

무요소법에서 가중함수를 수정한 필수경계조건 처리법

강명석* · 윤성기**

(1999년 11월 22일 접수)

Treatment of Essential Boundary Conditions using Modified Weight Functions in Meshless Method

Myung-Seok Kang and Sung-Kie Youn

Key Words : Meshless Method(무요소법), Essential Boundary Conditions(필수경계조건), Element-Free Galerkin method(EFGM), Kinematically Admissible Function(운동학적 가중함수)

Abstract

In meshless methods some techniques to impose essential boundary conditions have been developed since the approximations do not satisfy Kronecker delta properties at nodal points. In this study, new scheme for imposing essential boundary conditions is developed. Weight functions are modified by multiplying with auxiliary weight functions and the resulting shape functions satisfy Kronecker delta property on the boundary nodes. In addition, the resulting shape functions possess an interpolation features on the boundary segments where essential boundary conditions are prescribed. Therefore the essential boundary conditions can be exactly satisfied with the new method. More importantly, the imposition of essential boundary conditions using the present method is relatively easy as in finite element method. Numerical examples show that the method also retains high convergence rate comparable to Lagrange multiplier method.

1. 서론

90년대에 들어 등장한 무요소방법은 요소를 만들지 않는다는 두드러진 장점으로 많은 주목을 받아왔다. 특히 균열의 전파의 해석과 같은 몇 가지 분야에서는 성공적인 성과를 나타내었다. 그러나 필수경계조건(essential boundary condition)의 처리, 복잡한 형상에 적용 등 많은 과제가 무요소법이 널리 쓰이는데 장애로 남아있었다. 무요소법에서 필수경계조건의 적용이 어려운 것은 유한요소법의 경우와 달리 형상함수가 절점에서 크로네커델타조건을 만족시키지 않기 때문이다. 또한 경계의 선 또는 면상에 적용되는 필수경계조건이 유한요소법의 경우 절점의 값으로 유일하게 결정될 수 있으나 무요소법의 경우 절점의 값만으로 절점사이의 값들을 유일하게 결정지을 수

없다는 점이 필수경계조건을 처리하는데 있어서 또 하나의 어려움이였다. 따라서 필수경계조건을 처리하기 위한 여러 방법들이 제안되어져 왔다.

Lancaster 등⁽¹⁾에 의해 이동최소근사법(moving least square method)이 개발되였다. 이 근사법을 Nayroles 등⁽²⁾이 경계치문제의 수치적해법에 사용하여 무요소법인 DEM(diffuse element method)을 개발하였다. Belytschko 등⁽³⁾은 DEM에 라그랑지승수를 도입하여 필수경계조건을 만족시키는 EFGM(element-free Galerkin method)을 개발하였다. Lu 등⁽⁴⁾은 수정된 분원리를 이용하여 필수경계조건을 처리하였다. Zhu 등⁽⁵⁾은 벌칙함수를 도입하여 필수경계조건을 만족시켰다. Chen 등⁽⁶⁾은 변환방법을 이용하였고 G nther 등⁽⁷⁾은 달랑베르의 원리를 이용하여 경계조건을 적용하였다. Kaljevic 등⁽⁸⁾은 특이함수를 필수경계조건이 부여된 절점에 도입하여 경계조건을 처리하였다. 또한 Chen 등⁽⁹⁾은 경계조건이 부여된 절점에서 변환관계를 이용한 경계조건 처리방법을 사용하였다. 이상의 여러 방법들은 모두 필수경계조건을 절점에서만 만족시키는 방법이었다.

* 회원, 한국과학기술원 대학원 기계공학과

E-mail : kms@sateci.co.kr

TEL : (042)869-3074 FAX : (042)861-1694

** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

Krongauz 등⁽¹⁰⁾은 무요소방법의 형상함수와 유한요소법의 형상함수를 결합하는 방법을 개발하였다. 이로써 필수경계조건을 경계를 따라 정확히 부여할 수 있었으나 유한요소법의 형상함수를 사용함으로써 무요소법의 특성을 잃게 되었다. Gosz 등⁽¹¹⁾은 RKPM (reproducing kernel particle method)의 형상함수를 만드는 과정에서 보정함수가 경계에서 0의 값을 갖도록 하여 필수경계조건을 만족하는 형상함수를 도출하였다. 여기서는 경계선상에서 절점의 간격이 일정하고 직선의 경계에서만 적용된다는 제한이 있었다. 이 방법들은 제한적이지만 경계선상에 부여된 필수경계조건을 정확히 만족시킬 수 있었다. 위의 두 방법은 모두 운동학적 가용함수를 도입하여 경계조건을 처리한 것이다.

국내에서는 앞선 방법들을 이용한 경계조건 처리법^(12,13)이 발표된 바 있다.

본 연구에서는 필수경계조건이 부여된 경계에서 0의 값을 가지는 보조가중함수를 도입하여 운동학적 가용함수를 형성하는 방법을 제안하였다. 보조가중함수는 가중함수에 곱해져서 크로네커델타조건을 만족하고 경계선상에서 형상함수의 선형조합으로 보간함수가 되도록 고안되었다.

보의 굽힘과 구멍이 있는 무한평판의 일방향 인장 문제에 대한 수치예제를 통해 라그랑지승수법과 비교하여 정확성과 수렴성을 검토하였다.

2. 무요소법

무요소법으로 대표적인 EFGM은 단항식의 선형조합을 이동최소근사법으로 결정한다.

이동최소근사법에서 함수 $u(\mathbf{x})$ 의 근사식 $u^h(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 단항식 $p_i(\mathbf{x})$ 를 기저항(basis)으로하는 선형조합으로 나타낸다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \tag{1}$$

이때 m 은 기저항의 갯수, 그리고 $a_i(\mathbf{x})$ 는 기저항의 계수이다. 절점에서의 오차를 제공하여 가중합을 취한 범함수 J 를 식 (2)와 같이 정의한다.

$$J = \sum_I w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) - u(\mathbf{x})]^2 \tag{2}$$

여기서 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 은 \mathbf{x}_I 을 원점으로 하는 가중함수이다. 계수 $a_i(\mathbf{x})$ 는 J 가 극치를 갖도록 결정한다.

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{3}$$

여기서

$$A_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_p} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) p_i(\mathbf{x}_I) p_j(\mathbf{x}_I) \tag{4}$$

$$B_{ij}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) p_i(\mathbf{x}_I) \tag{5}$$

이다. 식 (1)은 식 (3)에서 결정된 계수 $a_i(\mathbf{x})$ 를 도입하여 형상함수와 절점에 대한 미지수의 선형조합으로 나타낼 수 있다.

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_p} \varphi_I(\mathbf{x}) u_I \tag{6}$$

이때 형상함수 $\varphi_I(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\varphi_I(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) [\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x})]_{iI} \tag{7}$$

가중함수 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 는 각 절점에 정의된 영향반경 R_I 에 의해 정규화된 가중함수의 원점으로부터의 거리 $s = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| / R_I$ 의 함수로 정의된다. 보편적으로 스플라인 함수가 많이 쓰인다. 영향반경 R_I 는 정의구역 내의 모든 점에서 형상함수를 정의하는데 사용된 행렬 A 가 특이성을 갖지 않도록 설정된다.

3. 필수경계조건 처리를 위한

가중함수의 변형

본 연구에서는 보조가중함수를 도입하여 가중함수를 변형함으로써 경계에서 유한요소법의 선형형상함수의 형태를 가지고 내부에서 무요소법의 특징을 갖는 형상함수를 구현하였다.

보조가중함수는 필수경계조건이 부여된 절점 또는 경계선에 대해 정의된다. 이 함수의 원점은 필수경계조건이 부여된 절점 또는 경계선이 되며 원점에서 0의 값을 갖고 원점에서 멀리 떨어진 지점에서 1의 값을 갖는다. 또한 원점에 대한 거리만의 함수이고 충분한 연속성을 갖도록 정의된다. 가중함수는 다음과 같이 보조가중함수들과 곱해져서 수정된다.

$$\bar{w}_I(\mathbf{x}) = w_I(\mathbf{x}) \prod_{\substack{1 \leq J \leq N_p \\ I \neq J}} f_{IJ}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

여기서 보조가중함수 $f_{IJ}(\mathbf{x})$ 의 첨자 I 는 보조가중함수가 가중함수 $w_I(\mathbf{x})$ 를 수정하기 위한 것임을 나타내고, 첨자 J 는 J 번째 필수경계조건을 처리하기 위한 것임을 나타낸다.

수정된 가중함수를 사용하여 이동최소근사법을 적용하여 구한 형상함수는 필수경계조건이 부여된 경계를 제외한 모든 영역에서 연속성을 유지하며 이동최소근사법에 의해 부여된 완전성조건을 갖는 무요소 형상함수의 특징을 갖는다. 또한 내부절점에 대한 형상함수는 필수경계조건이 부여된 경계에서 0이 되

고 필수경계조건이 부여된 절점에 대한 형상함수는 크로네커델타조건을 만족시키게 된다 또한 형상함수는 필수경계조건이 부여된 경계선상의 인접한 절점 간에서는 선형보간의 특성을 갖는다.

3.1 점에 대한 보조가중함수

J 번째 경계조건이 절점에 부여된 것이라고 했을 때 보조가중함수 $f_U(\mathbf{x})$ 의 원점으로부터 거리 $d_J[\mathbf{x}]$ 는 다음으로 정의된다.

$$d_J[\mathbf{x}] = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_J^{bc}\| \tag{9}$$

여기서 \mathbf{x}_J^{bc} 는 필수경계조건 J에 의해 제한되는 절점의 좌표이다. 보조가중함수를 표준화된 함수로 나타내기 위하여 거리 $d_J[\mathbf{x}]$ 를 다음과 같이 정규화한다.

$$\rho_U = \frac{d_J[\mathbf{x}]}{d_J[\mathbf{x}_J]} \tag{10}$$

보조가중함수 $f_U(\mathbf{x}) = \hat{f}(\rho_U)$ 는 필수경계조건 J를 원점으로 하는 정규화된 거리 ρ_U 에 대해 다음의 조건을 만족하도록 한다.

1) $\hat{f}(0) = 0$ (11)

2) $\hat{f}(\rho_U) = 1$ for $\rho_U > 1$ (12)

3) $\hat{f}(\rho_U)$ is monotonically increasing function

for $0 < \rho_U \leq 1$ (13)

조건 1)은 필수경계조건이 부여된 경계상에서 형상함수가 크로네커델타조건과 보간성을 만족하도록 하는 역할을 한다. 필수경계조건 J에 대한 보조가중함수는 절점 J에 대한 가중함수를 제외한 모든 가중함수와 곱해서 필수경계조건이 부여된 절점 J에서 자신의 가중함수만이 0이 아닌 값을 갖도록 한다. 그러나 조건 2)에 의해 실제 연산은 $0 < \rho_U \leq 1$ 인 범위의 가중함수만이 사용된다. 이때 이 절점 J에서 식 (4)의 행렬 A가 특이성을 갖게 되며 식 (7)의 형상함수가 필수경계조건이 부여된 경계상에서 유효하지 않게 된다. 그러나 수식화의 과정에 경계에서의 형상함수가 필요하지 않아 문제가 되지 않는다.

다음은 보조가중함수의 예이다.

1) C^1 연속의 보조가중함수

$$f_U(\mathbf{x}) = \hat{f}(\rho_U) = \begin{cases} 1 - (1 - \rho_U)^2, & \text{if } 0 \leq \rho_U < 1 \\ 1, & \text{if } \rho_U \geq 1 \end{cases} \tag{14}$$

2) C^2 연속의 보조가중함수

$$f_U(\mathbf{x}) = \hat{f}(\rho_U) = \begin{cases} 1 - (1 - \rho_U)^3, & \text{if } 0 \leq \rho_U < 1 \\ 1, & \text{if } \rho_U \geq 1 \end{cases} \tag{15}$$

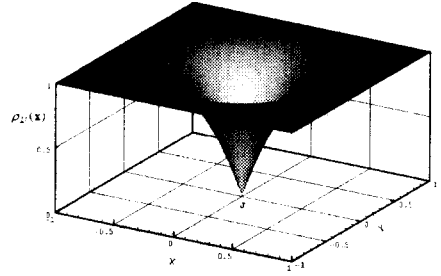


Fig. 1 A two dimensional auxiliary weight function for nodal essential boundary condition

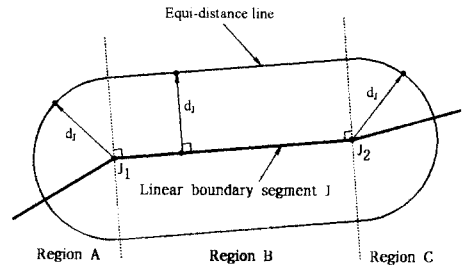


Fig. 2 Distance $d_J[\mathbf{x}]$ between a point \mathbf{x}_1 and boundary segment J

Fig. 1은 필수경계조건에 부여된 절점에 대한 보조가중함수의 형상이다.

3.2 경계선에 대한 보조가중함수

무요소법에서는 경계선상에서 인접한 두 절점의 값을 결정한다고 해서 절점간의 값이 결정되지 않는다. 이것은 주위의 절점에 대해 정의된 형상함수들의 값이 경계선상에서 0이 되지 않기 때문이다.

경계선상을 따라 경계조건을 결정하기 위하여 절점에 대한 보조가중함수를 확장하여 경계선상을 따라 정의되는 보조가중함수를 만들 필요가 있다. 경계선상에 정의되는 보조가중함수는 식 (9)의 절점에 대한 거리를 선분에 대한 거리에 대한 식으로 확장하여 구현한다.

필수경계조건 J가 절점 J_1 과 절점 J_2 를 끝단으로 하는 선분 J에 부여되었다면, 선분 J에 대한 식 (16)과 Fig. 2와 같이 정의된다.

$$d_J[\mathbf{x}] = \begin{cases} = d_{J_1}[\mathbf{x}] = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{J_1}\|, & \text{if } \mathbf{x} \text{ is in A} \\ = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{J_i}\|, & \text{if } \mathbf{x} \text{ is in B} \\ = d_{J_2}[\mathbf{x}] = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{J_2}\|, & \text{if } \mathbf{x} \text{ is in C} \end{cases} \tag{16}$$

Fig. 2에서 각 영역 A,B, 그리고 C는 선분 J의 끝점에서 선분 J에 수직한 선으로 분할된 각각의 영역이다. 각 영역에 대해 거리의 척도는 식 (16)으로 각각 정의된다.

Fig. 3은 직선선분 J상에 정의된 보조가중함수이다.

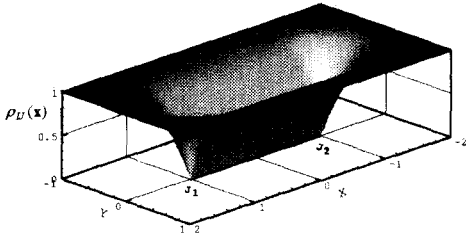
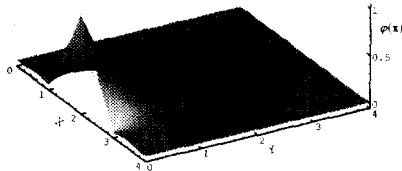
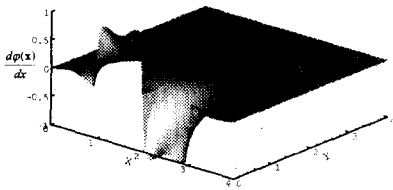


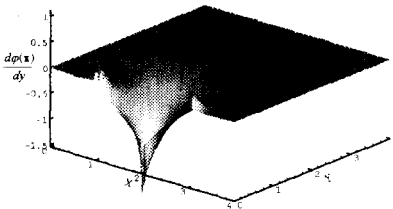
Fig. 3 A two dimensional auxiliary weight function with C^2 continuity for straight line segment where essential boundary condition is prescribed. The end nodes of the line segment are J_1 and J_2



(a) Shape function for boundary node.



(a) x-derivative



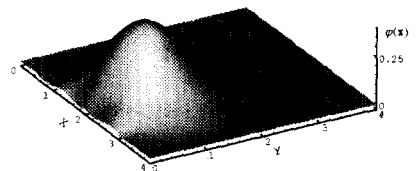
(c) y-derivative

Fig. 4 Two dimensional EFG shape function for boundary node and its derivatives. Essential boundary conditions are specified on nodes along the edge $y=0$. Uniform nodal distribution of 5×5 was used

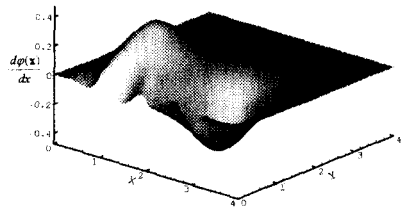
Fig. 4와 Fig. 5에서는 절점들이 5×5 의 균일한 간격으로 분포되어 있고 경계 $y=0$ 에 위치한 절점들에 필수경계조건이 부여된 되었을 때 형상함수들과 그 미분함수를 보이고 있다. Fig. 4(a)는 경계조건이 부여된 절점에 대한 형상함수로서 경계상의 다른 절점에 대해서 0의 값을 갖고 자신의 절점에서 1의 값을 갖는 크로네커델타조건을 만족한다. 그리고 Fig. 4(a)와 Fig. 4(b)는 각각 x-방향과 y-방향에 대한 미분을 보여준다. 경계상의 절점에서 불연속이 있으나 내부의 모든 점들에 대해서는 연속이다.

Fig. 5에서는 내부의 절점에 대한 형상함수와 그 미분을 보여준다. 내부의 절점에 대한 형상함수 역시 필수경계조건이 부여된 절점에서 0의 값을 갖게 된다.

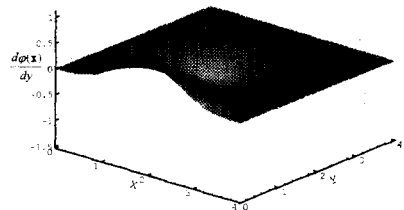
Fig. 6과 Fig. 7은 절점들이 5×5 의 균일한 간격으로 배치되어 있고 경계선 $y=0$ 위의 인접한 절점들을 양 끝단으로 하는 각각의 선분에서 필수경계조건이 부여되었을 때 형상함수와 그의 미분들을 나타낸다. Fig. 6(a)는 경계상의 절점에 대한 형상함수로서 형상함수



(a) Shape function for internal node



(b) y-derivative



(c) y-derivative

Fig. 5 Two dimensional EFG shape function for internal node and its derivatives. Essential boundary conditions are prescribed on nodes along the edge $y=0$. Uniform nodal distribution of 5×5 was used

는 경계상의 절점점에서 선형 유한요소와 같이 직선으로 나타나고 그 효과는 Fig. 6(b)와 Fig. 6(c)의 미분값에서 보듯이 x-방향 미분은 경계상의 각 선분상에서 상수값을 갖고 절점에서 불연속성을 갖는다. Fig. 7에서는 내부절점에 대한 형상함수와 그 미분들을 보여준다. Fig. 7(a)에서 보듯이 형상함수는 필수경계조건이 부여된 경계상에서 선을 따라가며 일정하게 0의 값을 갖는다.

필수경계조건이 부여된 절점 또는 경계선상에서의 형상함수는 식 (7)이 유효하지 않으므로 Fig's. 4,7의 형상함수는 $10^{-5} \leq y \leq 4$ 의 범위에 대해 나타내었다.

4. 수치예제

제안된 필수경계조건 처리방법을 수치적으로 검증하기 위하여 보의 굽힘문제와 구멍이 있는 평판의 인장문제에 대하여 라그랑지수법과 비교하였다.

가중함수로 3 차 스플라인 곡선을 사용하였고 적분격자는 각 꼭지점에 절점을 둔 사각형으로 4x4 Gauss 적분을 사용하였다.

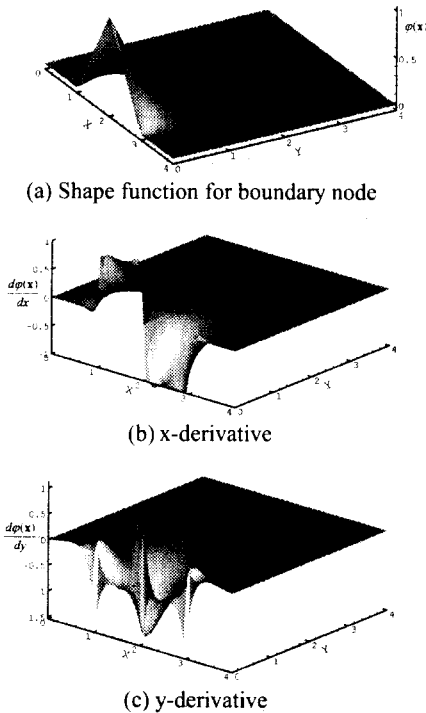


Fig. 6 Two dimensional EFG shape function for boundary node and its derivatives. Essential boundary conditions are specified on boundary segments along the edge $y=0$. Uniform nodal distribution of 5x5 was used

라그랑지수법을 사용하여 필수경계조건을 처리하는 변분수식화는 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s v^T) : \sigma d\Omega - \int_{I_1} \delta v^T \cdot \bar{t} dT - \int_{I_2} \delta v^T \cdot (u - \bar{u}) dT - \int_{\Gamma_c} \delta v^T \cdot \lambda dT = 0, \quad (17)$$

$$\forall \delta v \in H^1, \quad \forall \delta \lambda \in H^0$$

여기서, $u(x) \in H^1$ 는 시도함수(trial function), $\lambda \in H^0$ 는 라그랑지수, $\delta v \in H^0$ 는 시험함수(test function), \bar{u} 와 \bar{t} 는 각각 변위와 외력에 대한 경계조건이다.

두 방법의 정확성을 비교하기 위한 척도로 식 (18)과 식 (19)으로 정의된 L_2 변위오차율과 에너지오차율을 사용하였다.

$$\|E^d\|_2 = \left[\int_{\Omega} (u^h - u^{exact})^T (u^h - u^{exact}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$\|E^e\|_2 = \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon^h - \varepsilon^{exact})^T (\sigma^h - \sigma^{exact}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

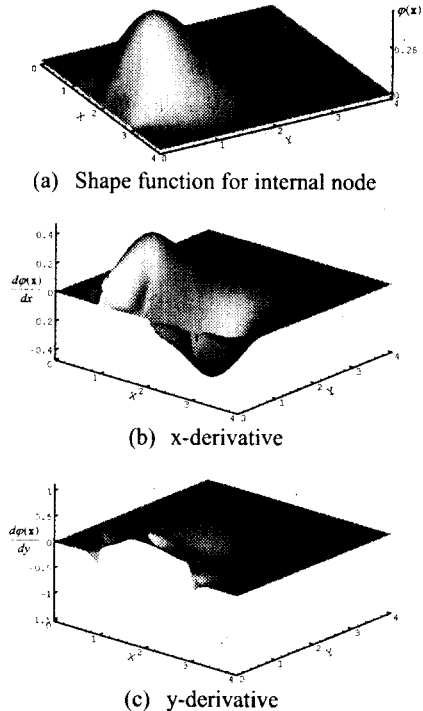


Fig. 7 Two dimensional EFG shape function for internal node and its derivatives. Essential boundary conditions are specified on boundary segments along the edge $y=0$. Uniform nodal distribution of 5x5 was used

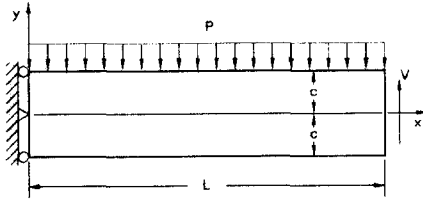


Fig. 8 Bending of a beam by uniform distributed load

4.1 외팔보의 굽힘

Fig. 8의 균일한 분포하중을 받는 보의 굽힘에 대해 평가하였다. 변위오차율과 에너지 오차율을 구하기 위해 Timoshenko 등⁽¹⁴⁾의 이론해를 정해로 사용하였다.

해석에 사용한 물성치로 영률 $E=1000$, 푸아송비 $\nu=0.3$ 그리고 외팔보의 길이 $L=20$, 높이 $2c=6$ 또한 끝단에 가해진 분포하중 $P=1$ 에 대하여 해석하였다.

절점은 균일하게 분포시켰으며 절점수를 늘여감에 따라 보조가중함수를 도입한 가중함수 수정법과 라그랑지승수법을 적용한 해석에서 해의 수렴성을 비교하였다.

Fig. 9는 절점간격 h 에 대한 보의 끝단의 변위를 나타내었다. 변위에 있어서 보조가중함수를 도입한 가중함수 수정법과 라그랑지승수법의 결과가 거의 일치함을 볼 수 있다.

Fig. 10(a)는 절점간격 h 에 대한 변위오차율을 나타낸다. 수렴성을 나타내기 위한 수렴률 r 은 다음의 식 (20)으로 정의하였다.

$$\|E\| = c\bar{h}^r \tag{20}$$

여기서 c 는 상수, \bar{h} 는 절점간격의 평균이다.

라그랑지승수법과 보조가중함수를 도입하여 가중함수를 수정하는 방법은 수렴률(rate of convergence)이 각각 2.233과 2.218으로 나타났다. 그리고 에너지 오차율은 Fig. 10(b)와 같이 수렴률이 각각 2.437과 2.367로 나타났다.

4.2 구멍이 있는 평판의 인장

구멍이 있는 무한평판의 인장에 대한 응력분포에 대한 해석 결과는 Timoshenko 등⁽¹⁴⁾의 이론해를 사용하여 평가하였다.

Fig. 11에서는 식 (25),(26),(27)의 무한평판에 대한 응력분포를 재현하기 위한 경계조건과 유한한 크기의 수치모델을 보여준다. Fig. 11(a)에서와 같이 왼쪽면과 바닥면은 대칭면으로 각각 $u_x=0$ 와 $u_y=0$ 를 필수경계조건을 부여하였다. 윗면과 오른쪽면은 이론해의 응력값을 외력으로 부여하였다.

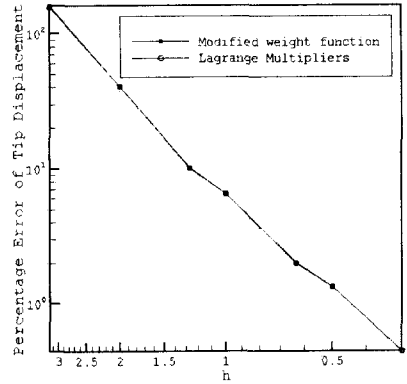
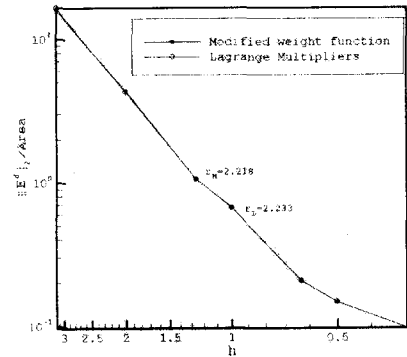
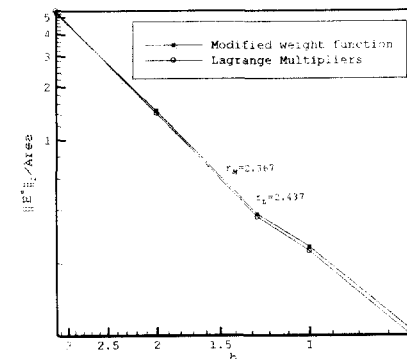


Fig. 9 Convergence of tip displacement



(a) Displacement error norm

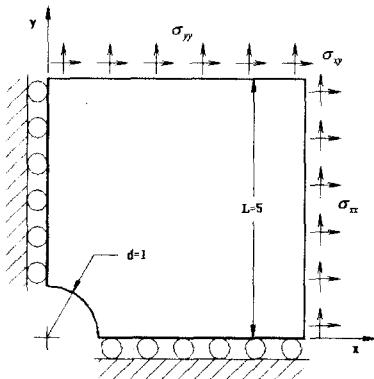


(b) Energy error norm

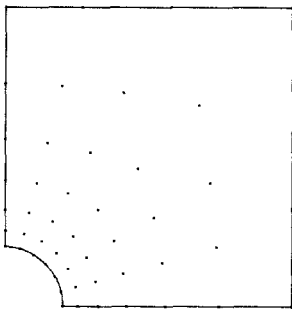
Fig. 10 Convergences for cantilever beam problem

Fig. 11(b)는 절점의 분포의 예를 보인다. 절점은 반경방향으로 같은 비율로 간격이 넓어지도록 배치하였고 수렴률을 나타내기 위한 절점간의 간격 \bar{h} 는 측면을 따른 절점들의 간격의 평균을 절점간격의 대표값으로 취하였다.

Fig. 12에서는 해석한 결과에 대한 에너지오차율



(a) Numerical model



(b) An example of nodal distribution

Fig. 11 A plate as a portion of infinite plate with a central circular hole subjected to a unidirectional tensile load of 10 in x-direction

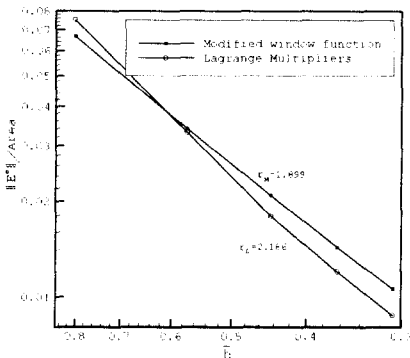


Fig. 12 Convergence rates in energy norm obtained by modified window function and Lagrange multiplier. The nodal distance \bar{h} is averaged along the edge

을 보이고 있다. 라그랑지승수를 이용한 필수경계조건을 처리한 방법의 수렴률은 2.186 이었고, 보조가중함수를 이용하여 수정된 가중함수를 이용하는 방법

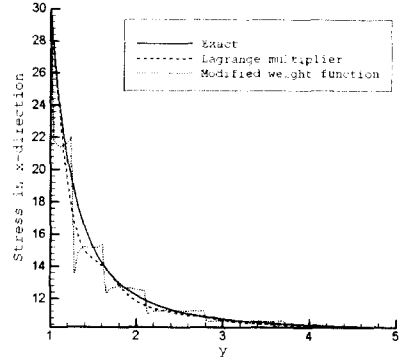


Fig. 13 Comparison of normal stress in x-direction along the line $x=0$ obtained by modified weight function and Lagrange multiplier method

은 수렴률이 1.899 로 나타났다.

Fig. 13 에서는 $x=0$ 인 면을 따라 x -방향 응력의 분포를 나타내고 있다. 부드러운(smooth) 가중함수를 사용하였고 이동최소자승법으로 형상함수를 만들었으므로 해석의 영역 내에서 근사함수 및 그의 미분함수의 연속성이 보장된다. 경계선상에서 형상함수의 특이성으로 형상함수가 정의되지 않으나 경계선상에 가까이 갈수록 형상함수는 선형유한요소의 형상함수에 수렴한다. 이는 적절한 좌표 변환과 사상(mapping)을 거쳐 식 (7)로부터 유도할 수 있다. 경계선상에서 형상함수가 정의되지 않기 때문에 Fig. 13 에서는 $x=10^{-5}$ 의 선을 따라 응력값을 계산하여 수정된 가중함수를 이용한 근사함수의 특성을 보이고 있다.

5. 결론

절점과 경계선상에 부여된 필수경계조건을 정확히 만족시켜주는 새로운 경계조건 처리방법을 제안하였다. 이 방법은 보조가중함수를 도입하여 가중함수를 수정함으로써 운동학적 가중함수를 만들어 절점과 경계선상에 적용되는 필수경계조건을 만족시키는 방법이다. 본 논문에서 예시하지는 않았지만 곡선의 경계에서도 직선경계 상에 정의되는 보조가중함수를 곡선경계 상에 정의되도록 사상하여 적용할 수 있다. 또한 3 차원의 문제에 있어서도 절점에 대한 보조가중함수를 1 차원 직선상에 적용되도록 확장한 것과 같이 차원을 확장하여 적용할 수 있다.

본 필수경계조건처리법은 형상함수가 절점에서 크로네커델타조건을 만족하고 경계상의 인접한 두 절점을 끝점으로 하는 선분에 대해서 선형보간의 성질을 갖는 운동학 가중함수를 만들어 단순하고 적은 계산량으로 필수경계조건을 적용하는 방법이다.

본 방법의 정확성 및 수렴성을 라그랑지승수를 이용한 필수경계처리방법과 비교하였다. 외팔보의 굽힘과 구멍이 있는 무한평판의 인장문제에 대해서 검토한 결과 라그랑지승수를 이용한 방법에 상응하는 수렴성과 정확성을 보였다.

제안된 필수경계조건을 처리하는 방법은 기존의 경계조건을 처리하는 방법들에 비하여 다음의 장점들을 갖는다.

- (1) 기존의 무요소법의 수식화를 변경하지 않고,
- (2) 추가적인 미지수의 도입이 없으며,
- (3) 불균일한 간격의 절점에도 적용가능하고,
- (4) 계산량의 증가가 매우 적으며,
- (5) 무요소법의 특징들이 유지된다.

참고문헌

- (1) Lancaster, P. and Salkauskas, 1981, K., "Surfaces Generated by Moving Least Square Methods," *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141~158.
- (2) Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P., 1992, "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements," *Computational Mechanics*, Vol. 10, pp. 307~318.
- (3) Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L., 1994, "Element-Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229~256.
- (4) Lu, Y.Y., Belytschko, T., and Gu, L., 1994, "A New Implementation of the Element Free Galerkin Method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, pp. 397~414.
- (5) Zhu, T., Atluri, S.N., 1998, "A Modified Collocation Method and a Penalty Formulation for Enforcing the Essential Boundary Conditions in the Element Free Galerkin Method," *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 211~222.
- (6) Chen, J.S., Pan, C., Wu, C.T., and Liu, W.K., 1996, "Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Analysis of Non-linear Structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 195~227.
- (7) G nther, F.C. and Liu, W.K., 1998, "Implementation of Boundary Conditions for Meshless Methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 163, pp. 205~230.
- (8) Kaljevic, I., and Saigal, S., 1997, "An Improved Element Free Galerkin Formulation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 16, pp. 2953~2974.
- (9) Chen J.-S., Wang H.-P. and Liu W.-K., 1999, "Meshfree Method with Enhanced Boundary Condition Treatments for Metal Forming Simulation," *The 1999 NSF Design & Manufacturing Grantees Conference*, Queen Mary, Long Beach, CA, USA, Jan. 5-8.
- (10) Krongauz, Y. and Belytschko, T., 1996, "Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations using Finite Elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131, pp. 133~145.
- (11) Gosz, J. and Liu, W.K., 1996, "Admissible Approximations for Essential Boundary Conditions in the Reproducing Kernel Particle Method," *Computational Mechanics*, Vol. 19, pp. 120~135.
- (12) 석병호, 임장근, 1999, "EFGM 에서 필수경계조건을 위한 형상함수 수정법," 대한기계학회 '99년도 춘계학술대회논문집, pp. 838~842.
- (13) 석병호, 임장근, 1999, "특이커널함수를 사용한 RKPM," 대한기계학회, 99년도 추계학술대회 논문집, pp. 578~583.
- (14) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1970, *Theory of Elasticity*(Third Edition), McGraw Hill, New York.