

적층판의 원통형 굽힘에 대한 횡방향 전단변형

이수용* · 박정선**
(1999년 11월 5일 접수)

Transverse Shear Deformation in the Cylindrical Bending of Laminated Plates

Soo-Yong Lee and Jungsun Park

Key Words: Laminated Plate Theory(적층판 이론), Cylindrical Bending(원통형 굽힘), Transverse Shear Stress(횡방향 전단응력)

Abstract

This paper presents a new laminated plate theory for the cylindrical bending of laminated plates. The theory assumes that inplane displacements vary exponentially through plate thickness. Analytical solutions are derived for simply supported plates subjected to transverse loading. The accuracy of the present theory is examined for unsymmetric laminates, and the numerical results are compared with three-dimensional elasticity solutions of Pagano. The present theory predicts displacements and stresses for very thick plates very accurately. In particular, transverse shear stresses obtained from constitutive equations are predicted very accurately.

1. 서론

복합재료 적층판의 구조물을 해석하거나 설계할 때 일반적으로 고전 적층판 이론(classical laminated plate theory)이 많이 사용되나, 적층판의 길이-두께 비가 작을 경우 또한 복합재료 적층의 인장 탄성계수와 전단탄성계수의 비가 클 경우에, 고전 적층판 이론은 횡방향 전단변형의 무시로 인해 매우 부정확한 해석 결과를 제공한다. 따라서, 이와 같은 단점을 보완하기 위해서 등방성 재료에 대한 Reissner-Mindlin의 일차 전단변형 이론(first-order shear deformation theory)이 Yang,⁽¹⁾

Whitney와 Pagano,⁽²⁾ Whitney⁽³⁾ 등에 의해 복합재료 적층판에 응용되었다. 그러나, 일차 전단변형 이론은 전단 보정계수(shear correction factor)에 따라 결과가 변화할 뿐만 아니라, 두꺼운 적층판에 대해 부정확한 결과를 나타낸다.

그리하여 수많은 고차 전단변형 이론(higher-order shear deformation theory)이 개발되었다. Lo,⁽⁴⁾ Murthy,⁽⁵⁾ Reddy⁽⁶⁾ 등에 의해, 대표적인 고차 전단변형 이론이 개발되었는데, 횡방향 전단응력이 구성방정식(constitutive equation)으로부터 계산된다면, 이러한 이론들은 적층과 적층 사이에서 횡방향 전단응력의 연속조건을 만족시키지 못하기 때문에, 이 이론들 역시 매우 부정확한 해석결과를 나타낸다. 이러한 단점을 극복하기 위해서 Di Sciuva,⁽⁷⁾ Murakami,^(8,9) Cho^(10,11) 등에 의해 각 적층 사이에서 평면변위(in-plane displacement)를 지그재그(zigzag) 형태로 가정한 적층판 이론들이 개발되었고, 이들의 해석결과를

* 회원, 한국항공대학교 항공기계공학과
E-mail : leesy@mail.hankong.ac.kr
TEL : (02)300-0111 FAX : (02)3158-2191
** 회원, 한국항공대학교 항공우주공학과

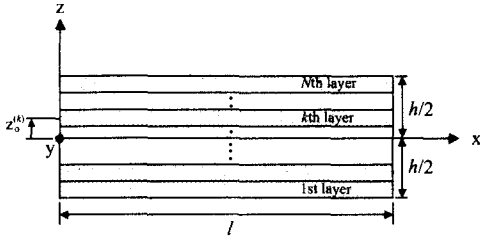


Fig. 1 Geometry of a laminated plate

Pagano^(12,13)의 3차원 탄성해와 비교하였다. 이러한 이론들은 두꺼운 적층판에 대해 처짐, 면방향의 변위 및 응력은 다른 이론에 비해 상당히 개선되었으나, 구성방정식으로부터 구한 횡방향 전단응력은 충분히 개선되지 못하였다.

따라서, 본 논문에서는 원통형 굽힘 문제에 대한 새로운 적층판 이론을 유도하여, 횡방향 하중이 작용할 때 적층판의 면 방향 거동뿐만 아니라 횡방향 전단변형을 보다 정확히 예측하고자 한다. 본 논문에서 제시된 이론을 검증하기 위해서 임의의 적층각도를 갖는 단순지지 적층판의 해석해를 구한 후, 그 해석 결과를 Pagano의 3차원 탄성 해와 비교하고자 한다.

2. 적층판의 변위장

우선 Fig. 1에 제시된 것처럼 N개의 이방성 적층으로 구성된 복합재료 적층판의 원통형 굽힘을 고려하고자 한다. 좌표 x, y는 적층판의 중앙면을 나타내고, 좌표 z는 평판에 수직인 방향을 나타낸다. 원통형 굽힘에서는 y축 방향으로 적층판의 길이는 무한하고, 또한 z축에 평행하게 작용하는 횡방향 하중 및 적층판 양 끝단에서의 경계 조건은 y축을 따라 일정하다고 가정한다. k번째 적층에서의 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad (1c)$$

일반적으로 횡방향 수직응력 σ_{zz} 은 다른 응력에

비해 크기가 작기 때문에 대부분의 적층판 이론에서 무시된다. 따라서, k번째의 적층에 대한 응력과 변형률 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3)$$

이 식에서 Q_{ij} 는 적층판의 평면응력 조건을 만족하는 탄성계수로서 $Q_{ij} = C_{ij} - C_{i3}C_{j3}/C_{33}$ ($i, j = 1, 2, 6$), $Q_{ij} = C_{ij}$ ($i, j = 4, 5$)와 같이 정의되고, C_{ij} 는 3차원 탄성계수를 나타낸다. 변형률과 변위 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^{(k)} &= \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}, & \epsilon_{yy}^{(k)} &= \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \\ \epsilon_{zz}^{(k)} &= \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} \\ \gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \\ \gamma_{yz}^{(k)} &= \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} \\ \gamma_{xz}^{(k)} &= \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

이 식에서 $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}$ 는 좌표 x, y, z 방향으로의 변위성분을 각각 나타낸다. 원통형 굽힘에서 변위는 좌표 y와 무관하다. 따라서, 응력과 변형률도 좌표 y에 무관하기 때문에 본 연구에서는 k번째 적층에 대한 변위장을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, z) &= u^0(x) + A^{(k)} e^{s^{(k)}(z-z_0^{(k)})} \frac{dw}{dx} \\ v^{(k)}(x, z) &= v^0(x) + A^{(k)} \lambda^{(k)} e^{s^{(k)}(z-z_0^{(k)})} \frac{dw}{dx} \\ w^{(k)}(x) &= w(x) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $z_0^{(k)}$ 은 Fig. 1에 제시된 것처럼 k번째 적층의 중앙면을 나타내고, $A^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)}$ 는 나중에 결정될 상수들이다. 식 (2)~(5)를 식 (1a)와 (1b)에 대입하여 정리한 후, 그 식들을 변위로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_{11} \frac{d^2 u^0}{dx^2} + Q_{16} \frac{d^2 v^0}{dx^2} + \left[Q_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q_{55} s^2 \frac{dw}{dx} \right. \\ \left. + \lambda (Q_{16} \frac{d^2 w}{dx^2} + Q_{45} s^2 \frac{dw}{dx}) \right] A e^{s(z-z_0)} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$Q_{16} \frac{d^2 u^0}{dx^2} + Q_{66} \frac{d^2 v^0}{dx^2} + \left[Q_{16} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q_{45} s^2 \frac{dw}{dx} + \lambda (Q_{66} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q_{44} s^2 \frac{dw}{dx}) \right] A e^{s(z-z_0)} = 0 \tag{7}$$

여기서 식을 간단하게 표현하기 위해서 위첨자 (k)를 생략하였다. 식 (6)과 (7)에서 A 와 z 는 임의 값을 갖기 때문에 이 두개의 식으로부터 다음과 같은 식들이 유도된다.

$$Q_{11} \frac{d^2 u^0}{dx^2} + Q_{16} \frac{d^2 v^0}{dx^2} = 0 \tag{8}$$

$$Q_{16} \frac{d^2 u^0}{dx^2} + Q_{66} \frac{d^2 v^0}{dx^2} = 0 \tag{9}$$

$$Q_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q_{55} s^2 \frac{dw}{dx} + \lambda (Q_{16} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q_{45} s^2 \frac{dw}{dx}) = 0 \tag{10}$$

$$Q_{16} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q_{45} s^2 \frac{dw}{dx} + \lambda (Q_{66} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q_{44} s^2 \frac{dw}{dx}) = 0 \tag{11}$$

만약 횡방향 변위 즉, 처짐 w 를 알고 있다면, 식 (10)과 (11)로부터 상수 λ 와 s 를 구할 수 있다. 대부분의 적층판 이론에서 해석해를 구하기 위해 Fourier sine series를 이용하여 처짐을 가정한다.^(12,13) 이렇게 가정된 처짐 식은 단순지지된 적층판에 대해서는 엄밀해를 제공하고 고정지지된 적층판에 대해서는 근사해를 제공한다. 따라서, 본 연구에서도 Fourier sine series를 이용하여 처짐을 다음과 같이 가정한다.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \frac{m\pi x}{l} \tag{12}$$

이 식에서 l 은 적층판의 길이이고 W_m 은 결정되어야 할 상수이다. 식 (12)를 식 (10)과 (11)에 대입하면 식 (13)과 (14)가 유도된다.

$$Q_{11} p^2 - Q_{55} s^2 + \lambda (Q_{16} p^2 - Q_{45} s^2) = 0 \tag{13}$$

$$Q_{16} p^2 - Q_{45} s^2 + \lambda (Q_{66} p^2 - Q_{44} s^2) = 0 \tag{14}$$

여기서 $p = m\pi/l$ 이다. 상수 λ 와 s 의 값들을 구하기 위해서 식 (13)과 (14)을 풀면, 다음과 같이 표현된다.

$$as^4 - bp^2 s^2 + cp^4 = 0 \tag{15}$$

$$\lambda = \frac{Q_{16} p^2 - Q_{45} s^2}{Q_{44} s^2 - Q_{66} p^2} \tag{16}$$

식 (15)의 계수들은 다음과 같이 정의되고,

$$\begin{aligned} a &= Q_{55} Q_{44} - Q_{45}^2 \\ b &= Q_{11} Q_{44} + Q_{55} Q_{66} - 2Q_{16} Q_{45} \\ c &= Q_{11} Q_{66} - Q_{16}^2 \end{aligned} \tag{17}$$

그리고 식 (15)의 4개의 근은 다음과 같이 표현된다.

$$s = \pm p \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \tag{18}$$

$$\pm p \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

식 (17)에 주어진 계수 a 는 항상 양수임을 쉽게 증명할 수 있다. 그리고 다양한 실제 복합재료 물성치를 이용하여 계산한 결과, 계수 $b, c, \sqrt{b^2 - 4ac}$ 에 대한 음의 값은 발견되지 않았다. 따라서, 식 (18)에 주어진 근들은 실수이다. 상수 λ 는 식 (18)을 식 (16)에 대입하여 구해진다. 만약 주어진 적층이 직교 이방성(orthotropic)이라면 식 (18)에 주어진 값은 다음과 같이 변경되며,

$$s = \pm p \sqrt{\frac{Q_{11}}{Q_{55}}}, \pm p \sqrt{\frac{Q_{66}}{Q_{44}}} \tag{19}$$

또한 상수 λ 값은 $s = \pm p \sqrt{Q_{11}/Q_{55}}$ 와 $s = \pm p \sqrt{Q_{66}/Q_{44}}$ 에 대해 각각 0과 1로 주어진다. 식 (16)과 (18)을 식 (5)에 대입함으로써, 원통형 굽힘에 대한 변위는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u &= u^0 + (\alpha_1 e^{s_1(z-z_0)} + \delta_1 e^{-s_1(z-z_0)} + \alpha_2 e^{s_2(z-z_0)} + \delta_2 e^{-s_2(z-z_0)}) \frac{dw}{dx} \\ v &= v^0 + (\lambda_1 \alpha_1 e^{s_1(z-z_0)} + \lambda_1 \delta_1 e^{-s_1(z-z_0)} + \lambda_2 \alpha_2 e^{s_2(z-z_0)} + \lambda_2 \delta_2 e^{-s_2(z-z_0)}) \frac{dw}{dx} \end{aligned} \tag{20}$$

$$w = w(x)$$

이 식에서 s_1 과 s_2 는 식 (18)에 주어진 양의 근들을 각각 나타내고, 또한 λ_1 과 λ_2 는 s_1 과 s_2 에 대해 각각 식 (16)에 의해 결정되는 값들이다. 그리고 식 (20)에 주어진 상수 α_i, δ_i 의 값들은 적층과 적층 사이에서 만족되어야 하는 연속조건으로부터 결정된다. k 번째 적층과 $k+1$ 번째 적층 사이에서 변위와 횡방향 전단응력의 연속조건은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^{(k)} &= \mathbf{u}^{(k+1)}, \quad \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k+1)} \\
 \sigma_{xz}^{(k)} &= \sigma_{xz}^{(k+1)}, \quad \sigma_{yz}^{(k)} = \sigma_{yz}^{(k+1)} \\
 k &= 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

그리고 적층판의 맨 윗층과 아래층에서 횡방향 전단응력은 영으로 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = 0 \quad \text{at } z = -\frac{h}{2} \\
 \sigma_{xz}^{(N)} &= 0, \quad \sigma_{yz}^{(N)} = 0 \quad \text{at } z = \frac{h}{2}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

이 식에서 h 는 적층판의 두께를 나타낸다. 적층판이 N 개의 적층으로 구성된다면, 식 (20)에 주어진 α_i, δ_i 에 대한 총 미지수는 $4N$ 개이며 그리고 식 (21)과 (22)에 주어진 식의 개수 역시 $4N$ 이다. 그러므로, 식 (21)과 (22)로 구성되는 연립방정식을 풀어서 α_i, δ_i 에 대한 값들을 쉽게 결정할 수 있다

3. 적층판의 지배방정식 유도

가상 일 원리를 이용하여 본 논문에서 제시된 적층판 이론과 관련된 지배방정식을 유도하고자 한다. 횡방향 하중 작용 시 원통형 굽힘 문제에 대한 가상 일 원리는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \int \int \int_V (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} \\
 + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dy dz = \int \int_{\Omega} q \delta w dx dy
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

이 식에서 V 와 Ω 는 판의 체적과 면적을 나타내고, q 는 판의 표면에 작용하는 횡방향 분포하중이다. 식 (4)와 (20)을 식 (23)에 대입하고 부분적분을 수행하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \int \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u^0 - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v^0 \right. \\
 + \left[\int_{-h/2}^{h/2} (F_1 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + F_2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} \right. \\
 \left. \left. - F_4 \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - F_5 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}) dz - q \right] \delta w \right\} dx dy \\
 + \int_{S_x} \{ N_x \delta u^0 + N_{xy} \delta v^0 \\
 - \int_{-h/2}^{h/2} (F_1 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + F_2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - F_4 \sigma_{yz} - F_5 \sigma_{xz}) dz \delta w \\
 + \int_{-h/2}^{h/2} (F_1 \sigma_{xx} + F_2 \sigma_{xy}) dz \frac{d \delta w}{dx} \} dy = 0
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

이 식에서 S_x 는 좌표 x 값이 일정한 경계를 나타내고, 다른 변수들은 다음과 같이 정의된다.

$$(N_x, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) dz
 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \alpha_1 e^{s_1(z-z_0)} + \delta_1 e^{-s_1(z-z_0)} \\
 &\quad + \alpha_2 e^{s_2(z-z_0)} + \delta_2 e^{-s_2(z-z_0)} \\
 F_2 &= \lambda_1 \alpha_1 e^{s_1(z-z_0)} + \lambda_1 \delta_1 e^{-s_1(z-z_0)} \\
 &\quad + \lambda_2 \alpha_2 e^{s_2(z-z_0)} + \lambda_2 \delta_2 e^{-s_2(z-z_0)}
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$F_4 = \frac{dF_2}{dz}$$

$$F_5 = \frac{dF_1}{dz} + 1$$

식 (24)로부터 $\delta u^0, \delta v^0, \delta w$ 는 임의의 값을 갖기 때문에, 다음과 같은 평형방정식을 구할 수 있고

$$\delta u^0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0
 \tag{27}$$

$$\delta v^0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0
 \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w : \int_{-h/2}^{h/2} (F_1 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + F_2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} \\
 - F_4 \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - F_5 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}) dz = q
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

그리고 경계 S_x 에서 규정되어야 할 경계조건은 다음과 같이 주어진다

$$u^0 \text{ or } N_x$$

$$v^0 \text{ or } N_{xy}$$

$$\begin{aligned}
 w \text{ or } \int_{-h/2}^{h/2} (F_1 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + F_2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \\
 - F_4 \sigma_{yz} - F_5 \sigma_{xz}) dz
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

$$\frac{dw}{dx} \text{ or } \int_{-h/2}^{h/2} (F_1 \sigma_{xx} + F_2 \sigma_{xy}) dz$$

식 (27)~(29)들을 변위로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{11} \frac{d^2 u^0}{dx^2} + Q_{16} \frac{d^2 v^0}{dx^2}] dz \\
 + \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} F_1 + Q_{16} F_2) dz \frac{d^3 w}{dx^3} = 0
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{16} \frac{d^2 u^0}{dx^2} + Q_{66} \frac{d^2 v^0}{dx^2}] dz \\
 + \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{16} F_1 + Q_{66} F_2) dz \frac{d^3 w}{dx^3} = 0
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}F_1 + Q_{16}F_2) dz \frac{d^3u^0}{dx^3} \\ & + \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{16}F_1 + Q_{66}F_2) dz \frac{d^3v^0}{dx^3} \\ & + \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}F_1^2 + 2Q_{16}F_1F_2 + Q_{66}F_2^2) dz \frac{d^4w}{dx^4} \quad (33) \\ & - \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{44}F_4^2 + 2Q_{45}F_4F_5 + Q_{55}F_5^2) dz \frac{d^2w}{dx^2} \\ & = q \end{aligned}$$

이 식에서 평면변위 u^0, v^0 와 처짐 w 가 서로 연관이 있는 것처럼 보이지만 실제로 서로 독립관계이다. 이 점을 살펴보기 위해서 식 (8)과 (9)를 식 (31)과 (32)에 적용하면 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}F_1 + Q_{16}F_2) dz = 0 \quad (34) \\ & \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{16}F_1 + Q_{66}F_2) dz = 0 \end{aligned}$$

따라서, 식 (34)의 결과를 식 (31)~(33)에 대입하여 적층판의 지배방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$A_{11} \frac{d^2u^0}{dx^2} + A_{16} \frac{d^2v^0}{dx^2} = 0 \quad (35)$$

$$A_{16} \frac{d^2u^0}{dx^2} + A_{66} \frac{d^2v^0}{dx^2} = 0 \quad (36)$$

$$D \frac{d^4w}{dx^4} - H \frac{d^2w}{dx^2} = q \quad (37)$$

여기서 A_{ij} 는 평면탄성계수(inplane moduli)로서 다음과 같고,

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad (38)$$

그리고 D 와 H 는 아래와 같이 정의된다.

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}F_1^2 + 2Q_{16}F_1F_2 + Q_{66}F_2^2) dz \quad (39)$$

$$H = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{44}F_4^2 + 2Q_{45}F_4F_5 + Q_{55}F_5^2) dz$$

다음에는 양 끝단이 단순지지된 적층판에 대한 식 (35)~(37)의 해석 해를 구하고자 한다. 이와 같이 단순지지에 대한 경계조건은 식 (30)으로부터 구해지는데, $x=0$ 과 $x=l$ 에서 만족되어야 하는 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & w = N_x = N_{xy} = 0 \\ & \int_{-h/2}^{h/2} (F_1\sigma_{xx} + F_2\sigma_{xy}) dz = 0 \quad (40) \end{aligned}$$

해석해를 구하기 위해 우선 횡방향 분포하중 q 를 다음과 같이 Fourier sine series로 전개하고

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (41)$$

그리고 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cos \frac{m\pi x}{l} \\ v^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m \cos \frac{m\pi x}{l} \quad (42) \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned}$$

이와 같이 변위를 가정하면 적층판의 양 끝단에서 σ_{xx} 와 σ_{xy} 의 값은 영이 되기 때문에 식 (42)에 주어진 변위는 식 (40)에 주어진 모든 경계조건을 만족한다. 따라서, 식 (41)과 (42)를 식 (35)~(37)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$U_m = V_m = 0 \quad (43)$$

$$\left[D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + H \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] W_m = q_m \quad (44)$$

그러므로 처짐 w 는 다음과 같이 주어지고,

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m}{\left[D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + H \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right]} \\ & \times \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (45) \end{aligned}$$

각 적층에서의 응력과 변위는 식 (45)를 식 (2)~(4) 그리고 식 (20)에 대입하여 구해진다.

4. 원통형 굽힘의 해석결과

본 논문에서 제시된 적층판 이론을 검증하기 위해서 횡방향 하중을 받는 단순지지 적층판의 원통형 굽힘 거동을 해석하고자 한다. 우선 계산에 사용된 직교 이방성 적층의 물성치는 다음과 같이 주어지고

$$E_{11} = 25 \times 10^6 \text{ psi (174.6GPa)}$$

$$E_{22} = E_{33} = 1 \times 10^6 \text{ psi (7GPa)}$$

$$G_{12} = G_{13} = 0.5 \times 10^6 \text{ psi (3.5GPa)}$$

$$G_{23} = 0.2 \times 10^6 \text{ psi (1.4GPa)}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

그리고 횡방향 분포하중 q 는 다음과 같이 가정하였다.

$$q = q_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (46)$$

본 논문에서 제시된 이론은 임의 적층각도를 갖는 적층판에 적용될 수 있기 때문에, 4개의 층

Table 1 Comparison of nondimensional stresses in a [30/-45/60/-25] unsymmetric laminate

l/h	Source	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{zz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{xy}$
4	Pagano ⁽¹³⁾	17.773	3.9297	0.4785	-0.5077	1.7557	-7.0593
	Present	17.574	3.6858	0.4790	-0.5275	1.7526	-7.0660
10	Pagano ⁽¹³⁾	81.261	17.315	0.4645	-1.5616	4.7971	-33.081
	Present	81.368	17.137	0.4641	-1.5713	4.7956	-33.226
20	Pagano ⁽¹³⁾	306.94	64.923	0.4606	-3.2371	9.7380	-125.78
	Present	307.10	64.757	0.4605	-3.2422	9.7373	-125.95
100	Pagano ⁽¹³⁾	7526.6	1588.0	0.4592	-16.379	48.923	-3091.9
	Present	7529.9	1588.1	0.4592	-16.383	48.930	-3092.5

으로 구성된 비대칭 적층판 [30/-45/60/-25]에 대해 해석을 수행하였다. 각 층의 두께는 계산의 편의상 모두 동일하다고 가정하였고, 주어진 적층각도의 배열순서는 Fig. 1에 제시된 것처럼 아래에서 위 방향으로 주어졌다. 이와 같은 원통형 굽힘 문제에 대해 본 논문에서 제시된 이론의 해석결과와 Pagano⁽¹³⁾의 3차원 탄성해를 비교하였다.

적층판의 길이-두께 비 l/h 가 4, 10, 20, 100 인 경우에 대한 응력의 결과가 Table 1에 주어졌다. 표에 주어진 응력은 다음과 같은 식에 의해 무차원으로 표시되었다.

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{xx}(l/2, h/2) \\
 \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{yy}(l/2, h/2) \\
 \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{zz}(l/2, 0) \\
 \bar{\sigma}_{yz} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{yz}(0, h/4) \\
 \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{xz}(0, 0) \\
 \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{xy}(l/2, h/2)
 \end{aligned} \quad (47)$$

본 논문에서 제시된 이론에서는 횡방향 수직응력 σ_{zz} 가 무시되었기 때문에, 식 (1c)에 주어진 평형방정식을 두께방향으로 다음과 같이 적분하여 수직응력 값을 구하였다.

$$\sigma_{zz}(x, z) = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz \quad (48)$$

이 식에서 좌표 y 에 대한 횡방향 전단응력 σ_{yz} 의 편미분 값은 영이기 때문에 제시하지 않았다. 특히, Table 1에 제시된 횡방향 전단응력 σ_{xz} 와 σ_{yz} 는 평형방정식을 적분하여 구한 것이 아니라,

식 (3)에 주어진 구성방정식으로부터 계산되었다. 표에 제시된 것처럼, Pagano의 엄밀해와 비교할 때, 본 논문에서 제시된 이론은 응력을 매우 정확하게 예측하고 있음을 알 수 있다. 길이-두께 비가 10보다 같거나 혹은 클 경우에 대해서도, 응력의 오차는 1퍼센트 미만이고, 더구나 매우 두꺼운 적층판인 $l/h = 4$ 에 대해서도, 구성방정식으로부터 구한 횡방향 전단응력은 매우 정확하게 구해진다.

다음에는 위에 주어진 비대칭 적층에 대해, 적층판의 중앙($x = l/2$)에서 처짐의 길이-두께 비에 대한 변화량이 Fig. 2에 제시되었다. 그리고 길이-두께 비가 4일 때 적층판의 두께방향으로의 평면 변위 및 응력 분포가 Figs. 3~10에 주어졌다. Figs. 3과 4는 평면변위, Figs. 5~10은 수직응력 및 전단응력에 대한 해석 결과를 나타낸다. 변위와 응력은 식 (49)와 같이 무차원 되었다.

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= u(0, z) \frac{E_{22}}{q_1 h}, \quad \bar{v} = v(0, z) \frac{E_{22}}{q_1 h} \\
 \bar{w} &= w(h/2) \frac{100 E_{22} h^3}{q_1 l^4} \\
 \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{xx}(l/2, z) \\
 \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{yy}(l/2, z) \\
 \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{zz}(l/2, z) \\
 \bar{\sigma}_{yz} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{yz}(0, z) \\
 \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{xz}(0, z) \\
 \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{q_1} \sigma_{xy}(l/2, z)
 \end{aligned} \quad (49)$$

그럼에 제시된 것처럼, Pagano의 해와 비교할

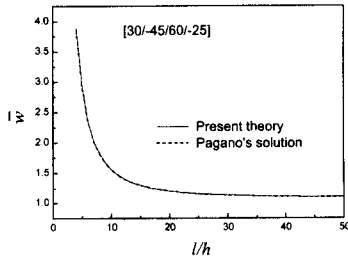


Fig. 2 Nondimensional deflection vs. length-to-thickness ratio

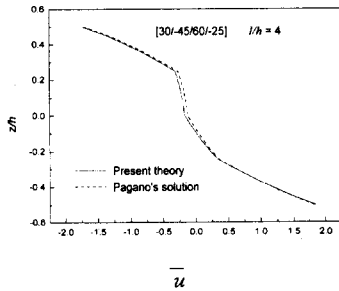


Fig. 3 Variation of nondimensional inplane displacement

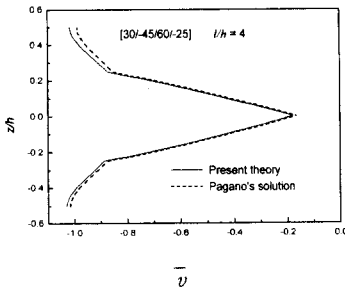


Fig. 4 Variation of nondimensional inplane displacement

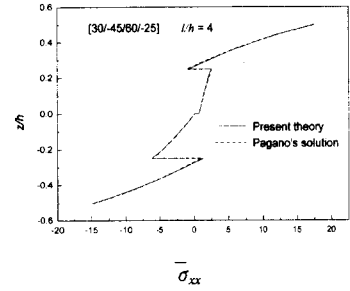


Fig. 5 Variation of nondimensional inplane normal stress

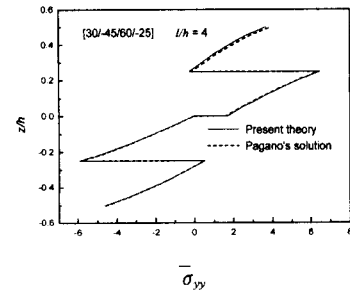


Fig. 6 Variation of nondimensional inplane normal stress

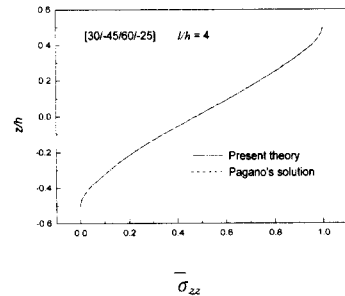


Fig. 7 Variation of nondimensional transverse normal stress

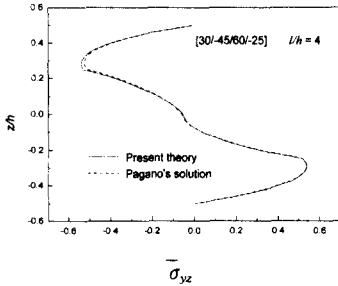


Fig. 8 Variation of nondimensional transverse shear stress

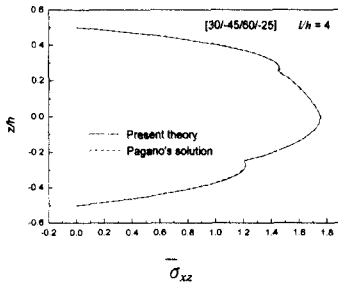


Fig. 9 Variation of nondimensional transverse shear stress

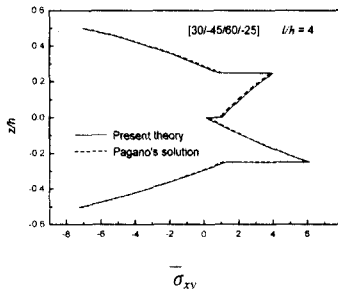


Fig. 10 Variation of nondimensional inplane shear stress

때 처짐은 거의 동일한 것처럼 보이고 응력 역시 매우 잘 일치하고 있다. 또한 Figs. 8과 9에 주어진 횡방향 전단응력이 적층과 적층 사이에서 연속조건을 만족한다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

평면변위가 적층판 두께방향으로 지수 함수적

으로 변화한다는 가정하에 원통형 굽힘에 대한 적층판 이론을 개발하였고, 단순지지된 적층판에 대한 해석해를 구하였다. 본 논문에서 개발된 이론의 정확성을 검증하기 위해서 횡방향 분포하중을 받는, 매우 두꺼운 비대칭 적층에 대한 해석을 수행하여 변위와 응력을 계산한 후, 이 결과를 Pagano의 3차원 탄성해와 비교하였다. 두 이론의 해석결과는 서로 매우 잘 일치하였고, 특히 구성방정식으로부터 계산된 횡방향 전단응력이 Pagano의 해와 비교할 때 매우 정확하게 일치하였고, 또한 평형방정식을 적분하여 구한 두께방향의 수직응력 역시 정확하게 예측되었다. 따라서, 본 논문에서 제시된 이론이 복합재료 적층판의 원통형 굽힘 문제에 대해 면방향의 거동뿐만 아니라 횡방향 전단 변형을 상당히 정확하게 나타낸다고 판단된다. 현재 개발된 적층판 이론이 비록 원통형 문제에 국한되지만, 본 논문에서 제안된 접근방법은 사각 적층판의 굽힘 및 좌굴에 대한 판이론의 개발에 이용될 수 있고, 따라서 굽힘 및 좌굴에 대한 횡방향 전단변형의 영향을 보다 정확하게 예측하는 것이 가능하다고 사료된다.

참고문헌

- (1) Yang, P. C., C. H. Norris and Stavsky, Y., 1966, "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 2, pp. 665~684.
- (2) Whitney, J. M. and Pagano, N. J., 1970, "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates," *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, pp. 1031~1036.
- (3) Whitney, J. M., 1969, "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 534~547.
- (4) Lo, K. H., Christensen, R. M. and Wu, E. M., 1977, "A High-Order Theory of Plate Deformation, Part 2: Laminated Plates," *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44, pp. 669~676.
- (5) Murthy, M. V. V., 1981, "An Improved Transverse Shear Deformation Theory for

- Laminated Anisotropic Plates," NASA Technical Paper 1903.
- (6) Reddy, J. N., 1984, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates," *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 745~752.
- (7) Di Sciuva, M., 1986, "Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Multilayered Orthotropic Plates: An Evaluation of a New Displacement Model," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, pp. 425~442.
- (8) Murakami, H., 1986, "Laminated Composite Plate Theory with Improved In-plane Responses," *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 661~666.
- (9) Toledano, A. and Murakami, H., 1987, "A High-Order Laminated Plate Theory with Improved In-plane Responses," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 23, pp. 111~131.
- (10) Cho, M. and Parmerter, R. R., 1992, "An Efficient Higher-Order Plate Theory for Laminated Composites," *Composite Structures*, Vol. 20, pp. 113~123.
- (11) Cho, M. and Parmerter, R. R., 1993, "Efficient Higher Order Composite Plate Theory for General Lamination Configurations," *AIAA Journal*, Vol. 31, pp. 1299~1306.
- (12) Pagano, N. J., 1969, "Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending," *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 398~411.
- (13) Pagano, N. J., 1969, "Influence of Shear Coupling in Cylindrical Bending of Anisotropic Laminates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, pp. 330~343.