 같이 해석에 요구되는 계산 비용이 높으면서도 해석적인 설계 민감도 정보가 제공되지 않는 분야의 최적설계가 많이 요구됨에 따라, 반응표면 모델을 기존의 수치 최적화(numerical optimization)에 조합하려는 연구가 활발히 진행되어 오고 있다.[1,2]

반응표면 모델를 이용한 순차적 근사 최적화에서는 근사화된 모델(approximate model)이 실제 모델(actual model)에 대하여 갖는 오차의 정도를 충실도(fidelity)라 하는데, 이런 충실도의 높고 낮음에 따라 근사모델을 효과적으로 관리하여야만 근사 최적화의 수렴성이 보장된다. 초기 연구에서는 근사모델을 관리하기 위하여 고정 또는 가변적인 이동제한 기법(move limit strategy)을 사용하였다.[1,3] 그러나 이동제한 기법을 사용한 기존의 연구는, 비록 향상된 설계 결과를 가져왔지만, 전체적인 설계의 수렴성이 수학적으로 증명되지 못하는 중요한 단점이 있었다. 그래서 이 분야에 대한 최근 연구들은, 근사화된 모델의 관리에 수렴성을 부여하기 위하여, 신뢰영역 알고리듬(trust region algorithm)의 기본 개념을 도입하였다. 이는 신뢰영역 알고리듬이 근사 최적설계 기법의 수렴성을 보장하고 있기 때문이다.[4,5] 신뢰영역 개념을 적용한

* 한양대학교 대학원 기계설계학과
** 한양대학교, BK21 기계분야 계약교수
*** 회원, 한양대학교, 최적설계신기술연구센터
E-mail : dhchoi@email.hanyang.ac.kr
TEL : (02)2290-0443 FAX : (02)2290-1639

근사화된 모델 관리 기법은 낮은 충실도를 갖는 근사모델이 실제모델 대해 어느 정도의 오차범위 내에 있도록 신뢰영역을 조절하게 된다. 하지만, 이런 신뢰영역 관리 기법이 근사 최적화 기법의 수렴성은 보장할 수 있지만, 설계변수의 개수가 어느 정도 이상이 되면 반응표면 근사모델을 생성하는데 드는 수치적 시간적 비용이 상당히 증가하게 된다. 그래서, 반응표면 모델을 이용한 근사 최적화 기법은 지금까지 소형 최적화 문제에만 적용이 되어왔다.[6]

본 연구에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위하여 점진적 이차 근사화(progressive quadratic approximation: PQA) 기법을 제안하고자 한다. 본 연구에서 제안된 방법의 장점은 다음과 같다. 첫째, 단지 $2n+1$ 개의 표본점(sampling point)으로 이차 근사모델을 생성할 수 있다. 이차 근사모델의 회귀 계수(regression coefficient) 중 일차 및 이차 항들은 표본점이 만드는 설계행렬(design matrix)이 정규직교(orthonormal)하기 때문에 유일하게 결정된다. 또한, 신뢰영역 근사모델 관리 기법을 적용함으로써 전역 근사화 형태로 생성된 근사모델은 최적화가 진행될수록 이들 일차 및 이차 회귀 계수들은 중앙-차분법으로 근사화된 일차 및 이차 도함수 값들과 같아지기 때문에 국부 근사모델로 수렴되어진다. 둘째, 설계변수간의 교호작용을 표현하는 회귀 계수들은 정규화된 준-뉴튼 공식(normalized quasi-Newton formula)을 사용하여 계산한다. 셋째, 제안된 PQA 방법은, 기존의 실험계획법에 기초를 둔 근사화 방법이 최소 자승법을 사용하여 근사 모델을 생성하는 것과 달리, 근사모델을 생성하는데 드는 추가적인 계산이 요구되지 않는다.

본 연구에서는 제안된 PQA 방법과 더불어 기존의 중심합성계획법(central composite design: CCD)과 D-최적성계획법(D-optimal design)[7] 등을 신뢰영역 근사모델 관리 기법에 적용시킨 프로그램을 개발하고, 이에 다양한 예제를 적용하여, 그 결과치들을 상대 비교함으로써 PQA 방법의 효율성을 보이고자 한다.

2. 신뢰영역 알고리듬 및 이에 기반한 근사 최적화기법들의 고찰

2.1 신뢰영역 알고리듬의 기본적인 개념

신뢰영역 알고리듬[8]은 유일 최적해를 갖지 않는 함수를 테일러 급수(Taylor series)에 의하여 이차 함수 $q(\boldsymbol{\delta}_k)$ 로 근사화하여 최적설계를 할 때, 뉴튼 방법이 적용될 수 없는 수치적 어려움을 극복하기 위하여 개발되었다. $f(\mathbf{x}_k+\boldsymbol{\delta}_k)$ 와 비교적 잘 일치하도록 $q(\boldsymbol{\delta}_k)$ 가 근사화되는 영역이 $\mathbf{x}_k$ 의 근방의 $\Gamma^k=\{\boldsymbol{\delta}_k:\|\boldsymbol{\delta}_k\|\le h^k\}$ 로 가정된다면 새로운 설계점 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k+\boldsymbol{\delta}_k$ 은 다음의 최적화 문제를 통해 결정될 수 있다.

$$\text{Minimize} \quad q(\boldsymbol{\delta}_k)=\nabla f(\mathbf{x}_k)^T\boldsymbol{\delta}_k+\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_k^T\mathbf{G}_k\boldsymbol{\delta}_k \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \|\boldsymbol{\delta}_k\|\le h^k \tag{2}$$

위와 같은 최적화 문제를 반복적으로 푸는 방법을 신뢰영역 알고리듬이라고 한다. 신뢰영역 알고리듬에서 h^k 는, 근사화된 영역이 과도하게 제한되어 수렴 속도가 늦어지는 것이 방지되도록 $q(\boldsymbol{\delta}_k)$ 와 $f(\mathbf{x}_k+\boldsymbol{\delta}_k)$ 의 충실도를 비교하여, 될 수 있는 한 크게 설정한다. 이를 위하여, k^{th} 단계의 f 의 실제 감소량을 식 (3)과 같이 정의하고

$$\Delta f^k=f(\mathbf{x}_k)-f(\mathbf{x}_k+\boldsymbol{\delta}_k) \tag{3}$$

이에 상응하는 예측 감소량을

$$\Delta q^k=q(\mathbf{0})-q(\boldsymbol{\delta}_k)=f(\mathbf{x}_k)-q(\boldsymbol{\delta}_k) \tag{4}$$

로 정의한다. 그리고, 식 (3)과 (4)를 이용하여 감소비를 식 (5)와 같이 정의한다.

$$r^k=\Delta f^k/\Delta q^k \tag{5}$$

이때 감소비 r^k 는 $f(\mathbf{x}_k+\boldsymbol{\delta}_k)$ 에 대한 $q(\boldsymbol{\delta}_k)$ 의 충실도를 측정하는 척도인데, r^k 가 1 에 가까울수록 $q(\boldsymbol{\delta}_k)$ 의 충실도가 좋아지는 것을 의미한다. 대부분의 전형적인 신뢰영역 알고리듬들은 r^k 에 의해 측정되는 충실도를 어느 정도 유지시키기 위하여 적절히 h^k 를 감소시키거나 증가시킨다. 바로 이 점이 신뢰영역 알고리듬에 기반을 둔 근사모델 관리 기법이 경험적으로 설계변수의 이동량을 제한하는 기존의 근사모델 관리 기법 보다 우수한 특징이다.

만약 식 (1)의 헤시언(Hessian) $\mathbf{G}_k$ 가 근사화된 헤시언 $\mathbf{B}^k$ 로 대체될지라도, $\mathbf{B}^k$ 가 유계(bound) 만 되면, Fletcher[9]와 Powell[10]에 의하여 신뢰영역 알

고리듬의 전역 수렴성(global convergence)이 보장됨을 밝혔다. 이 점이 신뢰영역 알고리듬이 근사모델을 관리하기 위해 많이 사용되는 또 다른 근간이 된다.

2.2 신뢰영역 알고리듬에 기반한 순차적 근사 최적화 기법들

1996 년 Dennis 와 Torczon[4]이 신뢰영역 알고리듬을 최적설계에서 근사모델을 관리하기 위해 도입한 이후, 이 분야에서 이루어진 최근의 대다수의 연구들은 신뢰영역 모델 관리 기법을 기본적으로 사용하여왔다.[4,5,11,12] 신뢰영역 알고리듬은 순차적 근사 최적화에서 설계의 수렴성을 보장해주기 때문에 다양한 근사 최적화 기법들을 개발할 수 있는 수학적 기초를 제공하여 준다. 또한, 신뢰영역 알고리듬은 확장 라그랑지 승수 방법(augmented Lagrange multiplier method)[11]과 반복 이차계획법(sequential quadratic programming method)[13]의 부차적인 최적화 도구(sub-optimizer)로 사용될 수 있기 때문에, 구속조건이 있는 일반적 최적설계 문제를 풀기 위한 알고리듬으로 쉽게 확장될 수 있다.

신뢰영역 모델 관리 기법이 근사 최적화를 위한 수학적 기초를 제공함에도 불구하고, 대형 최적설계에 반응표면으로 근사화된 모델을 사용할 때는 다음과 같은 두 가지 어려움이 여전히 존재한다. 첫째는, 반응표면 모델을 생성하기 위해서는 많은 수의 표본점들이 필요하다. 둘째, 반응표면 모델을 사용하는 것은 근사 최적화 과정 전체에서 볼 때, 반응표면 모델을 생성하는데 별도의 수치적 계산을 많이 요구하기 때문에 총 계산 비용을 감소시키지 못한다.[14]

2.3 실험계획법에 기초한 반응표면 모델 생성에 관한 고찰

표본점들의 개수와 반응표면 모델의 상관 관계를 살펴보기 위해, 이차 근사모델의 생성을 고려해보자. 이차 근사모델은 회기 계수를 추정하기 위하여, 각 설계변수에 대해 적어도 3 개의 표본점들이 필요하다. 이는 최소한 정방형의 설계공간에서 각 꼭지점과 각 모서리의 가운데에 표본점이 필요하다는 것을 의미한다. 따라서 3^n 완전 계승 계획법(full factorial design)이 필요하다. 여기서 n 은 설계변수의 개수이다. 그러나 3^n 완전 계승 계획법은 설계변수가 2 개 또는 3 개일 때와 같이 설계변수의 개수가 적을 때는 괜찮지만, 설계변수의 개수가 많은 대형 설계 시스템의 최적설계에 적용시키기엔 곤란하였다.

위와 같은 문제를 해결하기 위해 1987 년 Box 와 Draper[15]은 2-수준 계승 계획법(two-level factorial design)에 회전성(rotatability)을 고려하여 중심점과 축점을 추가시킨 중심합성계획법을 소개하였다. 중심합성계획법은 3^n 개의 표본점을 필요로 하는 완전 계승 계획법에 비해 적은 2^n+2n+1 개의 점을 사용하지만, 중심합성계획법 또한 설계변수가 10 개 이상이 되면 근사모델을 생성하기 위해 필요한 표본점의 개수가 너무 많아져 사용하기가 어렵다. 따라서, 많은 연구에서 표본점의 개수를 줄이기 위하여 D-최적성 계획법[16]이 사용되어 왔는데, 이는 표본점의 개수를 근사모델의 항 수와 동일한 개수로 줄일 수 있기 때문이다. 그러나 이런 포화된(saturated) D-최적성 계획법은 충실도가 낮은 근사모델을 생성할 수 있다.[7] 따라서 근사모델의 항 수 보다 20%에서 50% 정도 많은 표본점을 선택하는 과잉 결정된(over-determined) D-최적성 계획법이 많이 사용되고 있다.[2] 그러나 이런 과잉 결정된 D-최적성 계획법들 또한 중심합성계획법에 비하여 보다 적은 수의 표본점들을 사용함에도 불구하고, 근사모델의 항의 개수보다 1.2 배에서 1.5 배의 표본점들이 필요하다. 참고로 포화된 D-최적성 계획법을 이차 근사모델에 적용시킬 때 필요한 표본점들의 개수는 $1+2n+n(n-1)/2$ 개가 된다.

3. 점진적 이차 근사화(PQA) 방법

PQA 방법은 기본적으로 준-뉴튼 식을 사용한다. 그러나, 준-뉴튼 헤시언 개선 공식을 이용한 전형적인 기존의 근사화 방법과는 완전히 다르다. 전형적인 준-뉴튼 헤시언 개선 공식은 최적화 과정의 연속적인 반복 단계에서 얻는 국부적인 정보만을 사용하는 국부 근사화(local approximation) 방법임에 비해, 제안된 PQA 방법은 최적화 과정의 초기에는 전역 근사화(global approximation) 형태의 근사모델이지만, 최적화 과정이 진행되면서 점차로 국부 근사모델로 정확하게 수렴한다.

PQA 방법은 크게 두 가지 과정으로 이루어져 있다. 첫번째는, 표본점들을 선택하는 과정이며, 두번째는 정규화된 준-뉴튼 개선 공식을 적용하여 본격적으로 이차 근사모델을 점진적으로 생성하는 과정이다.

3.1 표본점 선택 과정

1st 반복 단계에서 Fig. 1(a)와 같이 모두 $2n+1$ 개의 표본점을 각 설계변수 축에서 두개씩 그리고 중심점에서 한 개를 선택한다. 그리고, 각 표본점에 대하여 해석을 통해 실제 함수 값을 계산한 후 이차 근사모델을 생성한다. Fig. 1(a)에서 보듯이 표본점들 중 중심점 $\mathbf{x}_0$에 대하여 두 개의 설계변수들의 값이 모두 변화된 교호작용점(interaction point)이 없기 때문에, 생성된 이차 근사모델의 이차항은 교호작용항(interaction term)을 가지고 있지 않는다. 이렇게 생성된 근사모델을 초기 신뢰영역 Γ^1 안에서 최적화를 수행하여 Fig. 1(b)와 같은 새로운 설계점 $\mathbf{x}_1$를 계산한다. 이때, 초기 신뢰영역 Γ^1은 전 설계영역을 포함하거나 그 일부분이 될 수 있다. 다시 $\mathbf{x}_1$에 대하여 실제 함수 값을 계산하고, 식 (5)를 이용하여 근사모델의 충실도를 평가하고 이 충실도에 따라서 2nd 반복 단계를 위한 새로운 신뢰영역 Γ^2를 만든다. Γ^2에서의 표본점들은 Fig. 1(b)와 같이 $\mathbf{x}_1$를 중심으로 각 설계변수 축을 따라 새로운 $2n$개가 추출되며 1st 반복 단계에서와 같은 방법으로 새로운 이차 근사모델이 생성된다. 그러나 1st 반복 단계와 달리 2nd 반복 단계부터는 생성된 이차 근사모델이 직접 최적화를 위해 사용되지 않고 정규화된 준-뉴튼식이 적용되기 시작한다.

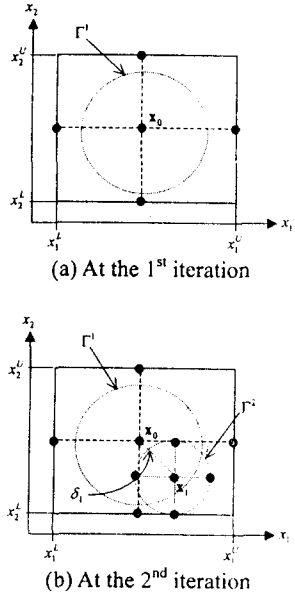


Fig. 1 Design point sampling at the first two iterations

3.2 정규화된 준-뉴튼 식을 이용한 점진적 이차 반응표면 근사화

$\mathbf{g}_k$와 $\mathbf{D}_k$를 $2n+1$개의 표본점들에 의해 근사화된 k^{th} 반복 단계에서의 이차 근사모델의 일차 및 이차 회귀 계수항들이라고 하고, $\boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$와 $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}$ 라 하자. 근사 헤시언은 BFGS 식으로 잘 알려진 준-뉴튼 식인 식 (6)에 의해 생성될 수 있다.

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_{k-1} - \frac{(\mathbf{B}_{k-1}\boldsymbol{\delta}_k)(\mathbf{B}_{k-1}\boldsymbol{\delta}_k)^T}{\boldsymbol{\delta}_k^T\mathbf{B}_{k-1}\boldsymbol{\delta}_k} + \frac{\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^T}{\mathbf{y}_k^T\boldsymbol{\delta}_k} \tag{6}$$

여기서, $\mathbf{B}_k$는 k^{th} 반복 단계에서의 근사 헤시언을 의미하고 $\mathbf{B}_0 = \mathbf{D}_0$이다. 설계점 $\mathbf{x}_k$에서 원래 헤시언 $\mathbf{D}_k$는 비 대각선 요소(off-diagonal element)를 가지고 있지 않지만, 식 (6)의 준-뉴튼 식에 의해 생성된 근사 헤시언 $\mathbf{B}_k$는 비 대각선 요소를 가지게 된다. 그러나 비교적 작은 설계영역인 Γ^k에서 $\mathbf{D}_k$는 $\mathbf{B}_k$보다 더 정확한 대각선 요소(diagonal element)를 가지고 있으며, 이런 특성은 최적화 과정이 진행될수록 현저하게 나타나게 된다. 따라서 $\mathbf{B}_k$의 대각선 요소를 $\mathbf{D}_k$로 치환하기 위해 식 (7)을 이용하여 정규화된 근사 헤시언 $\tilde{\mathbf{G}}_k$를 생성한다.

$$\tilde{\mathbf{G}}_k = \mathbf{S}_k^T\mathbf{B}_k\mathbf{S}_k \tag{7}$$

여기서 $\mathbf{S}_k$는 대각선 행렬이고, $\mathbf{S}_k$의 i^{th} 요소인 S_k^{ii}는 $\sqrt{|D_k^{ii}|}\Big/\sqrt{|B_k^{ii}|}$이다. 또한, $\tilde{\mathbf{G}}_k$에서, 대각선 요소의 부호들은 $\mathbf{D}_k$의 부호로 치환된다. 전형적인 수학적 최적설계 문제와는 달리, 실제 공학 문제들은 기본적으로 비-볼록(non-convex) 함수들이다. 따라서, $\mathbf{D}_k$의 요소들은 양수 값과 음수 값을 동시에 가질 수 있으며, 이는 준-뉴튼식에 의해 생성되는 비 대각선 요소가 부 정확하게 되어, 단순히 일차 및 이차 항만을 가진 근사모델 보다, 충실도가 감소하게 된다. 그러나 이와 같은 경우에도 신뢰영역 알고리듬을 적용한 순차적 근사 최적화의 경우에는 수렴성이 보장된다고 밝혀져 있다.[8] 본 논문에서는 만약 $\mathbf{D}_k$의 어떤 요소가 반대 부호를 가지게 되면, 이에 상응되는 $\tilde{\mathbf{G}}_k$의 비 대각선 요소들은 영으로 치환된다. 이 방법은 안장점(saddle point)이 나타나는 설계점을 기준으로 근

사모델의 교호작용항을 없애는 결과를 주며, 이를 통해 근사모델은 그 설계점을 기준으로 분해 가능한 함수(separable function)가 된다. 위와 같은 방법을 통해 준-뉴튼식을 적용함으로써 발생할 수 있는 오차를 감소시켜, 비-볼록 함수의 경우에도, 점진적 이차 근사화 기법이 보다 높은 충실도를 가질 수 있게 하였다.

PQA 방법을 신뢰영역 근사모델 관리 기법과 결합되면 신뢰영역이 적절히 조절됨으로써 $\mathbf{D}_k$ 의 정확성은 더 높아질 수 있다. 이는, 충분히 작거나 잘 선정된 신뢰영역 안에서는 일차 및 이차 회귀계수인 $\mathbf{g}_k$ 와 $\mathbf{D}_k$ 는 중앙 차분법으로 근사화된 일차 및 이차 도함수와 거의 동일하기 때문이다. 따라서, $\tilde{\mathbf{G}}_k$ 는 $\mathbf{x}_k$ 에서의 실제모델의 해시언과 거의 일치하게 된다. 마지막으로, 식 (6)은 식 (8)과 같이 수정된다.

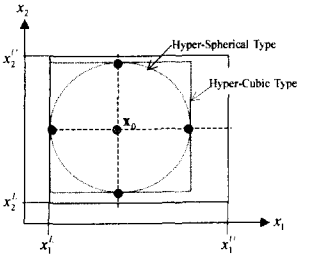
$$\mathbf{B}_k = \tilde{\mathbf{G}}_{k-1} - \frac{\left(\tilde{\mathbf{G}}_{k-1}\boldsymbol{\delta}_k\right)\left(\tilde{\mathbf{G}}_{k-1}\boldsymbol{\delta}_k\right)^T}{\boldsymbol{\delta}_k^T\tilde{\mathbf{G}}_{k-1}\boldsymbol{\delta}_k} + \frac{\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^T}{\mathbf{y}_k^T\boldsymbol{\delta}_k} \qquad (8)$$

본 연구에서는 식 (8)을 정규화된 준-뉴튼식으로 명명하였다.

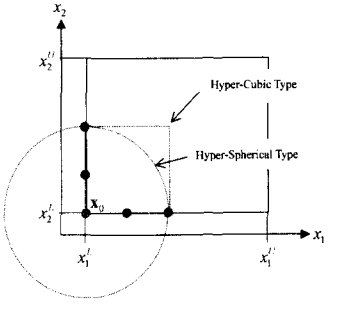
3.3 효과적인 상/하한치 처리를 위한 초-정방형(hyper-cube type) 신뢰영역

신뢰영역 알고리듬은 원래 상/하한치가 없는 비제약조건 최적설계 문제를 풀기 위해 개발됐으므로, Fig. 1 과 같은 초-구면형(hyper-sphere type)의 신뢰영역은 상/하한치를 가지고 있는 일반적인 공학 최적설계 문제들에는 적합하지 않다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 2 와 같은 초-정방형의 신뢰영역을 제안한다.

Fig. 2(a)와 같이 초기 설계점이 상/하한치에 대해 비활성(inactive)인 경우에는 두 가지 형태의 신뢰영역은 근사화되는 영역을 잘 포함할 수 있다. 그러나 Fig. 2(b)와 같이 초기 설계점이 상/하한치에 활성(active)인 경우, 초-정방형 신뢰영역은 Fig. 2(b)와 같은 방법으로 초-구면형 신뢰영역과는 달리 근사화되는 영역을 쉽게 포함할 수 있다. 또한 최적 설계점이 상/하한치에 대하여 활성이면, 초-정방형의 신뢰영역은 최적 설계점을 쉽게 포함할 수 있으나, 초-구면형의 신뢰영역은 상/하한치를 넘지 않는 한 최적 설계점을 포함하기 위하여 무한히 작아져야만 한다.



(a) In case that a nominal design is inactive to all side constraints



(b) In case that a nominal design is active to some side constraints

Fig. 2 Design point sampling strategy according to the activeness of side constraints

4. PQA 방법과 신뢰영역 알고리듬을 이용한 순차적 근사 최적화 기법

4.1 근사 최적화 알고리듬의 수치적 절차

신뢰영역 알고리듬을 사용하여 PQA 모델을 효과적으로 관리하기 위한 수치적 절차 대하여 설명한다.

단계 0 : 초기 신뢰영역 Γ^1 을 초기 설계점을 포함하는 전 설계영역의 한 부분영역이라고 가정하고, $k=1$ 로 설정한다. Γ^1 에 대하여 Fig. 1 또는 Fig. 2 와 같이 표본점들을 선택한다.

단계 1 : 각 설계변수 축을 따라 이차 다항 근사화(second order polynomial approximation)를 사용하여 $\mathbf{g}_k$ 와 $\mathbf{D}_k$ 의 요소를 결정한다. 만약 $k=1$ 이라면, $\tilde{\mathbf{G}}_k = \mathbf{D}_k$ 로 설정하고 단계 3 으로 간다. 그렇지 않으면 $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}$ 로 설정한다.

단계 2 : 식 (8)을 이용하여 이차 항의 계수 행

렬 $\mathbf{B}_k$ 을 계산하고 정규화 식 $\mathbf{S}_k^T\mathbf{B}_k\mathbf{S}_k$ 에 의하여 $\tilde{\mathbf{G}}_k$ 를 생성한다.

단계 3 : 아래와 같은 근사 최적설계 문제를 생성하고 근사 최적치를 구한다.

$$\text{Minimize } q(\boldsymbol{\delta}_k)=\mathbf{g}_k^T\boldsymbol{\delta}_k+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_k^T\tilde{\mathbf{G}}_k\boldsymbol{\delta}_k$$
$$\text{subject to } \|\boldsymbol{\delta}_k\|_\infty \le h_k$$

단계 4 : 식 (3)과 식 (4)를 이용하여 실제 감소량 Δf^k 와 예측 감소량 Δq^k 을 계산하고, 감소 비 r^k 를 계산한다. 만약 $0<r^k<0.25$ 이면 $h_k=\|\boldsymbol{\delta}_k\|/4$ 로 설정하고, 만약 $r^k>0.75$ 이면 $\|\boldsymbol{\delta}_k\|=h_k$ 일 때는 $h_k=2h_k$ 로, $\|\boldsymbol{\delta}_k\|\neq h_k$ 일 때는 $h_k=h_k$ 로 설정한다. 만약 $r^k>0$ 이면 $\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_k+\boldsymbol{\delta}_k$ 로 설계변수를 갱신하고, $k=k+1$로 설정한 다음 단계 5 로 간다. 만약 $r^k\le 0$ 이면, $h_k=\|\boldsymbol{\delta}_k\|/4$ 로 설정하고 표본점들을 선택한 후 단계 2 로 간다.

단계 5 : 만약 $\Delta f^k\le\varepsilon_1$, $\Delta f^k/f^k\le\varepsilon_1$ 또는 $\|\mathbf{g}_k\|\le\varepsilon_2$ 이면 최적화 과정을 멈춘다. 그러하지 않으면, 새로운 신뢰영역 안에서 $\mathbf{x}_{k+1}$ 주위에 새로운 $2n$ 개의 표본점들을 선택하고 단계 1 로 간다.

위의 단계 4 에서 상수 0.25 와 0.75 는 많은 신뢰영역 알고리듬에서 사용되며 그 값의 변화에 신뢰영역 기법 전체의 성능은 그리 민감하지 않다고 알려져 있어 본 논문에서도 같은 값들을 사용하였다.

4.2 수치적 고려 사항들

제안된 근사 최적화를 위한 알고리듬의 기본적 수치적 절차는 4.1 절에서 설명되었지만, 다음의 3 가지 수치적 고려 사항들이 일반적인 최적화 문제들을 효율적으로 풀기 위하여 제안된다.

첫째, 단계 3 의 근사 최적화 문제를 풀기 위하여, 두 개의 최적화 알고리듬이 추천된다. $\tilde{\mathbf{G}}_k$ 가 양정치(positive definite)일 때는, 뉴튼 방법(Newton's method)[8]을 추천하며, $\tilde{\mathbf{G}}_k$ 가 양정치가 아닐 때는 국부 최적치가 존재하므로 전역 최적화 알고리듬(global optimization method)을 추천한다. 본 연구에서는 후자를 위하여 풀림 모사(Simulated Annealing: SA) 방법[17]이 사용한다.

둘째, 다중 목적함수인 경우에는 목적함수들을 각각 근사화하며, 근사화된 목적함수들을 하나의 함수로 변환시키기 위하여 최대치 형태의 선호 함수[18]를 식 (9)와 같이 제안한다.

$$\tilde{P}(\boldsymbol{\delta}_k)=\max_{i=1,\cdots,m}\left\{w_i\frac{\tilde{f}_i(\boldsymbol{\delta}_k)-f_i^*}{f_i^*}\right\} \text{ 또는 } \max_{i=1,\cdots,m}\left\{w_i\tilde{f}_i(\boldsymbol{\delta}_k)\right\}$$
$$\text{그리고 } \sum_{i=1}^{m}w_i=1 \qquad (9)$$

여기서 $\tilde{f}_i$ 는 i^{th} 근사 목적함수로 식 (10)과 같이 정의된다.

$$\tilde{f}_i(\boldsymbol{\delta}_k)=f_i(\mathbf{x}_0)+\left(\mathbf{g}_k^i\right)^T\boldsymbol{\delta}_k+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_k^T\tilde{\mathbf{G}}_k^i\boldsymbol{\delta}_k \qquad (10)$$

식 (9)는 4.1 절의 단계 3 에서 $q(\boldsymbol{\delta}_k)$로 사용된다. 또한, 실제 감소량과 예측 감소량들이 제안된 선호 함수에 의해 평가된다. 식 (9)의 선호 함수는 비-평활성 조합함수(non-smooth composite function) 이므로 풀림 모사 방법을 적용하여 푼다.

셋째, 일반적인 구속조건이 있는 최적화 문제인 경우에는 목적함수와 구속조건 함수들을 각각 근사화할 것을 제안한다. 또한, 4.1 절의 단계 3 의 근사 최적설계 문제를 풀기 위해서 사용되는 알고리듬은 구속조건이 있는 최적설계 문제를 풀기위한 알고리듬 중 어떤 알고리듬을 적용하더라도 상관이 없다. 그러나, 4.1 절의 단계 4 에서 감소 비를 평가하기 위해서는 목적함수와 구속조건 함수들을 하나의 범함수로 만들 필요가 있는데, 이를 위해서 본 연구에서는 L_1 완전 벌칙 함수(L_1 exact penalty function)[8]를 사용하였다. 이 범함수를 사용한 이유는 최적화 과정이 진행되어 국부 최적치로 수렴하게 되면 L_1 완전 벌칙 함수의 값은 국부 최적치에서의 실제 문제의 최적치와 정확하게 일치하기 때문이다. L_1 완전 벌칙 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{L}_1(\boldsymbol{\delta}_k)=\tilde{f}(\boldsymbol{\delta}_k)+r\sum_{j=1}^{Nieq}\max\left\{0,\tilde{g}_j(\boldsymbol{\delta}_k)\right\} \qquad (11)$$

여기서, $\tilde{f}$ 와 $\tilde{g}_j$ 는 목적함수와 j^{th} 부등식 구속조건의 근사함수를, r 은 벌칙계수를, $Nieq$ 는 부등식 구속조건의 개수를 나타낸다.

5. 수치적 검증

제안된 PQA 방법의 수치적 성능을 검증하기 위하여, 제 4 장에서 설명된 수치적 절차에 기초하여 순차적 근사 최적화(sequential approximate optimization: SAO) 프로그램을 개발하였다.

개발된 프로그램은 기본적으로 신뢰영역 모델 관리 기법을 기반으로 PQA 방법, 중심합성계획법, D-최적성 계획법과 같은 3 가지 근사 방법 중 하나를 선택할 수 있다. 수렴 조건들은 1) 연속적인 SAO 의 반복 단계(한번의 근사 최적설계 문제를 푸는 것을 하나의 단계로 설정함) 사이에서의 목적함수의 상대 편차 또는 절대 편차가 임의의 허용치 ε_1 보다 작고, 2) 구속조건 들의 최대 위배량이 ε_2 보다 작도록 하는 것이다. 본 논문에서는 수학적으로 정의된 문제 두 개와, 다중 목적함수 최적화 문제 두 개를 검증용 예제로 선정하였으며, 선정된 예제들은 최적화 프로그램의 수렴성 검증에 많이 이용되는 까다로운 문제들이다. 수학적으로 정의된 문제는 구속조건이 없는 최적화 문제와 기어 감속기 설계 문제[19]이며, 다중 목적함수 최적화 문제는 각각 다섯 개와 두 개의 목적함수를 갖는 선형 진동 절연기 설계 문제와 5 자유도 차량 시스템 설계 문제이다.[20] 수렴 허용치는 각각 $\varepsilon_1 = 1\times10^{-2}$ 과 $\varepsilon_2 = 1\times10^{-4}$ 을 사용하였으며, 구속조건이 있는 최적화 문제를 위한 L_1 완전 벌칙 함수에 사용되는 벌칙계수 r 은 5 를 사용하였다. D-최적성 계획법은 모든 예제에 대하여 50% 과잉 결정되도록 하였다.

5.1 구속조건이 없는 최적화 문제

본 예제는 설계변수의 개수에 대한 3 가지 근사 방법들의 수치 성능을 비교하기 위해 선택되었다. 본 예제의 최적화 수식은 아래와 같다.

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}) = \sum_{k=2}^{n}\left(x_k - x_{k-1}^2\right)^2 + \left(1 - x_{k-1}\right)^2$$

여기서 초기 설계변수는 $k = 2, 4, 6, ..., n$ 에서 각각 $x_{k-1} = -1.2$ 와 $x_k = 1.0$ 으로 주어진다. 본 문제는 설계변수의 개수가 증가하면서 목적함수의 비 선형성이 증가하는 최적화 방법의 수렴성 검증을 위한 전형적인 수학적 최적화 문제이다. 설계변수의 개수 n 을 2, 6, 10, 15, 30, 50 으로 증가시키면서 3 가지 근사 방법에 대해 각각 예제를 수행하였다. 본 예제의 실제 최적값은 $\mathbf{x}^* = [1,\cdots,1]^T$ 에서 $f(\mathbf{x}^*) = 0$ 이다. Table 1 은 3 가지 근사 방법에서 근사모델을 생성하는데 필요한 표본점의 개수를 나타낸다. Table 1 에서 볼 수 있듯이, 중심합성계획법과 D-최적성 계획법은 설계변수의 개수가 각각 10 개와 30 개 이상일 때는 필요한 표본점의 개수가 너무 많아져 최적설계에 적용하기가 어렵다.

본 문제에 대한 최적설계 결과를 Table 2 에 수록하였다. Table 2 에서 *Iteration* 은 SAO 의 반복 단계를 나타내고, Total NF 는 SAO 과정에서 평가된 총 함수 계산회수를 의미한다. 각 근사화 방법에 대하여 임의의 SAO 반복단계까지의 총 함수 계산회수를 살펴보면 PQA 방법은 $Iteration \times (2n+1)$ 개이고, 50% 과잉 결정된 D-최적성 계획법은

Table 1 The number of required design points for the three approximation methods to construct a quadratic model

n	PQA	D-Optimal*	CCD
2	5	9	9
6	13	42	77
10	21	99	1045
15	31	204	32799
30	61	744	-
50	101	2837	-

*50 % over-determined D-optimal design is used.

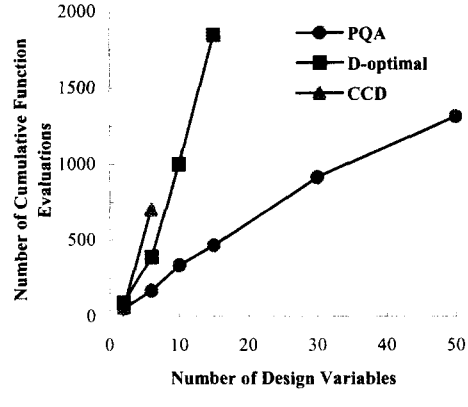


Fig. 3 Comparison of cumulative function evaluations for three approximation methods according to the number of design variables

Table 2 Iteration history for the unconstrained mathematical optimization problem

(a) In case of having 2 and 6 design variables

Iteration	2 design variables			6 design variables		
	PQA	D-optimal	CCD	PQA	D-optimal	CCD
1	3.7055	2.8901	2.8901	9.4930	11.2904	11.1763
2	5.1145*	1.0000	1.4416	13.8118*	2.9848	5.5606
3	2.1043	0.2876	0.5489	4.8713	21.9377*	2.3966
4	1.2254	0.6759*	0.1086	2.7191	0.7227	0.3721
5	0.1609	0.0704	0.0088	0.9933	0.2044	0.1130
6	0.1274	0.0211	0.0010	0.6142	0.0825	0.0541
7	0.0654	0.0179		0.1459	0.0242	0.0269
8	0.0138	0.0039		0.0610	0.0064	0.0096
9	0.0032	0.0015		0.0492	0.0016	0.0012
10	0.0012			0.0181		
11				0.0047		
12				0.0012		
Total NF	51	91	61	157	388	703

(b) In case of having 10 and 15 design variables

Iteration	10 design variable		15 design variables	
	PQA	D-optimal	PQA	D-optimal
1	14.9794	27.4430	19.3918	6.6761
2	18.1220*	2.2691	25.8837*	6.6761
3	7.7918	3.4559*	5.8421	5.7377*
4	3.9710	0.9480	5.8315	0.4853
5	1.3988	0.1376	4.2636	0.1323
6	1.2832	0.7361*	2.7152	0.0535
7	0.9660	0.0518	1.6224	0.0108
8	0.7224	0.0453	1.0712	0.0075
9	0.5104	0.0028	0.3544	0.0007
10	0.3425	0.0023	0.1409	
11	0.2198		0.0461	
12	0.1011		0.0181	
13	0.0313		0.0087	
14	0.0121		0.0040	
15	0.0038		0.0017	
16	0.0012			
Total NF	337	1001	466	1846

* SAO is failed to improve design (e.g. $r^k \le 0$) . Thus, this design is automatically rejected and a new approximation is used within the reduced trust region.

$Iteration \times (1+1.5(1+2n+n\times(n\text{-}1)/2))$ 개, 중심합성계획법은 $Iteration \times (1+2^n+2n+1)$ 개가 된다. 따라서 Total NF 는 마지막 SAO 단계까지의 총 함수 계산 회수에 최적설계점을 평가하기 위해 계산된 한번의 함수 계산회수를 더한 값이 된다. D-최적성 계획법과 중심합성계획법은 다음 반복 단계에서 근사 최적 설계점이 포함되지 않을 수도 있기 때문에 PQA 방법에 비해 추가적인 평가가 요구된다. Table 2 에서 보듯이 최적설계 결과들은 PQA 방법이 비록 다른 두 가지 방법들 보다 SAO 의 반복 단계가 더 많음에도 불구하고 Total NF 가 적은 결과를 보여주고 있어, 다른 두 가지 근사화 방법들 보다 더 효율적임을 보여주고 있다. Fig. 3 은 설계변수의 개수에 대한 3 가지 근사화 방법의 Total NF 를 도식적으로 보여주고 있다. Fig. 3 에서 보듯이 $n=50$ 에 대한 PQA 방법의 Total NF 가 $n=15$ 에 대한 50% 과잉 결정된 D-최적성 계획법보다 더 적음을 보여주고 있다.

5.2 기어 감속기 설계 문제

Fig. 4 의 기어 감속기 설계[19]는 감속장치의 중량을 최소화하는 것이 목적이며, 기어의 굽힘 및 접촉 응력, 축의 횡 방향 처짐 및 응력, 공간적 제약과 경험에 의하여 설정된 기하학적인 구속조건 및 설계변수 상/하한치에 대한 제한이 있다. 설계변수는 기어의 치폭 (x_1), 모듈 (x_2), 피니언의 이수 (x_3), 베어링 1 의 사이 거리 (x_4), 베어링 2 의 사이 거리 (x_5), 축 1 의 직경 (x_6) 및 축 2 의 직경 (x_7) 이다. 설계변수의 초기 값은 $\mathbf{x}^0 = [3.1, 0.75, 22.5, 7.8, 7.8, 3.4, 5.25]^T$ 이다. 본 문제의 최적화 수식은 아래와 같다.

Minimize

$$f(\mathbf{x}) = 0.7854x_1x_2^2(3.3333x_3^2 + 14.9334x_3 - 43.0934) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) + 7.477(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2)$$

subject to

$$g_1(\mathbf{x}) = 27/(x_1x_2^2x_3) - 1 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 397.5/(x_1x_2^2x_3^2) - 1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 1.93x_4^3/(x_2x_3x_6^4) - 1 \le 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = 1.93x_5^3/(x_2x_3x_7^4) - 1 \le 0$$

$$g_5(\mathbf{x}) = \frac{\left[\left(\frac{745x_4}{x_2x_3}\right)^2 + 16.9\times10^6\right]^{0.5}}{0.1x_6^3} - 1100 \le 0$$

$$g_6(\mathbf{x}) = \frac{\left[\left(\frac{745x_5}{x_2x_3}\right)^2 + 15.79\times10^7\right]^{0.5}}{0.1x_7^3} - 850 \le 0$$

$$g_7(\mathbf{x}) = x_2x_3/40 - 1 \le 0$$

$$g_8(\mathbf{x}) = 5 - x_1/x_2 \le 0$$

$$g_9(\mathbf{x}) = x_1/x_2 - 12 \le 0$$

$$g_{10}(\mathbf{x}) = (1.5x_6 + 1.9)/x_4 - 1 \le 0$$

$$g_{11}(\mathbf{x}) = (1.1x_7 + 1.9)/x_5 - 1 \le 0$$

$$2.6 \le x_1 \le 3.6,\ 0.7 \le x_2 \le 0.8,\ 17 \le x_3 \le 28,$$

$$7.3 \le x_4 \le 8.3,\ 7.3 \le x_5 \le 8.3,\ 2.9 \le x_6 \le 3.9,$$

$$5.0 \le x_7 \le 5.5$$

근사 최적설계를 수행하기 위한 부차적인 최적화 도구로는 DOT[21]의 반복 이차계획법을 사용하였다. 최적설계 결과를 정리한 Table 3 에서 보듯이 3 가지 근사화 방법은 모두 성공적으로 수렴하였다. 본 예제는 비선형성이 매우 큰 문제임에도 불구하고, 앞 절의 구속조건이 없는 최적설계 예제와는 달리 모두 동일한 SAO 반복 단계에 수렴을 하였으며, 또한, 근사모델의 부 정확성으로 인하여 채택되지 않은 근사 최적 설계점이 발생하지 않았다. 그 이유는 본 문제에 주어진 설계변수의 상/하한치가 비교적 작아서, 각 SAO 반복 단계에서 신뢰영역 내에서 생성되는 근사모델의 충실도가 높기 때문이라 생각된다.

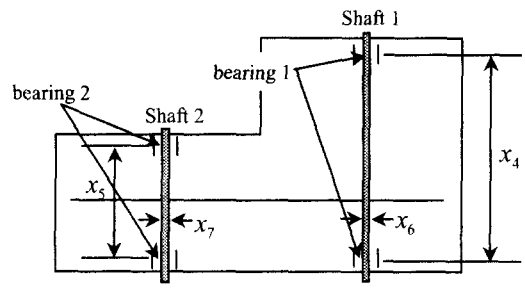


Fig. 4 Gear reducer system

Table 3 Optimization results of a gear reducer system design problem

Iteration	PQA	D-optimal	CCD
1	4073.764	3725.111	3708.815
2	3809.849	3573.826	3529.206
3	3486.693	3424.822	3422.666
4	3089.825	3020.596	3020.178
5	2996.701	2995.782	2995.444
6	2996.701	2995.782	2995.444
Total NF	91	331	865

5.3 다중 목적함수 최적화 문제

본 두개의 예제들은 시간 구간에 대한 몇 개의 최대치 함수들로 이루어진 시간 종속적인 구속조건 함수들과 다중 목적함수를 가지고 있다. 본 논문에서는 모든 시간 종속 구속조건들을 각각 최대치 함수들로 치환하여 이들의 시간 종속성을 제거하였고,[22] 참고문헌 (20)의 최적설계 결과와의 직접적인 비교를 위하여 선호 함수를 $\max_{i=1,\ldots,m}\{\tilde{f}_i(\boldsymbol{\delta}_k)\}$ 로 사용하였다.

5.3.1 다섯 개의 목적함수를 갖는 선형 진동 절연기 설계

본 예제는 Fig. 5 에 도시된 2 자유도 진동 절연기를 시간 영역에서 설계하는 것이다. 설계의 목적은 5 가지의 하중 조건 $(\omega = 1,2,3,4,5)$ 에 대하여, 시간 영역에서 주어진 과도응답과 정상상태 진폭

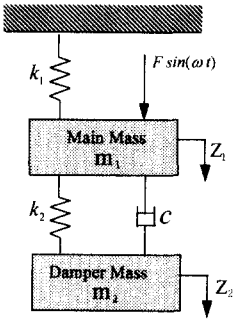


Fig. 5 Linear vibration isolator

Table 4 Optimization results of a two DOF linear dynamic absorber design with five objective functions

Iteration	PQA	D-optimal	CCD
1	5.5695	4.5904	5.2053
2	5.7665*	4.9940*	4.3858
3	4.3321	4.2953	4.8727*
4	4.2993	4.2949	4.2948
5	4.2995*		4.2947
6	4.2980		
Total NF	31	41	51

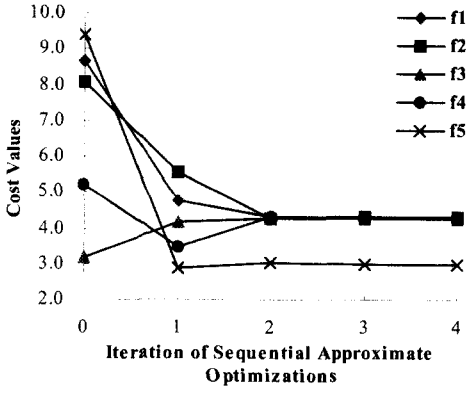


Fig. 6 Convergence history of PQA for the two degree-of-freedom linear vibration isolator loaded by five forcing functions

에 대한 제한이 주어질 때, 주 질량의 최대 진폭을 최소화 시키는 댐퍼 질량과 주 질량의 고유진동수의 비와 감쇠비를 정하는 것이다. 설계변수들의 초기 값은 (1.0, 0.02)이고 이 설계점에서의 목적함수 값은 (8.65, 8.07, 3.20, 5.21, 9.41)이다. Haug와 Arora[20]가 민감도에 기반한 최적화 알고리듬을

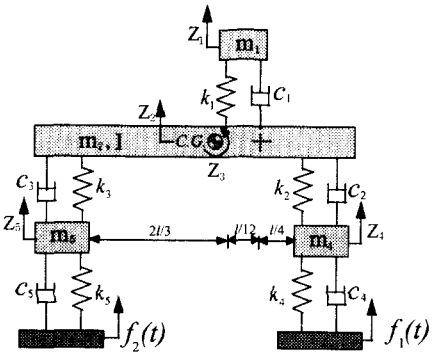


Fig. 7 Five-degree-of-freedom Vehicle system

적용하여 총 22 번의 반복 단계를 통해 구한 설계변수의 최적치는 (0.921, 0.154)이고 이에 상응하는 목적함수의 값은 4.291 이다.

최적설계 결과를 정리한 Table 4 에서 보듯이 모든 근사화 방법은 성공적으로 수렴하였다. 앞 절의 구속조건이 없는 최적설계 예제처럼 PQA 방법은 다른 두 개의 방법에 비하여 더 많은 SAO 반복 단계가 수행되었지만, Total NF 는 더 적었다. 또한, PQA 방법은 더 많은 근사모델 생성 과정이 수행되더라도 추가적인 CPU 시간이 필요하지 않는다. 그 이유는 중심합성계획법과 D-최적성 계획법과는 달리 근사모델을 생성하는데 추가적인 CPU 시간이 필요하지 않기 때문이다. Fig. 6 은 PQA 방법의 수렴 과정을 도시한 그림으로, SAO 에서 $r^k \le 0$ 이어서 신뢰영역 모델관리 기법에서 채택되지 않은 설계는 포함하지 않았다.

5.3.2 두 개의 목적함수를 갖는 5 자유도 차량 시스템 설계

Fig. 7 에 도시된 5 자유도 차량이 Fig. 8 에 도시된 두개의 노면을 960in/sec 의 속도로 달릴 때, 운전석의 수직 방향 최대 가속도가 최소가 되도록 현가장치를 설계하고자 한다. 설계변수는 강성계수 (k_1, k_2, k_3) 와 감쇠계수 (c_1, c_2, c_3) 이고, 구속조건으로는 운전석과 차체의 상대 변위, 차체와 앞, 뒤 바퀴 축간의 상대 변위 및 앞/뒤 바퀴와 노면 간의 상대 변위에 대한 제한과 설계변수에 대한 상/하한치 제한이 있다. 설계변수의 초기 값은 (100, 300, 300, 10, 25, 25)이고 이에 상응하는 목적함수 값은 198.6 이다. Haug 와 Arora[20]가 총 40 번의 반복 단계를 통하여 구한 설계변수의 최적치는 (50, 200, 200, 8.93, 45.92, 37.81)이고 이에 상응하는

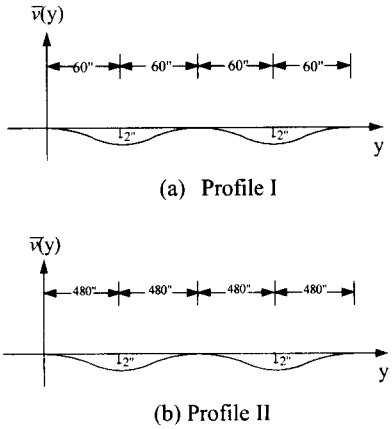


Fig. 8 Two Road surface profiles

Table 5 Optimization results of a five DOF vehicle suspension system with two objectives

Iteration	PQA(a)	PQA(b)	D-optimal	CCD
1	214.457*	214.796*	137.438	142.421
2	130.634	130.389	144.930*	142.702*
3	128.281	34.594*	131.294	128.676
4	129.303*	127.495	129.554	130.080*
5	126.912	130.533*	129.061	129.511
6	126.244	126.750	127.609	127.878
7	126.424*	157.226*	126.965	127.936*
8	126.140	126.316	126.597	127.706
9		126.233		
Total NF	105	118	345	625

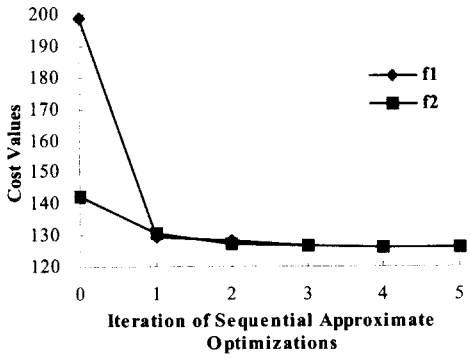


Fig. 9 Convergence history of PQA for the five degree-of-freedom vehicle systems simultaneously running profiles I and II

목적함수 값은 125.5 이다. 최적설계 결과를 Table 5 에 수록하였다.

Table 5 에서 PQA(a)는 3.2 절에서 설명된 비-볼록 함수일 때, 교호작용 항을 제거하는 알고리듬이 적용된 것이고, PQA(b)는 그러한 알고리듬이 적용되지 않은 결과이다. 본 문제는 다중 목적함수를 가진 최적설계 문제에서 자주 발생하는 안장점이 있는 최적화 문제이며, 두 개의 목적함수가 교차하는 설계점에서의 목적함수 값인 130 근방에서 안장점이 발생하게 된다. Table 5 에서 보는 바와 같이 교호작용항을 제거한 PQA(a)가 다른 세 가지 방법보다 빠르게 수렴하는 것을 볼 수 있다. 그러나 2 장에서 언급하였듯이 신뢰영역 알고리듬은 안장점이 있는 문제에도 근사모델에 상관없이 안정되게 수렴함을 알 수 있다. 또한 앞의 예제들에서와 같이 PQA 방법은 다른 두 가지 방법에 비하여 더 효율적인 결과를 보여주었다. 특히 선형 진동 절연기의 설계와 비교해 볼 때, Total NF 는 PQA 방법이 다른 두 가지 방법보다 상대적으로 차이가 더욱 큼을 알 수 있다. 본 문제에서 PQA(a) 방법의 Total NF 는 단지 D-최적성 계획법의 30%와 중심합성계획법의 17% 정도에 불과하다. 따라서, PQA 방법은 설계문제의 크기가 커질수록 보다 효율적인 방법이 될 수 있음을 예측할 수 있다.

Fig. 9 는 PQA(a) 방법의 수렴 과정을 도시한 그림으로, SAO 에서 $r^k \le 0$ 인 경우는 포함하지 않았다.

6. 결 론

대형 설계 시스템에 대한 최적설계를 위한 효율적인 이차 반응표면 근사 방법을 제안하였다. 제안된 근사화 방법은 근사 반응표면 모델을 생성하기 위해 단지 $2n+1$ 개의 표본점들을 사용하여, 근사모델의 선형과 이차 주 요인 항들의 계수를 추정한다. 이어 이차 교호작용 항의 계수를 다음 반복 단계에서 근사모델의 주 요인항을 이용하여 점진적으로 개선한다. 이를 위해 본 논문에서는 정규화된 준-뉴튼 개선 식을 제안하였다. 이와 같은 전체적인 과정을 통합하여 점진적 이차 근사화(PQA) 방법 이라고 명명하였다. 본 논문에서는 점진적 이차 근사화 방법에 신뢰영역 근사모델 관리 기법을 적용하여 순차적 근사 최적화(SAO) 프로그램을 개발하였다. 개발된 SAO 프로그램에는 PQA 방법 외에도, D-최적성 계획법과 중심합성계획법 등 2 가지 방법이 추가되었다. 개발된 프로그램의 성능 검증을 위하여 구속조건이 없는 최적설계 문제, 기어 감속기 설계 문제 그리고 2 개의 다중 목적함수 동적 반응 최적화 문제들에 적용하였다.

모든 최적설계 예제들에서 제안된 PQA 방법이 다른 방법들에 비해 훨씬 효율적인 결과를 주었다. 특히 구속조건이 없는 최적설계 문제에서 $n=50$ 일 때의 PQA 방법의 Total NF 는 $n=15$ 일 때의 50% 과잉 결정된 D-최적성 계획법보다 적었다. 다중 목적함수를 갖는 동적 반응 최적설계 예제들의 경우에서도 PQA 방법은 다른 두 개의 근사화 방법들에 비하여 보다 효율적인 결과들을 보여 주었다. 5 자유도 차량 시스템 설계 예제의 경우 PQA 방법의 Total NF 는 단지 D-최적성 계획법의 30%와 중심합성계획법의 17% 정도에 불과하였다.

위와 같은 예제들을 검토해 볼 때 본 논문에서 제안된 PQA 방법은 CFD 와 비선형 FEA 그리고 피로 해석과 같은 설계 민감도가 지원 되지 않는 대형 설계 시스템의 최적설계에 효과적일 수 있음을 보였다.

후 기

이 연구는 교육부 지원 BK21 사업 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Wujek, B, Renaud, J. E., Batill, S. M. and Brockman, J. B., 1996, "Concurrent Subspace Optimization Using Design Variable Sharing in a Distributed Computing Environment," *Concurrent Engineering: Research and Applications (CERA)*, Technomic Publishing Company Inc, December.

(2) Unal, R., Lepsch, R. A. and McMilin, M. L., 1988, "Response Surface Model Building and Multidisciplinary Optimization Using D-Optimal Designs," *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, St.Louis, Missouri, September 2-4*, AIAA-98-4759, pp. 405~411.

(3) Bloebaum, C. L., Hong, W., and Peck, A., 1994, "Improved Move Limit Strategy for Approximate Optimization," *Proceedings of the 5th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium*, AIAA 94-4337-CP, Panama City, Florida, September 7-9, pp. 843~850.

(4) Dennis, J. E. and Torczon, T., 1996, "Approximation Model Management for Optimization," *Proceedings of the 6th AIAA/NASA/USAF Multidisciplinary Analysis & Optimization Symposium*, AIAA 96-4046, Bellevue, Washington, September 7-9, pp. 1044~1046.

(5) Alexandrov, N., 1996, "Robustness Properties of a Trust Region Frame Work for Managing Approximations in Engineering Optimization," *Proceedings of the 6th AIAA/NASA/USAF Multi-disciplinary Analysis & Optimization Symposium*, AIAA 96-4102-CP, Bellevue, Washington, September 7-9, pp. 1056~1059.

(6) Barthelemy, J. F. and Haftka, R. T., 1991, "Recent Advances in Approximation Concepts for Optimum Structural Design," NASA, TM, 104032

(7) Carpenter, W. C., 1993, "Effect of Design Selection on Response Surface Performance," *Contractor Report 4520*, NASA, June.

(8) Fletcher, R., 1987, *Practical Method of Optimization*, John Wiley & Sons, Chichester.

(9) Fletcher, R., 1972, "An Algorithm for Solving Linearly Constrained Optimization Problems," *Math. Prog*, Vol. 2, pp. 133~165.

(10) Powell, M. J. D., 1975, *Convergence Properties of a Class of Minimization Algorithms. Nonlinear Programming 2 (Mangasarian OL, Meyer RR and Robinson SM Eds)*, Academic Press, New York.

(11) Rodriguez, J. F., Renaud, J. E. and Watson, L. T., 1988, "Trust Region Augmented Lagrangian Methods for Sequential Response Surface Approximation and Optimization," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 120, pp. 58~66.

(12) Nelson, II S. A. and Papalambros, P. Y., 1999, "The Use of Trust Region Algorithms to Exploit Discrepancies in Function Computation Time Within Optimization Models," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, pp. 552~556.

(13) Celis, M. R., Dennis, J. E. and Tapia, R. A., 1985, "A Trust Region Strategy for Nonlinear Equality Constrained Optimization," *Numerical optimization (Boggs PT, Byrd RH and Schnabel RB. Eds)*, SIAM, Philadelpia, pp. 71~88.

(14) Haim, D., Giunta, A. A., Holzwarth, M. M., Mason, W. H., Watson L. T. and Haftka R. T., 1999, "Comparison of optimization Software Packages for an Aircraft Multidisciplinary Design Optimization problem," *Design Optimization: international Journal for product & Process Improvement*, Vol. 1(1), pp. 9~23.

(15) Box, G. E. and Draper, N. R., 1987, *Empirical Model Building and Response Surfaces*, John Wiley,

New York.

(16) Box, M. J. and Draper, N. R., 1971, "Factorial Designs, the $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$ Criterion, and Some Related Matters," *Technometrics*, Vol. 13(4), pp. 731~742.

(17) Corana, 1987, "Minimizing Multimodal Functions of Continuous Variables with the Simulated Annealing Algorithm," *ACM Transaction on Mathematical Software*, Vol. 13(3), pp. 262~280.

(18) Osyzka, A., 1984, *Multicriterion optimization in Engineering with Fortran programs*, Ellis Horwood: Chichester, pp. 31~39.

(19) Azam and Li, W. C., 1989, "Multi-Level Design Optimization using Global Monotonicity Analysis," *ASME, Journal of Mechanism, Transmission and Automation in Design*, Vol. 111, pp. 259~263.

(20) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied optimal Design*, Wiley-Interscience, New York, pp. 341~352.

(21) Vanderplaats, G. N., 1995, *DOT-Design Optimization Tools Users Manual*, Vanderplaats Research & Development, Inc.

(22) 김민수, 최동훈, 1998, "근사 확장 라그랑지 승수 기법을 적용한 동적 반응 최적화," 대한기계학회 논문집 A 권, 제 22 권, 제 7 호, pp. 1135~1147.