

난류유동의 큰 에디 모사를 위한 아격자 모델

강 상 모*
(2000년 5월 15일 접수)

On Subgrid-Scale Models for Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows

Sangmo Kang

Key Words: Large-Eddy Simulation(큰 에디 모사), Subgrid-Scale Models(아격자 모델)

Abstract

The performance of a number of existing dynamic subgrid-scale(SGS) models is evaluated in large-eddy simulations(LES) of two prototype transitional and turbulent shear flows, a planar jet and a channel flow. The dynamic SGS models applied include the dynamic Smagorinsky model(DSM; Germano *et al.* 1991, Lilly 1992), the dynamic two-component model(DTM; Akhavan *et al.* 2000), the dynamic mixed model(DMM; Zang *et al.* 1993), and the dynamic two-parameter model(DTPM; Salvetti & Banerjee 1995). The results are compared with those from DNS for their evaluation. The LES results demonstrate the superior performance of DTM with use of a sharp cutoff filter and DMM with use of a box filter, as compared to their respect counterpart DSM, in predicting the mean statistics, spectra and large-scale structure of the flow. Such features of DTM and DMM derive from the construction of the models in which two separate terms are included to represent the SGS interactions; a Smagorinsky eddy-viscosity term to account for the non-local interactions, and a local-interaction term to account for the nonlinear dynamics between the resolved and subgrid scales in the vicinity of the LES cutoff. As well, overall the SGS models using a sharp cutoff filter are more successful than those using a box filter in capturing the statistics and structure of the flow. Finally, DTPM is found to be compatible or inferior to DMM.

기호설명

C, K	: 모델계수	S_{ij}	: 변형텐서
C_β, u_τ, τ_w	: 마찰계수, 마찰속도, 벽 전단응력	t, x, y, z, \mathbf{x}	: 시간 및 위치좌표
dx, dy, dz	: 실제 격자크기	U_c, U_o	: 제트 중심속도
h	: 채널의 반폭	U_m	: 체적속도
k_i, k_m	: 파수	u, v, w	: 속도
L_{ij}	: Leonard 응력	z_m, z_o	: 제트의 반폭
L_x, L_y	: 주기길이	α, β	: 기본 파수
p, ρ	: 압력, 밀도	Δ	: 필터 폭
		ξ	: Chebyshev 좌표
		η_{ij}, τ_{ij}	: 총 난류응력, 순 아격자 응력
		τ'_{ij}	: 보조응력
		ν, ν_t	: 점성계수

* 회원, 대구대학교 자동차.산업.기계공학부
E-mail : kangsm@taegu.ac.kr
TEL : (053)850-6673 FAX : (053)850-6549

상첨자

- , ~ , ^ : LES, 보조 및 시험필터
- ' : 섭동량
- + : 벽좌표

하첨자

rms : rms

무차원 수

Re, Re_τ, Re_{z_m} : Reynolds 수

기 타

< · > : 수평면상의 공간평균

1. 서 론

아격자(subgrid-scale; SGS) 모델은 난류유동의 큰 에디 모사(large-eddy simulation; LES)에서 매우 중요한 역할을 담당한다. LES를 위하여 Navier-Sokes 방정식에 필터링을 적용하면 큰 에디의 속도장 $\overline{u_i}(\mathbf{x}, t)$ 에 대한 지배방정식이 얻어진다. 이때, 아격자 모델은 미지의 양인 총 난류 응력(total turbulent stress; $\eta_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$) 이나 순 SGS응력(true SGS stress; $\tau_{ij} = \eta_{ij} - L_{ij}$)을 해석이 가능한 속도장의 정보를 이용하여 모델링을 하게된다. $L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ 는 Leonard 응력이다.^(1,2)

물리공간에서 정의되는 대부분의 아격자 모델은 에너지의 구배-수송(gradient-transport) 가정을 기초로 하는 에디-점도(eddy-viscosity)를 이용하여 η_{ij} 나 τ_{ij} 를 모델링 한다. 가장 많이 사용되는 에디-점도 모델은 Smagorinsky⁽³⁾에 의한 것으로, 총 난류응력은 다음과 같이 모델링 된다.

$$\eta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \eta_{kk} = -2C \overline{Z}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \quad (1)$$

여기서, C는 모델계수이며, \overline{Z} 는 LES 필터의 특성 길이이며, $\overline{S}_{ij} = (\partial \overline{u_i} / \partial x_j + \partial \overline{u_j} / \partial x_i) / 2$ 는 해석된 변형텐서이며, 그리고 $|\overline{S}| = (2 \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij})^{1/2}$

이다. 이 모델은 에너지의 순수 소산량이 해석격자에서 아격자 크기로의 에너지 전달량과 같다는 사실을 에디-점도에 의해 반영함으로써 평균적으로 에너지 보존이 만족하도록 제안되었기 때문에 많은 장점이 있다. 그렇지만, 이 모델은 많은 중요한 한계를 역시 가지고 있기 때문에, 이를 개선하고자 하는 연구가 최근에 많이 이루어지고 있다. Bardina 등⁽⁴⁾은 Gauss 필터(Gaussian filter) 또는 사각필터(box filter)가 적용되는 혼성모델(mixed SGS model)을 제안하였다. 이 혼성모델에서는 총 난류응력 η_{ij} 중 Leonard 응력 L_{ij} 가 명시적으로 계산되고 반면에 SGS응력 τ_{ij} 가 Smagorinsky 모델에 의하여 모델링된다. 이어, Salvetti & Banerjee⁽⁵⁾는 보다 일반적인 형태의 혼성모델을 제안하였다. 그러나, 이러한 혼성모델들은 1개 내지 2개의 미지의 모델계수를 포함하고 있어 이에 대한 값의 사전지정(ad hoc adjustment)이 필요하다. 따라서, 많은 실제 LES 응용에서^(6,6) 모델계수들이 Germano 등⁽⁷⁾에 의해 제안된 동적 모델링 과정(dynamic modelling procedure)을 사용하여 결정되었다.

동적 모델링 과정은 미지의 모델계수를 미리 지정하는 대신에 해석격자에 포함된 정보를 이용하여 계산 도중에 이를 공간과 시간의 함수로 체계적으로 표현하는 방법이다. Germano 등⁽⁷⁾과 Lilly⁽⁸⁾는 처음으로 위의 동적 모델링 과정을 원래 Smagorinsky 모델에 적용하여 동적 Smagorinsky 모델(dynamic Smagorinsky model; DSM)을 개발하였다. 이 모델에서는 모델계수의 사전지정이나 미세조정(fine-tuning)의 필요성이 없으며 벽근처나 층류유동에 존재하는 점근적 특성을 정확하게 예측할 수 있게 된다. 또한 모델계수는 공간과 시간의 함수로 계산이 되기 때문에 역 SGS 에너지전달(energy backscatter)을 의미하는 음수 값을 가질 수 있게 된다. 그러나, 수치적 불안정성을 피하기 위하여 모델계수가 어느 이상의 음의 값을 가지지 못하도록 공간평균 등을 포함하는 바람직하지 않은 인위적인 조치가 수행된다.^(7,9) 이러한 인위적인 조치가 의미하는 바는 Smagorinsky 모델이나 이를 기본으로 하는 아류 모델들은 단지 평균적인 의미에서만 합리적으로 적용될 수 있다는 것이다.

이러한 바람직하지 않은 인위적인 조치를 피하기 위하여 많은 연구가 최근에 이루어지고 있다.

대표적인 예로 Zang 등⁽⁶⁾의 동적 혼성모델(dynamic mixed model; DMM)과 Salvetti & Banerjee⁽⁵⁾의 동적 이매개변수 모델(dynamic two-parameter model; DTPM) 등이 있다. 이 모델들에서는 동적 모델링 과정을 기존의 혼성모델과 일반적인 형태의 혼성모델에 각각 적용하여 얻어지며, 이는 총 난류응력 η_{ij} 에서 수치적 불안정성의 주요 원인이 되는 Smagorinsky 항의 비중을 상대적으로 낮추어 인위적인 조치의 필요성을 경감시키게 된다. 최근에 유사한 연구로 컷오프 필터가 적용 가능한 새로운 모델인 동적 이성분 모델(dynamic two-component model; DTM)이 Akhavan 등⁽¹⁰⁾에 의해 개발되기도 하였다.

살펴본 바와 같이 지금까지 많은 개선된 SGS 모델들이 개발되었으나, 개발된 SGS 모델들의 적용대상이나 그 효용성 등은 거의 대부분 개발 당사자나 연구그룹의 주장에 전적으로 의존하여 왔다. 따라서, 난류유동을 해석하기 위하여 LES를 수행하고자 할 때 어떤 모델을 선택해야 될 것인가에 대한 객관적 기준이 미약한 편이다. 본 연구의 목적은 지금까지 개발된 주요 모델들을 실제 난류유동에 대한 LES에 적용하여 그 성능을 평가하는 데에 있다. 이 연구를 위하여 두 가지의 대표적인 난류유동인 천이와 난류상태의 평제트유동(planar jet flow)과 채널유동(channel flow)이 선택되었다. 본 연구에서는 주로 동적 모델(dynamic model)이 비동적 모델(non-dynamic model)보다 우수하다고 이미 알려져 있기 때문에 동적 모델만을 평가 대상으로 하였다. 적용된 모델로는 컷오프 필터가 적용되는 경우 Germano 등⁽⁷⁾과 Lilly⁽⁸⁾의 동적 Smagorinsky 모델(DSM(cutoff))과 Akhavan 등⁽¹⁰⁾의 동적 이성분 모델을, 그리고 사각필터가 적용되는 경우 동적 Smagorinsky 모델(DSM(box)), Zang 등⁽⁶⁾의 동적 혼성모델, 및 Salvetti & Banerjee⁽⁵⁾의 동적 이매개변수 모델이다. 이와 유사한 연구는 최근 두 연구그룹에서 이루어졌다. Vreman 등⁽¹¹⁾은 혼합 경계층 난류유동(turbulent mixing layer)에서 그리고 Sarghini 등⁽¹²⁾은 채널유동에서 각각 여러 SGS 모델을 적용하여 각 모델의 성능을 평가하였다. 그들은 동적모델이 비동적 모델보다 우수하며 또한 동적모델 중에서는 DMM(또는 그 아류모델)이 DSM(또는 그의 아류모델)보다 우수하다고 주장하였다. 그러나 그들의 연구와 본 연구는 몇 가

지 근본적인 차이점이 있다. 본 연구에서는 더 많은 동적 모델을 시험대상으로 삼고 있다는 것이다. 예를 들면 그들은 오직 사각필터의 적용만을 대상으로 하여 컷오프 필터를 적용하는 모델과는 성능비교를 하지 못하였다. 또한 그들은 낮은 차수의 정확도를 가지는 유한차분법(또는 유한체적법)을 사용하였기 때문에(이때는 실제로 사각필터만을 적용할 수 있음), 이로부터 나오는 수치적 오차가 SGS 모델을 오염시키게 되어 모델의 정확한 성능평가를 어렵게 한다.^(13,14) 본 연구에서는 정확도가 매우 높은 준 스펙트럴법을 사용하였기 때문에 이러한 문제를 야기하지 않는다. 또한 본 연구에서는 비전단유동(free-shear flow)인 제트유동과 전단유동(shear flow)인 채널유동에 대해 동시에 LES를 수행하여 평가대상의 폭을 넓혔다. 각 모델간의 성능을 비교하기 위하여 각 LES 결과는 DNS를 이용하여 얻어진 결과와 비교하였다.

2. 아격자 모델들

2.1 컷오프 필터를 이용한 모델

2.1.1 동적 Smagorinsky 모델(DSM(cutoff))^(7,8)

LES 격자에서 순 SGS응력 $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ 는 Smagorinsky 모델을 이용하여 다음과 같이 모델링한다.

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2C \overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \quad (2)$$

모델계수 $C(\mathbf{x}, t)$ 는 동적 모델링 과정을 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$C = - \frac{\langle F_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle 2M_{ij} M_{ij} \rangle} \quad (3)$$

이때,

$$F_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}}$$

$$M_{ij} = \widehat{\overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}} - \overline{\Delta}^2 |\widehat{\overline{S}}| \widehat{\overline{S}_{ij}}$$

참고로, ‘-’와 ‘^’는 각각 LES 필터(또는 격자필터)와 시험필터(test filter)를 의미한다. 이 모델은 수치적 불안정성을 피하기 위하여 C 의 표현에서 분모와 분자는 각각 균일방향으로의 공간평균 $\langle \cdot \rangle$ 을 필요로 한다.

2.1.2 동적 이성분 모델(DTM)⁽¹⁰⁾

LES 격자에서 순 SGS응력 τ_{ij} 는 이성분 모델을 이용하여 다음과 같이 모델링한다.

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2C \overline{\mathcal{D}^2} |\overline{S}| \overline{S}_{ij} + (\tau'_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau'_{kk}) \quad (4)$$

여기서, Smagorinsky 항은 해석격자와 좀 더 떨어진 아격자 크기 사이의 비국부-상호작용(non-local interaction)을 설명하며, 그리고

$$\tau'_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{\widehat{u_i} \widehat{u_j}} \quad (5)$$

는 컷오프 근처의 국부-상호작용(local interaction)을 근사적으로 설명한다. 참고로 '~'는 보조필터(auxiliary filter)를 의미한다. 모델계수 $C(\mathbf{x}, t)$ 는 역시 동적 모델링 과정에 의하여 다음과 같이 계산된다.

$$C = -\frac{D_{ij} M_{ij}}{2M_{ij} M_{ij}} \quad (6)$$

이때,

$$D_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{\widehat{u_i} \widehat{u_j}}$$

여기서, 모델계수 C 는 공간평균과 같은 어떠한 인위적 조치를 필요로 하지 않는다. 그러나, 총 점성계수 $\nu + \nu_t$ 가 음이 될 때마다 $\nu + \nu_t = 0$ 으로 하여 총 점성계수가 항상 양이 되도록 유지한다.

2.2 사각필터를 이용한 모델

2.2.1 동적 Smagorinsky 모델(DSM(box))^(7,8)

LES 격자에서 총 난류응력 $\eta_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{\widehat{u_i} \widehat{u_j}}$ 는 Smagorinsky 모델을 이용하여 다음과 같이 모델링한다.

$$\eta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \eta_{kk} = -2C \overline{\mathcal{D}^2} |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \quad (7)$$

모델계수 $C(\mathbf{x}, t)$ 는 동적 모델링 과정을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$C = -\frac{\langle G_{ij} N_{ij} \rangle}{\langle 2N_{ij} N_{ij} \rangle} \quad (8)$$

이때,

$$G_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{\widehat{u_i} \widehat{u_j}}$$

$$N_{ij} = \overline{\mathcal{D}^2} |\overline{S}| \overline{S}_{ij} - \overline{\mathcal{D}^2} |\overline{S}| \widehat{\widehat{S}_{ij}}$$

이 모델은 수치적 불안정성을 피하기 위하여 C 의 표현에서 분자와 분모에 각각 균일방향으로의 공간평균 $\langle \cdot \rangle$ 을 필요로 한다.

2.2.2 동적 혼성모델(DMM)⁽⁶⁾

총 난류응력 η_{ij} 는 혼성모델을 이용하여 다음과 같이 모델링한다.

$$\eta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \eta_{kk} = -2C \overline{\mathcal{D}^2} |\overline{S}| \overline{S}_{ij} + (L_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk}) \quad (9)$$

모델계수 $C(\mathbf{x}, t)$ 는 동적 모델링 과정을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$C = -\frac{(G_{ij} - H_{ij})N_{ij}}{2N_{ij}N_{ij}} \quad (10)$$

이때,

$$H_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{\widehat{u_i} \widehat{u_j}}$$

수치적 불안정성을 피하기 위하여 모델계수 C 는 국부적으로 시험필터 체적 내에서 공간평균을 하며, 총 점성계수 $\nu + \nu_t$ 는 항상 양이 되도록 유지해야 한다.

2.2.3 동적 이매개변수 모델(DTPM)⁽⁵⁾

총난류응력 η_{ij} 는 일반적 형태의 혼성모델을 이용하여 다음과 같이 모델링한다.

$$\eta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \eta_{kk} = -2C \overline{\mathcal{D}^2} |\overline{S}| \overline{S}_{ij} + K(L_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk}) \quad (11)$$

두 모델계수 $K(\mathbf{x}, t)$ 와 $C(\mathbf{x}, t)$ 는 동적 모델링 과정을 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$K = \quad (12)$$

$$\frac{(G'_{ij} H'_{ij})(N_{mn} N_{mn}) - (G'_{ij} N_{ij})(H'_{mn} N_{mn})}{(H'_{ij} N_{ij})^2 - (H'_{ij} H'_{ij})(N_{mn} N_{mn})}$$

$$C = -\frac{(G'_{ij} N_{ij}) - K(H'_{ij} N_{ij})}{2N_{ij} N_{ij}} \quad (13)$$

이때,

$$G'_{ij} = G_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} G_{kk}$$

$$H'_{ij} = H_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} H_{kk}$$

수치적 불안정성을 피하기 위하여 모델계수 K 와 C 그리고 총 점성계수 $\nu + \nu_t$ 는 동적 혼성모델

에서와 같이 취급되어져야 한다.

3. 수치기법

LES에서 큰 에디의 유동장 $\overline{u}_i(\mathbf{x}, t)$ 는 필터링이 수행된 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식을 풀어 얻어진다. 방정식의 형태는 총 난류응력 η_{ij} 나 순 SGS응력 τ_{ij} 중 어느 것이 모델링되느냐에 따라 달라진다. 본 연구에서는 컷오프 필터가 적용되는 경우는 τ_{ij} 에 그리고 사각필터가 적용되는 경우는 η_{ij} 에 각각 모델링을 수행하였다.

컷오프 필터가 적용되는 경우, LES 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (15)$$

여기서, 순 SGS응력 τ_{ij} 는 보통 다음과 같이 표현된다.

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2\nu_t \overline{S}_{ij} + (b_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} b_{kk}) \quad (16)$$

이때, $\nu_t = C \overline{\Delta}^2 |\overline{S}|$ 는 에디-점도이고, b_{ij} 는 DTM의 경우 τ'_{ij} 이고 DSM의 경우 0이다.

반면에 사각필터가 적용되는 경우, LES 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (17)$$

총 난류응력 η_{ij} 의 일반적인 표현은 다음과 같다.

$$\eta_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \eta_{kk} = -2\nu_t \overline{S}_{ij} + (b_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} b_{kk}) \quad (18)$$

이때, b_{ij} 는 DMM의 경우 L_{ij} DTPM의 경우 KL_{ij} 그리고 DSM의 경우 0이다.

LES 방정식 (14)와 (17)은 비선형항(nonlinear term)을 회전형으로 바꾼 후 표준

Fourier-Chebyshev 준 스펙트럴법을 이용하여 공간상에서 이산화된다. 본 연구에서 고려된 제트와 채널유동은 x 와 y 방향으로 각각 균일하다고 가정되었으며, 따라서 이 방향으로 Fourier 급수를 이용하여 이산화하였다. 그리고 제3의(z) 방향으로 대수 사상법(algebraic mapping)을 적용하여 물리적 해석공간(제트의 경우 $z/z_o = \pm \infty$ 그리고 채널의 경우 $z/h = \pm 1$)을 Chebyshev 다항식이 적용될 수 있는 표준 영역 $\xi \in [-1, 1]$ 로 좌표변환을 다음과 같이 수행하였다.

$$\frac{z}{z_o} = \frac{4\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} \text{ for the jet} \quad (19)$$

$$\frac{z}{h} = \xi \text{ for the channel}$$

여기서, z_o 는 초기($t=0$)에서 제트의 반폭이며 h 는 채널의 반폭이다. 또한 시간상에서 점성항에 부분-암시법(partial-implicit method)을 적용한 3단계 분할법⁽¹⁵⁾을 적용하여 이산화가 수행되었다.

모든 계산은 LES 필터의 폭보다 작은 계산격자에서 수행되었다. 컷오프 필터를 적용한 LES에서는 단지 균일방향의 Fourier 공간에서 LES 컷오프보다 높은 파수를 가지는 모드를 제거함으로써 필터링을 수행하였다. 사각필터를 적용한 LES에서는 모든 방향에 대해 사다리꼴 적분법(trapezoidal)과 선형보간법을 이용하여 물리적 공간에서 필터링을 수행하였다. 상당 필터 길이 $\overline{\Delta}$ 과 $\widehat{\Delta}$ 은 각 단일방향의 필터 길이의 기하학적 평균으로 계산하였다. 또한 모든 계산은 소위 2/3-법을 이용하여 에일리에징(aliasing) 오차를 제거하였다.⁽¹³⁻¹⁵⁾

4. 평제트유동의 LES

먼저, 시간상에서 에디가 성장하는 천이와 난류상태의 평제트유동에 대하여 LES를 수행하였다. 그 LES 결과는 같은 유동에 대하여 수행된 DNS의 결과⁽¹⁰⁾와 비교하였다. 적용된 평제트유동은 유동방향(x)과 횡방향(y)으로 주기적이며, 가로방향(z)으로는 범위가 무한대이다. x 와 y 방향으로 주기길이는 $L_x/z_o = 16\pi/\alpha$ 와 $L_y/z_o = 16\pi/\beta$ 이며, 이때 $\alpha = \beta = 2.65$ 이다. 모

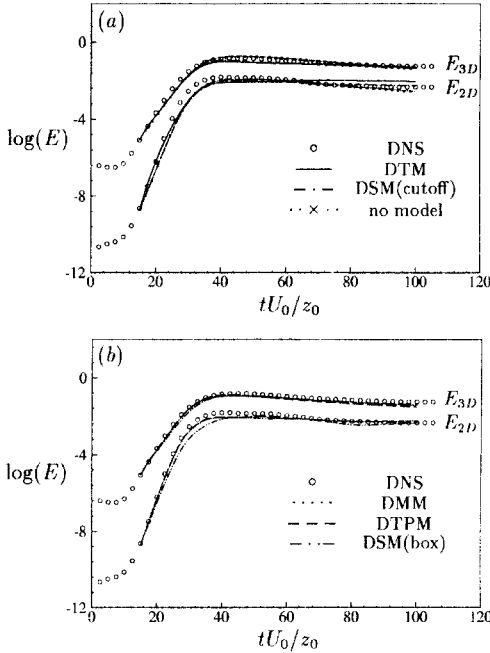


Fig. 1 Time evolution of the kinetic energy of two- and three-dimensional disturbances in the jet

는 LES 계산은 $tU_0/z_0 = 15$ 에서 DNS 속도장을 보간법에 의해 LES 격자로 환산한 후 시작하였다. 제트유동의 LES 계산에서 얻어진 모든 통계량들은 DNS 계산에서 초기조건으로 부과된 층류상태의 중심속도 U_0 와 제트의 반폭 z_0 에 대하여 무차원화 되었다. 제트유동의 LES는 준 스펙트럴법을 이용하여 $32 \times 32 \times 65$ 의 해상도에서 수행되었다. 컷오프 필터가 적용된 LES에서는 각 필터들 \bar{k}_i , \hat{k}_i 및 \tilde{k}_i 는 x 와 y 방향으로 $8/6/4\alpha$ 와 $8/6/4\beta$ 의 파수에 각각 위치하였다. 사각필터가 적용된 LES에서는 LES 필터를 $\bar{\Delta}_x = 2 \Delta x$, $\bar{\Delta}_y = 2 \Delta y$ 및 $\bar{\Delta}_z = \Delta z$ (이때, Δx , Δy 및 Δz 는 실제 계산이 수행되는 각 방향으로의 격자폭임)에서, 시험필터를 $\hat{\Delta}_x = 2 \bar{\Delta}_x$, $\hat{\Delta}_y = 2 \bar{\Delta}_y$ 및 $\hat{\Delta}_z = 2 \bar{\Delta}_z$ 에서 각각 적용하였다. 따라서, 모든 LES 계산에서 LES 필터는 $\bar{\Delta}_x = \bar{\Delta}_y \approx 32\eta$ 와 $\bar{\Delta}_z \approx 8\eta$ 의 특성길이를 가지며, 이때 η 는 Komogorov 스케일이다. 그리고, 여러 가지 SGS 모델의 성능을 평가하기 위한 별도

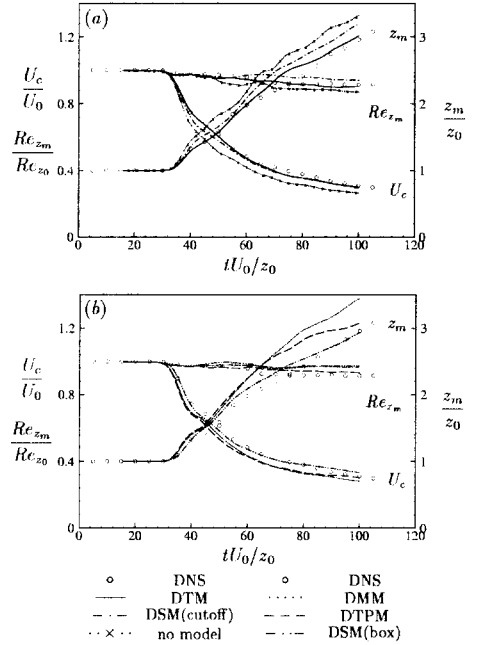


Fig. 2 Time evolution of the jet half-width, the jet centerline velocity, and the jet Reynolds number in the jet

의 기준을 제공하기 위하여 모델의 적용없이 (coarse DNS or no model) LES와 같은 해상도에서 계산을 역시 수행하였다.

Fig. 1은 LES에 의해 예측된 제트유동에서의 2차 및 3차 교란 에너지의 성장과정을 DNS와 비교하여 보여준다. 교란에너지의 초기 기하급수적인 성장과 포화과정($tU_0/z_0 < 30$), 난류로의 천이과정($30 < tU_0/z_0 < 60$), 그리고 완전 발달된 난류상태($tU_0/z_0 > 70$) 등 전 단계를 저해상도의 DNS를 포함하여 모든 모델들은 전체적인 교란장의 운동특성을 비교적 정확히 예측하고 있다.

이렇듯 제트유동이 층류에서 난류상태로의 천이가 일어나는 동안 유동구조의 전개과정에 대한 여러 모델들의 LES 결과가 DNS 결과와 비교하여 Fig. 2에 보여준다. 제트의 유동구조는 제트의 반폭 $z_m(t)$ (제트의 중심에서 평균속도가 중심속도의 반에 해당되는 면까지의 거리), 제트의 중심속도 $U_c(t)$, 그리고 제트의 Reynolds 수 $Re_{z_m} = U_c z_m / \nu$ 의 전개과정을 통해서 고찰되었다. Fig. 2에서 보이는 $z_m(t)$ 와 $U_c(t)$ 의 전개과

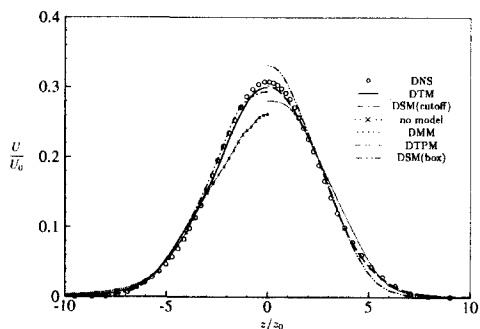


Fig. 3 Mean velocities in the fully-developed turbulent jet

정은 Fig. 1에서 관찰하였듯이 제트유동의 층류단계, 천이단계 그리고 완전 발달된 난류단계 등 각 단계들의 구분을 명백하게 한다. 적용된 LES 모델 중에서는 DTM이 난류단계에서 뿐만 아니라 천이단계에서 DNS와 가장 잘 일치한다. 컷오프 필터가 적용된 DSM은 전개과정을 통하여 DNS에 비하여 제트의 반폭을 높게 그리고 중심속도는 비교적 정확하게 예측하는데 반해 DMM과 DTPM은 제트의 반폭은 높게 그리고 중심속도는 낮게 예측한다. 사각필터가 적용된 DSM은 제트의 반폭을 DNS와 합리적으로 일치하게 예측을 하나 완전 발달된 난류상태에서는 제트의 Reynolds 수를 높게 예측한다. 제트의 성장은 큰 에디의 와구조(large-eddy vortical structure)의 운동 특성에 의해 지배를 받기 때문에, DTM이 역시 그러한 순간적인 와구조를 정확하게 예측할 수 있다는 것을 의미한다. 이는 DTM 모델이 LES 컷오프 근처에서의 국부-상호작용을 좀 더 정확하게 모델링한 결과로 보인다.

Figs. 3-5는 완전 발달된 난류제트유동에서 여러 LES 모델과 DNS에 의해 예측된 평균 난류통계량을 성능비교를 위하여 보여준다. Figs. 3, 4 및 5는 LES 계산에서 각각 얻어진 평균유속, 난류강도 및 Reynolds 응력이다. 여기서 보여주는 모든 통계량은 균일방향(x 와 y)으로 공간평균을 시도하여 $tU_0/z_0 = 100$ 에서 계산되었다. 또한 제트에서 평균 난류통계량은 중심선에 대하여 대칭이기 때문에 각 모델에 대하여 한쪽의 결과만을 소개하였다. 예를 들면, 각 그림에서 왼편에는 컷오프 필터를 적용하여 얻어진 결과를 그리고 오른편에는 사각필터를 적용하여 얻어진 결과를 각각 나타내었다. 각 모델의 성능을 좀 더 상세하

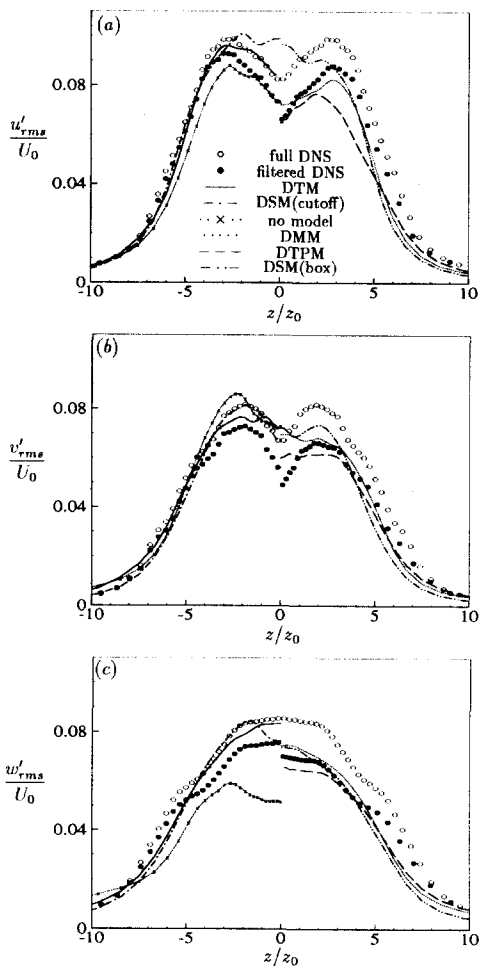


Fig. 4 Turbulence intensities in the fully-developed turbulent jet

게 평가하기 위하여 LES에서 사용된 같은 필터를 이용하여 필터링이 이루어진 DNS 결과뿐만 아니라 필터링이 이루어지지 않은 원래 DNS 결과를 같이 보이고 있다. 여기서 유일한 예외는 원 DNS 결과만을 보이고 있는 평균유속인데, 이는 컷오프 필터나 사각필터를 이용하여 필터링이 이루어져도 양 결과사이에 뚜렷한 차이가 없기 때문이다. 적용된 모델 중에서는 DTM이 평균유속과 난류응력에서 DNS 결과와 전체적으로 가장 잘 일치하였다. 컷오프 필터를 적용한 DSM은 평균 속도분포가 DNS 결과보다 좀 더 뭉뚱하였으며, 제트의 중심영역에서 유동방향(x)과 가로방향(z)의 난류강도의 분포형태들이 상대적으로 부정확하였다. 사각필터를 적용한 DSM은 평균속도

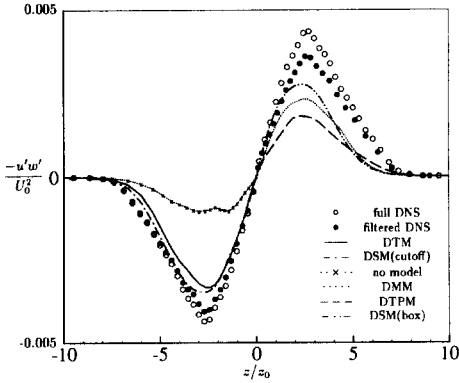


Fig. 5 Reynolds shear stress in the fully-developed turbulent jet

가 높게 예측되었고 채널의 중심영역에서 유동방향의 난류강도가 역시 부정확하였다. DTPM은 평균속도가 DNS와 잘 일치하나 모든 방향의 난류강도들은 낮았다. 반면에 DMM은 난류강도는 합리적으로 정확하나 평균 유속분포의 형태는 정확하지 못하였다.

각 모델들의 유동구조를 예측하는 능력을 평가하기 위하여, Fig. 6는 LES에 의해 $tU_0/z_0 = 100$ 에서 예측된 3차 운동에너지 스펙트럼을 DNS 결과와 함께 보여주고 있다. DNS 결과와 가장 잘 일치하는 결과는 다시 한번 DTM에 의해 제공되며, 이는 그 모델이 난류운동에너지의 전체적인 운동특성을 정확히 예측할 수 있는 것뿐만 아니라 모든 해석격자 내에서 정확한 모드 분포(modal distribution)를 예측한다는 사실을 의미한다. 컷오프 필터나 사각필터를 적용하는 DSM은 양 경우 모두 낮은 파수에서는 운동에너지를 낮게 예측하고 반면에 가장 높은 해석가능한 파수에서는 이를 높게 예측한다. 이러한 결과는 예상되는 바이며 DSM과 같은 순수 에디-점도형 모델이 공통적으로 가지고 있는 모델의 단점이다. 이러한 모델에서 스펙트럴 에디-점도 $\nu(k)k_m$ 의 실제 곡선(Kraichnan⁽¹⁶⁾을 참조)을 단지 평균적으로 같은 SGS 에너지소산을 가지도록 파수(k)에 관계없이 거의 일정한 에디-점도에 의해 모델링된다. 따라서, $\nu(k)k_m$ 의 선도가 주어지면 그러한 순수 에디-점도 모델에서는 실제 스펙트럴 에디-점도에 비하여 낮은 파수에서는 에너지소산이 높게(over-dissipative) 평가되며, 높은

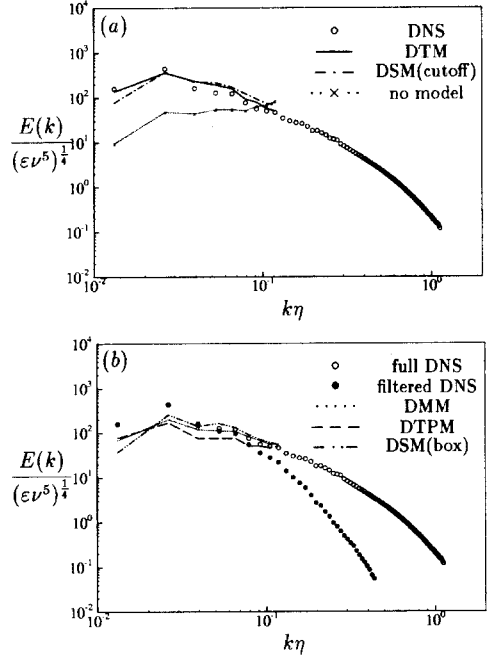


Fig. 6 The three-dimensional kinetic energy spectrum in the fully-developed turbulent jet

파수에서는 낮게(under-dissipative) 평가된다. 결과적으로 이러한 모델이 LES에 적용되면, 낮은 파수에서는 운동에너지를 낮게 예측하며 높은 파수에서는 높게 예측한다. 이는 Fig. 6의 DSM의 결과에서 그대로 관찰되고 있다. 사각필터를 적용한 DMM과 DTPM은 순수 에디-점도형의 모델이 아니다. 그러나, 이 모델에서처럼 Bardina-형의 항을 포함시키는 것은 어느 정도 이 문제에 도움이 되나 완전하게는 해결하지 못한다는 사실을 알 수 있다. 실제 계산에서 에너지 스펙트럼은 사각필터가 적용된 DNS 결과보다 역시 낮은 파수에서는 낮게 예측되고 높은 파수에서는 높게 예측된다. 이는 DMM과 DTPM이 DSM보다는 어느 정도 우수하나 LES 컷오프 근처에서의 국부-상호작용을 완전히 그리고 정확하게 설명하지 못한다는 것을 의미한다.

5. 채널유동의 LES

채널유동은 전통적으로 SGS 모델의 성능을 평가하기 위하여 가장 많이 사용되고 있다. 본 연

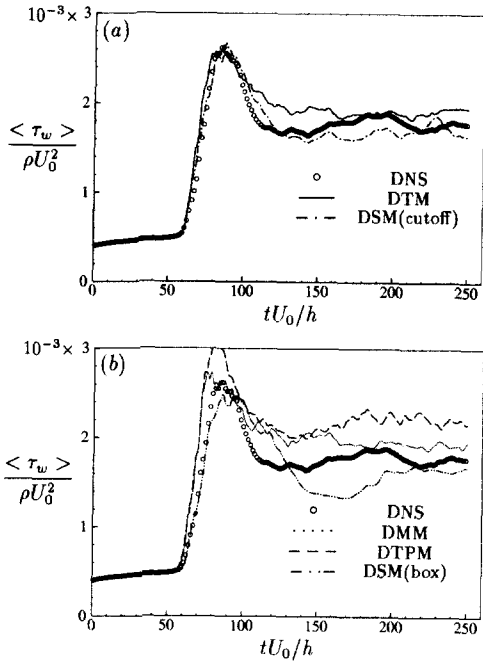


Fig. 7 Time evolution of mean wall-shear stress in the transitional and turbulent channel flow

구에서 채택된 채널은 벽수직(z)방향으로 $2h$ 의 폭을 가지며 유동(x)방향과 횡방향(y)으로 주기적이다. 가정한 주기길이는 각각 $L_x/h=2\pi/\alpha$ 와 $L_y/h=2\pi/\beta$ 이며, 이때 $\alpha=\beta=1.25$ 이다. 모든 계산에서 일정유량을 유지하기 위하여 각 시간단계에서 평균 압력구배를 조절하였다. 채널 내의 유동은 채널의 반폭 h 와 초기 층류유동의 중심속도 U_0 을 기본으로 하는 Reynolds 수 $Re=U_0h/\nu$ 는 5000이며, 이는 체적속도 U_m 을 기본으로 하는 체적 Reynolds 수 $Re_m=U_mh/\nu=3300$ 에 해당된다. 또한 완전 발달된 난류상태에서의 벽 마찰속도 u_τ 를 기본으로 하는 Reynolds 수는 약 $Re_\tau=u_\tau h/\nu\sim 210$ 이다. 각 LES 모델의 성능을 평가하기 위하여 LES 결과는 본 연구와 같은 조건에서 수행된 DNS 결과⁽¹⁰⁾와 비교하였다.

채널유동의 LES는 준 스펙트럴법을 이용하여 $16\times 64\times 65$ 의 해상도에서 수행되었다. 컷오프 필터를 적용한 LES에서 각 필터들 \bar{k}_i , \hat{k}_i 및

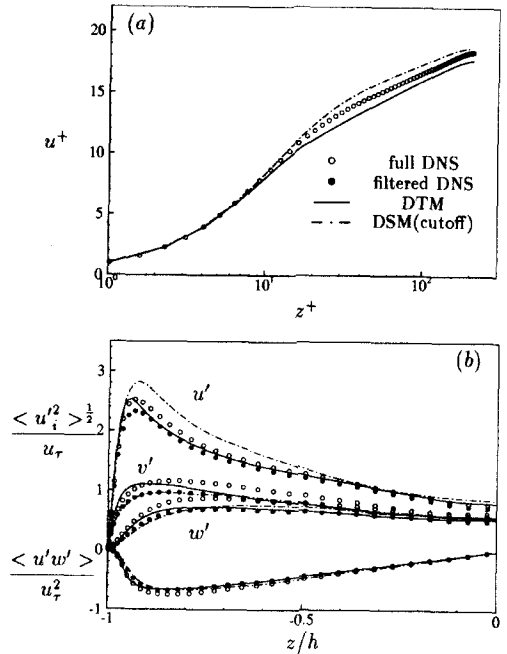


Fig. 8 (a) Mean velocity profiles, and (b) turbulence intensities and Reynolds stresses in the fully-developed turbulent channel

\hat{k}_i 는 x 와 y 방향으로 각각 $5/4/3a$ 와 $20/16/10\beta$ 의 파수에 위치하였다. 사각필터를 적용한 LES에서 LES 필터는 $\bar{\Delta}_x=3/2 dx$, $\bar{\Delta}_y=3/2 dy$ 및 $\bar{\Delta}_z=dz$ 에 위치하였으며, 시험필터는 각 방향으로 LES 필터폭의 2배가 되도록 적용하였다. 이러한 조건으로 LES 필터는 모든 LES 계산에서 $\bar{\Delta}_x^+ \approx 100$ 와 $\bar{\Delta}_y^+ \approx 25$ 의 특성길이를 갖게 된다. z 방향으로의 비균일 LES 필터폭은 벽에서 $\bar{\Delta}_z^+ \approx 0.26$ 과 중심선에서 10.4 사이에 분포되었다. 모든 LES 계산은 DNS에서와 같이 Orr-Sommerfeld의 해 중에서 가장 불안정한 2와 3차 고유모드의 교란성분이 증폭된 층류유동에서부터 시작하였다.

Fig. 7은 LES에 의해 예측된 평균 벽전단응력의 시간 전개과정을 DNS 결과와 비교하여 보여 준다. DNS 결과에 의하면, 유동은 층류상태 ($tU_0/h < 50$)와 천이상태 ($50 < tU_0/h < 85$)를 거치면서 벽전단응력이 $tU_0/h \sim 85$ 에서 최고치에 이른다. 이어 유동은 완전 발달된 난류상태

($tU_o/h > 120$)로 평형이 된다. 일반적으로 컷오프 필터를 적용하는 LES 결과가 사각필터를 적용한 결과보다 우수하다. 컷오프 필터를 적용한 DTM과 DSM이 완전 발달된 난류상태에서의 벽전단응력뿐만 아니라 천이영역의 시작과 벽전단응력의 극대값을 비교적 정확히 예측한다. 완전 발달된 난류 채널에서 ($160 \leq tU_o/h \leq 250$), DTM은 평균 표면 마찰계수 $C_f = \tau_w / \rho U_m^2$ 를 DNS 결과에 비하여 약 5.5% 높게 예측하였고 DSM은 이를 약 6.3% 낮게 예측하였다. 반면에, 사각필터가 적용되는 SGS 모델 중에서는 DMM이 전체적으로 가장 좋은 성능을 보인다. DMM은 DNS에 비하여 난류로의 천이현상이 먼저 일어나고 벽전단응력의 극대값이 약간 높다고 예측하나, 완전 발달된 난류상태에서는 표면마찰계수를 합리적으로 정확하게 예측한다(DNS 결과와 8% 이내). 여기서 재미있는 사실은, DMM보다 추가로 제2의 모델계수를 가지는 DTPM이 DMM보다 열세인 사실이다. DTPM의 경우 실제 LES 계산에서 K 의 값은 채널벽 근처에서 1.2부터 채널 중심에서 1.6까지의 대체적인 분포를 갖는다. DTPM의 실제 계산에서 K 가 1보다 크다는 사실은 DMM과 DTPM에서 Leonard 응력항이 LES 컷오프 근처에서의 국부-상호작용을 충분히 파악하지 못한다는 것을 의미한다. 반면에, 사각필터를 적용한 DSM은 천이의 시작을 DNS와 잘 일치하도록 예측하나, 천이상태에서 벽전단응력의 극대값과 완전 발달된 난류상태에서의 응력값을 낮게 예측한다. 전체적으로 DSM 결과는 사각필터보다 컷오프 필터를 적용할 때가 DNS 결과와 더 가까웠다.

완전 발달된 난류채널유동에서의 평균 난류통계량을 컷오프 필터의 경우는 Fig. 8에 사각필터의 경우는 Fig. 9에 보여주고 있다. LES 통계량은 시간상에서는 $160 \leq tU_o/h \leq 250$ 사이의 91개의 시간단계에서 그리고 공간상에서는 균일방향으로 각 난류량을 평균함으로써 얻어졌다. 모든 LES 결과를 무차원하는데 사용된 벽마찰속도 u_τ 는 각각 해당하는 LES에서 완전 발달된 난류유동 ($160 \leq tU_o/h \leq 250$)으로부터 계산된 값을 택하였다. 평균 유속분포에서는 적용된 여러 SGS 모델 중에서 전반적으로 DTM과 DMM이 각각 컷오프 필터와 사각필터를 적용하는 경우 DNS 결과와

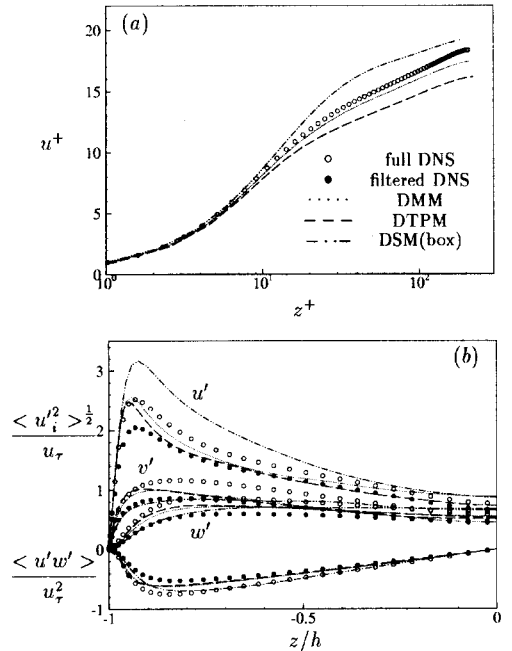


Fig. 9 (a) Mean velocity profiles, and (b) turbulence intensities and Reynolds stresses in the fully-developed turbulent channel

가장 잘 일치하였다. DTM과 DMM은 채널의 중심영역에서 $u^+ = 1/x \ln z^+ + A$ 에 해당하는 로그 경계층(logarithmic layer)의 존재를 예측한다. 그렇지만, DTM으로부터 결과는 DNS(또는 이론적인 벽법칙) 결과와 더 가까운 기울기 $1/x$ 를 가진다. 또한, 로그 경계층의 절점 A 는 양 모델에서 낮게 예측된다. 이는 완전 발달된 난류상태에서 DTM과 DMM에 의해 예측된 벽전단응력이 DNS 값보다 높아 무차원 과정에서 그 영향이 반영되었기 때문이다. 컷오프 필터와 사각필터가 적용된 DSM은 벽마찰 속도가 낮게 예측되었기 때문에 결과적으로 DNS에 비하여 높은 무차원 속도를 가지게 된다. 또한, 사각필터가 적용된 DSM은 채널의 중심영역에서 일정한 기울기를 가지는 로그 경계층을 예측하는데 실패하였다. 끝으로, DTPM으로부터 얻어진 결과는 이 모델이 예측한 높은 벽마찰속도 때문에 DNS 결과보다 현저하게 낮다.

Fig. 8과 9는 역시 완전 발달된 난류상태에서 LES에 의해 예측된 평균 난류강도와 평균 Reynolds 전단응력을 원 DNS 결과와 그리고 LES에서 사용된 같은 조건을 이용하여 필터링이 이

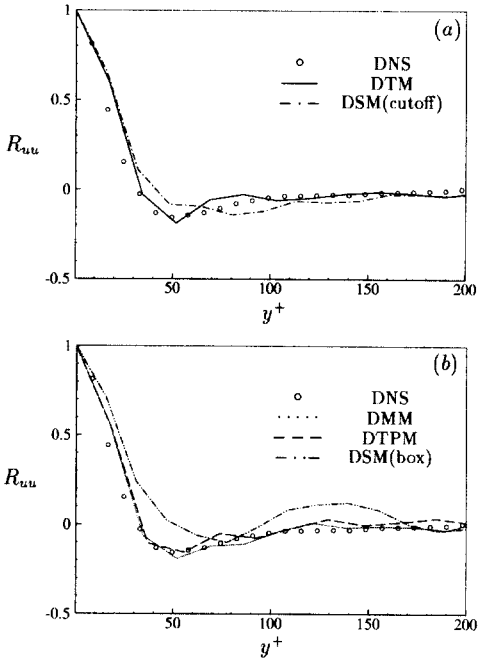


Fig. 10 Spanwise two-point correlations at $z^+ = 10$ based on the streamwise velocity in the fully-developed turbulent channel

루어진 DNS 결과와 비교되었다. 여러 SGS 모델 중에서 DTM이 대체적으로 DNS 결과와 가장 잘 일치하였다. DTM은 $z^+ \approx 13$ 의 위치에서 극대값 $u_{rms}/u_\tau = 2.5$ 을 예측하며, 이는 DNS 결과와 잘 일치하였다. DTM과 DNS 결과 사이에 유일한 차이는 횡방향으로의 난류강도에서 발생하는 데 DTM의 결과가 DNS 결과보다 높다. 이와 반대로 컷오프 필터와 사각필터를 각각 적용한 DSM은 유동방향의 난류강도에서 극대값이 높게 예측되며, 또한 이 극대값이 벽으로부터 많이 떨어진 $z^+ \approx 10$ 에서 얻어진다. 사각필터가 적용된 DMM과 DTPM은 DSM보다 우수한 결과를 얻었으며, 일반적으로 난류통계량을 비교적 정확하게 예측한다. 그렇지만, 이러한 모델을 이용하여 예측된 통계량은 필터링이 수행된 DNS 결과보다는 원 DNS 결과에 훨씬 더 가깝다.

LES 모델의 성능을 평가하기 위하여 벽근처 (near-wall)에서의 유동구조를 고찰할 필요가 있다. 벽근처 구조는 Fig. 10에서 $z^+ = 10$ 에서 횡방향으로 떨어진 점들에 대한 유동방향 속도의

이점 상관계수(two-point correlation coefficient)를 통하여 고찰된다. 여기서, 상관계수의 첫 번째 최소값에 해당하는 간격이 고속과 저속의 줄무늬(streak)의 평균간격에 대한 척도를 제공한다. 따라서, 평균 줄무늬 간격은 이 값의 대략 2배이다. 결과를 살펴보면, 평균 줄무늬 간격은 $\lambda^+ \approx 100$ 으로 DNS, DTM, DMM 및 DTPM에 의해 정확히 계산된다. 반면에, DSM은 컷오프 필터와 사각필터를 적용할 때 양 경우 $\lambda^+ \approx 160$ 으로 부정확하게 평균 줄무늬 간격을 예측한다. DSM이 이러한 유동구조를 정확하게 예측할 수 없는 이유는 그 모델이 국부적이고 순간적인 SGS 에너지전달을 정확하게 표현할 수 없는 사실과 직접 관련이 있는 듯하다. 유사한 결과는 앞서 논의된 평제트유동의 LES 결과에서도 역시 관찰된다. 이와 반대로 국부적이고 순간적인 수준에서 SGS 에너지전달의 분포를 비교적 정확하게 예측할 수 있는 DTM, DMM 및 DTPM과 같은 모델들은 역시 LES에서 유동구조를 정확하게 예측할 수 있었다.

6. 결론 및 요약

본 연구에서는 지금까지 개발된 많은 동적 아격자(SGS) 모델을 두 개의 대표적인 난류유동에 대한 - 각각 천이상태와 난류상태를 가지는 평제트유동과 채널유동 - 큰 에디 모사(LES)를 수행하여 평가하였다. 평가가 수행된 모델로는 컷오프 필터를 이용하는 경우는 Germano 등⁽⁷⁾의 동적 Smagorinsky 모델(DSM(cutoff))과 Akhavan 등⁽¹⁰⁾의 동적 이성분 모델(DTM), 그리고 사각필터를 이용하는 경우는 Zang 등⁽⁶⁾의 동적 혼성모델(DMM), Salvetti & Banerjee⁽⁵⁾의 동적 이매개변수 모델(DTPM) 및 동적 Smagorinsky 모델(DSM(box)) 등이 있다. LES 결과는 성능비교를 위하여 같은 유동에 대해 이루어진 DNS의 결과와 비교하였다.

계산 결과에 따르면, 컷오프 필터의 경우는 DTM이 사각필터의 경우는 DMM이 각각 같은 필터가 적용된 DSM에 비하여 LES에서 평균 난류통계량과 유동구조를 예측하는데 우수하였다. 이는 DTM과 DMM이 SGS 상호작용 현상을 보다 정확하게 표현하기 위하여 Smagorinsky 항 이외의 별개의 항을 도입한 모델의 구성에서 그 이유를 찾을 수 있다. 다시 말하면, 양 모델에서

Smagorinsky 에디-점도항은 비국부 상호작용을 설명하고 보조항 또는 Bardina 항은 LES 컷오프 근처에서 해석격자와 아격자 사이에 존재하는 비선형 운동특성에 의한 국부-상호작용을 설명한다. 이와 반면에, DSM에서는 Smagorinsky 항이 서로 다른 성격을 가지는 두 SGS 상호작용을 설명해야 되기 때문에 DTM이나 DMM에 비하여 열세이다. DTPM은 모델구성상 매우 유사한 DMM과 비교하면 비슷하거나 보다 열세인 성능을 보이고 있다. 끝으로, 컷오프 필터를 사용하는 경우가 전체적으로 사각필터를 사용하는 경우보다 난류 통계량과 유동구조를 예측하는데 보다 성공적이었다.

후 기

본 연구는 2000학년도 대구대학교 교내학술연구지원비에 의해 이루어졌습니다. 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Leonard, A., 1974, "Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows," *Adv. Geophys. A*, Vol. 18, pp. 237~248.
- (2) Germano, M., 1986, "A Proposal for a Redefinition of the Turbulent Stresses in the Filtered Navier-Stokes Equations," *Phys. Fluids*, Vol. 29, pp. 2323~2324.
- (3) Smagorinsky, J., 1963, "General Circulation Experiments with the Primitive Equations," *Mon. Weath. Rev.*, Vol. 91, pp. 99~164.
- (4) Bardina, J., Ferziger, J.H., and Reynolds, W.C., 1980, "Improved Subgrid Scale Models for Large Eddy Simulation," *AIAA 13th Fluid & Plasma Dynamics Conference*, Colorado.
- (5) Salvetti, M.V. and Banerjee, S., 1995, "A Priori Tests of a New Dynamic Subgrid-Scale Model for Finite-Difference Large-Eddy Simulations," *Phys. of Fluids A*, Vol. 7, pp. 2831~2847.
- (6) Zang, Y., Street, R. L., and Koseff, J. R., 1993, "A Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model and its Application to Turbulent Recirculating Flows," *Phys. of Fluids A*, Vol. 5, pp. 3186~3196.
- (7) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., and Cabot, W.H., 1991, "A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, pp. 1760~1765.
- (8) Lilly, D.K., 1992, "A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method," *Phys. of Fluids A*, Vol. 4, pp. 633~635.
- (9) Ghosal, S.G., Lund, T.S., Moin, P., and Akselvoll, K., 1995, "A Dynamic Localization Model for Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 286, pp. 229~255.
- (10) Akhavan, R., Ansari, A., Kang, S., and Mangiavacchi, N., 2000, "Subgrid-Scale Interactions in a Numerically Simulated Planar Turbulent Jet and Implications for Modelling," *J. Fluid Mech.*, Vol. 408, pp. 83~120.
- (11) Vreman, B., Geurts, B., and Kuerten, H., 1997, "Large-Eddy Simulation of the Turbulent Mixing Layer," *J. Fluid Mech.*, Vol. 339, pp. 357~390.
- (12) Sarghini, F., Piomelli, U., and Balaras, E., 1999, "Scale-Similar Models for Large-Eddy Simulations," *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 1596~1607.
- (13) Ghosal, S.G., 1996, "An Analytical of Numerical Errors in Large-Eddy Simulations of Turbulence," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 187~206.
- (14) Kravchenko, A.G. and Moin, P., 1997, "On the Effect of Numerical Errors in Large Eddy Simulations of Turbulent Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 131, pp. 310~322.
- (15) Yakhot, A., Orszag, S. A., Yakhot, V., and Israeli, M., 1989, "Renormalization Group Formulation of Large-Eddy Simulations," *J. Sci. Comput.*, Vol. 4, pp. 139~158.
- (16) Kraichnan, R.H., 1976, "Eddy Viscosity in Two and Three Dimensions," *J. Atmos. Sci.*, Vol. 33, pp. 1521~1536.