비등온 평판의 이성분 합금 냉각코팅에 관한 수치해석

남 진 현* · 김 찬 중**
(2000년 2월 10일 접수)

A Numerical Analysis on the Freeze Coating of a Non-Isothermal Flat Plate with a Binary Alloy

Jin Hyun Nam and Charn-Jung Kim

Key Words: Solidification(응고), Freeze Coating(냉각코팅), Binary Alloy(이성분 합금), Finite Difference Method(유한차분법)

Abstract

A numerical analysis on the freeze coating process of a non-isothermal finite dimensional plate with a binary alloy is performed to investigate the growth and decay behavior of the solid and the mushy layer of the freeze coat and a complete procedure to calculate the process is obtained in this study. The continuously varying solid and mushy layers are immobilized by a coordinate transform and the resulting governing differential equations are solved by a finite difference technique. To account for the latent heat release and property change during solidification, proper phase change models are adopted. And the convection in the liquid melt is modeled as an appropriate heat transfer boundary condition at the liquid/mushy interface. The present results are compared with analytic solutions derived for the freeze coating of infinite dimensional plates and the discrepancy is found to be less than 0.5 percent in relative magnitude for all simulation cases. In addition the conservation of thermal energy is checked. The results show that the freeze coat grows proportional to the 1/2 square of axial position as predicted by analytic solutions at first. But after the short period of initial growth, the growth rate of the freeze coat gradually decreases and finally the freeze coat starts to decay. The effects of various non-dimensional processing parameters on the behavior of freeze coat are also investigated.

기호설명

C	: 농도
C_p	: 정압비열, J/(kgK)
h_x	: 대류 열전달 계수
H	: 잠열, J/kg
k	: 열전도도, W/(mK)
L	: 평판의 두께의 반, m
Nu_x	: Nusselt 수
Pr	: 액상의 Prandtl 수
T	: 온도, K
U	: 코팅될 물체의 속도
x, y	: 좌표
χ	: 액상분율
δ	: 상경계, m
Δ	: 무차원 상경계
γ	: 액상선의 기울기, Fig. 2
ρ	: 밀도, kg/m^3
θ	: 무차원 온도
ξ, η	: 무차원 좌표

하첨자

0	: 초기성장
1	: 고상/머시 상경계 또는 고상소멸

* 서울대학교 대학원 기계공학과
** 회원, 서울대학교 기계항공공학부
E-mail: kimcj@plaza.snu.ac.kr
TEL : (02)880-1662 FAX : (02)883-0179

2	: 액상/머시 상경계 또는 머시소멸
e	: 공융점
eq	: 초기농도에 대한 평형점
r	: 농도 0에 대한 평형점
∞	: 초기 및 액상
w, s, m	: 평판, 고상, 머시 영역

* 첨자가 없는 기호는 액상을 의미한다.

1. 서 론

이동하는 찬 경계로부터의 고상의 성장은 그 문제가 지니는 산업적 유용성으로 인해 많은 연구자들의 관심을 받아왔다. 또한 수학적으로 이 문제가 상경계의 이동에서 기인하는 비선형성을 내포한, 일반화된 스테판 문제(Stefan problem)라는 사실은 학문적 관심을 불러오기도 하였다. 응고에 의한 고상의 성장이라는 이러한 물리적 현상이 적용되는 산업분야에는, 전선이나 금속판의 전기적 절연코팅, 광섬유의 보호코팅, 반도체의 결정성장 및 다양한 연속주조 공정 등이 포함된다. 본 연구에서는 위의 적용분야 중에서 평판에서의 이성분 합금의 냉각코팅을 해석대상으로 선택하였다.

냉각코팅이란 냉각에 의해 액상의 물질을 이동하는 찬 물체의 표면에 고착시키는 공정을 일컫는다. 코팅될 물체는 용탕에 용탕에 투입되기 전에 액상의 융점보다 낮은 온도로 유지되며, 일단 물체가 용탕에 투입되면 물체의 표면으로부터 고상층이 성장하게 된다. 순수물질의 경우 냉각코팅 공정 중에는 고상과 액상을 구별하는 단일한 상경계가 나타난다. 이 상경계는 초기에는 물체의 이동과 함께 성장하나, 물체가 초기의 '차가움'을 소진한 이후부터는 고상층은 재용융에 의해 소멸되기 시작한다. 이성분 합금의 냉각코팅의 경우에는 순수물질과 달리 머시(mushy)라는 새로운 상이 고상과 액상 사이에 존재한다. 여기서 머시는 실제로는 새로운 상(phase)이 아니며 액상과 고상의 공존상태를 지칭하는 개념이다. 따라서 이 경우 고상/머시와 액상/머시 상경계의 두 개의 상경계가 존재하며, 각 상경계의 거동은 순수물질의 경우와 크게 다르지 않다.

물체의 온도가 일정하거나 용탕의 온도가 융점인 경우와 같이, 단순화된 경우의 냉각코팅에 대한 해석해는 많은 연구자들에 의해 연구된 바 있다.[1-3] 그러나 실제 공정은 이러한 등온조건을 만족할 수 없기 때문에, 해석적 또는 수치적 방법을 이용하여 물체 내의 온도분포까지 고려한 접근방법이 개발되어야 한다.

Cheung[4]은 처음으로 코팅될 물체의 온도변화를 고려하여 냉각코팅 공정을 해석하였다. 그는 섭동방법(perturbation method)을 사용하여 냉각코팅의 거동에 대한 접근해를 얻었으며, 해석결과는 고상층이 성장하고 재용융에 의한 소멸하는 거동을 잘 보여주었다. Cheung과 Cha[5]는 물체 내부의 온도분포까지 고려하여 원통형 물체의 냉각코팅 공정을 유한차분법을 사용하여 수치해석하였다. 그들은 좌표변환을 이용하여 해석대상을 고정된 좌표로 변환하여 계산하였으며, 액상에서의 대류의 영향은 적절한 대류 열전달 계수로 대체하였다. 후에 Cheung[6]은 용탕 내에 유동이 존재하는 경우에 대류열전달 계수를 산정하는 방법을 제안하기도 하였다. 최근에 Mahmoud[7]는 같은 공정에 대하여 유한요소법에 기반을 둔 비정상 해석을 수행한 바 있다.

이상의 순수물질과 달리, 이성분 합금의 냉각코팅을 해석하기 위해서는 머시에 대한 고려가 필요하다. 일반적인 상변화 해석에서 머시는 연속체로서 가정되며, 상변화에 수반된 다양한 물리적 현상들은 상변화 모델에 의해 구현된다. Rezaian과 Poulikakos[8]는 등온 평판에서의 이성분 합금의 냉각코팅에 대하여 해석하였는데, 여기서 그들은 액상의 용탕이 평판과 평행하게 흐르는 공정형상을 제안하였다. 이것은 그들이 이러한 공정형상에서 액상의 유동에 의한 결함의 발생률이 최소화될 것으로 예상하였기 때문이었다. 그들의 연구는 Stevens와 Poulikakos[9]에 의하여 평판의 두께가 무한한 경우로 확장되었다. 최근에 Nam 등[10]은 무한히 작은 원통형 물체에서의 이성분 합금의 냉각코팅을 해석한 바 있다.

이전의 연구에서, 냉각코팅의 성장과 소멸 거동에 대한 연구는 순수물질의 경우에 국한되어 수행되었으며, 머시물질의 경우 비교적 간단한 형상과 경계조건에 대해서만 해석적인 연구가 수행되었다. 그러나 실제 공정에의 적용이라는 측면에서는 물체내부의 온도변화까지 고려한 머시물질의 냉각코팅 해석이 필요하며 본 연구에서 이를 다루고자 한다.

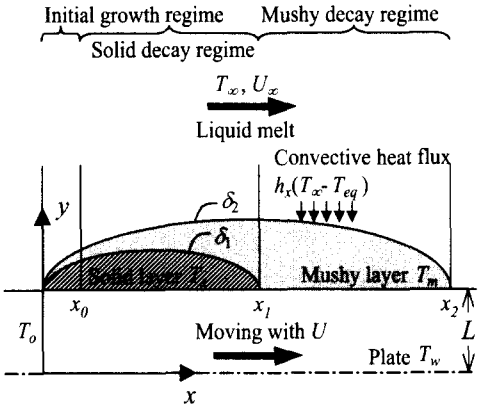

Fig. 1 The schematic of the freeze coating process considered in this study

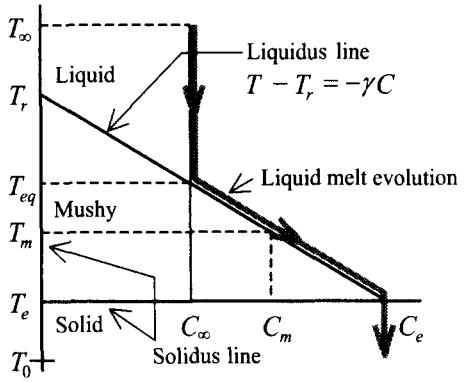

Fig. 2 The idealized equilibrium phase diagram of a binary alloy used in this study

2. 해 석

2.1 해석대상 및 모델

본 연구에서 고려한 냉각코팅 공정의 개략도를 Fig. 1에 도시하였다. 그림에서, 냉각된 평판형 물체가 그와 평행하게 흐르는 용탕 속으로 투입된다. 이때 평판의 온도가 액상 물질의 융점보다 낮기 때문에 투입과 동시에 고상층 및 머시층이 형성되어 성장한다. Fig. 1에서 보여진 각 상경계의 형상은 초기의 성장과 그 후의 소멸의 거동을 나타내고 있다.

본 연구에서는 해석의 편의를 위하여 공정을 초기성장 영역, 고상소멸 영역, 머시소멸 영역의 세 영역으로 구분하였다. 초기성장 영역은 무한 평판에 대하여 유도된 해석해가 유효한 영역을 말한다. 이 영역은 평판/고상의 경계에서의 급격한 온도변화로 인하여 생겨난 열유속파가 미처 평판의 중심선에 도달하지 못한 영역으로, 해석해가 예측하는 바와 같이 계속적으로 성장하게 된다. 두 번째 영역은 고상소멸 영역으로, 고상이 성장하고 소멸하는 영역을 지칭한다. 이 영역에는 고상층과 머시층이 공존하며 따라서 해석에는 평판과 고상층, 머시층의 에너지 보존과 고상/머시와 액상/머시 상경계의 변화가 모두 고려되어야 한다. 마지막으로 머시소멸 영역은 고상층이 완전히 사라지고 머시층만이 남아 서서히 소멸하는 영역이다. 이 영역의 해석에는 평판과 고상의 에너지 보존과 액상/머시 상경계의 변화가 고려되어야 한다.

다음은 문제를 수학적으로 정의하기 위하여 사용한 가정과 머시모델에 대한 정리이다.

1. 공정은 정상상태이다.
2. 물체의 이동방향 전도 열유속은 무시할 수 있다. 이 가정은 대부분의 냉각코팅에서 코팅 및 평판의 두께가 길이에 비해 매우 작기 때문에 적절한 가정이다.
3. 머시층은 평판 및 고상층과 같은 속도로 움직이며 따라서 머시층의 열전달에 있어서 전도가 지배적이다.
4. 액상에서의 대류의 영향은 적절한 대류 열전달 조건에 의하여 대체될 수 있다. 따라서 액상에 대한 수치해석은 본 연구에서 제외한다.
5. 대부분의 합금의 경우 열확산이 종확산에 비하여 매우 빠르므로, 상변화 과정은 열확산에 의해 지배된다.
6. 머시층 내에서는 국소적 열적 평형상태가 존재하며, 따라서 머시의 액상분율은 그 물질의 상평형도로부터 온도의 함수로 계산될 수 있다.
7. 머시의 물성은 고상과 액상의 물성치를 액상분율로 가중 평균한 값이다. 또한 상변화 시의 체적변화는 무시한다.

본 연구에서 사용된 아공융(hypoeutectic) 계의 이성분 합금에 대한 이상화된 상평형도를 Fig. 2에 나타내었다. 액상선과 고상선이 단순히 직선으로 표시되어있지만, 이 상평형도는 다양한 종류의 이성분 합금에 대한 적절한 근사임이 알려져 있다.[11] 머시의 액상분율은 상평형도와 종의 보존을 고려하면 쉽게 얻어질 수 있다.

Fig. 2에는 공정 중의 이성분 합금물질의 상태 변화가 굵은 선으로 표시되어 있다. 초기에 액상은 농도의 변화 없이 냉각지만, 계속하여 온도가 액상의 초기농도에 대응하는 평형온도보다 낮아지면 고상이 석출하게 되고, 이때 배출된 용질에 의해 액상의 농도는 공융농도에 도달할 때까지 증가하게 된다. 이후 더욱 냉각되면 남아있던 액상은 공융반응에 의하여 응고된다.

2.2 지배방정식 및 경계조건

앞 절에서 제시한 가정과 머시모델로부터 평판과 고상층, 머시층의 에너지 보존에 대한 지배방정식과 경계조건, 상경계의 이동에 대한 지배방정식이 유도되었다. 본 연구에서는 공정을 세 영역으로 구분하였으므로, 각각의 영역에 대하여 서로 다른 수학적 공식화가 필요하다. 여기서는 고상소멸 영역에 대한 지배방정식을 중점적으로 설명하고, 나머지 영역에 대한 해설은 뒤로 미루기로 한다.

고상소멸 영역은 Fig. 1에서 보여지듯이 고상이 존재하는 $x_0 < x < x_1$의 범위가 된다. 이 영역의 경우 평판, 고상층 및 머시층 간의 상호작용을 모두 고려하여야 하며, 지배방정식을 정리하면 다음과 같다.

고상소멸영역 ($x_0 < x < x_1$)

평판 ($0 \le y \le L$)

$$\rho_w C_{pw} U \frac{\partial T_w}{\partial x} = k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$y=0: \frac{\partial T_w}{\partial y} = 0 \tag{2a}$$

$$y=L: T_w = T_s,\ k_w \frac{\partial T_w}{\partial y} = k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \tag{2b}$$

고상층 ($L \le y \le \delta_1$)

$$\rho C_{ps} U \frac{\partial T_s}{\partial x} = k_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$y=L: T_s = T_w,\ k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \tag{4a}$$

$$y=\delta_1: T_s = T_e,\quad k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} - k_m \frac{\partial T_m}{\partial y} = \rho U H \chi \frac{d\delta_1}{dx} \tag{4b}$$

머시층 ($\delta_1 \le y \le \delta_2$)

$$\rho C_{pm} U \frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k_m \frac{\partial T_m}{\partial y}\right) - \rho U H \frac{\partial \chi}{\partial x} \tag{5}$$

$$y=\delta_1: T_m = T_e,\quad k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} - k_m \frac{\partial T_m}{\partial y} = \rho U H \chi \frac{d\delta_1}{dx} \tag{6a}$$

$$y=\delta_2: T_m = T_{eq},\ k_m \frac{\partial T_m}{\partial y} = h_x (T_\infty - T_{eq}) \tag{6b}$$

위의 식 (4b)와 (6b)는 각각 고상/머시와 액상/머시 상경계에서의 경계조건으로 각 상경계의 이동에 대한 관계식으로 사용된다. 또, 머시층의 지배방정식인 식 (5)의 마지막 항은 상변화에 의한 잠열의 영향을 나타내는 항이다. 머시층의 지배방정식은 머시의 물성으로 표현되어 있는데, 본 연구에서 사용한 머시모델은 다음의 식 (7)과 같이 물성을 액상분율의 함수로 가정한다.

$$\begin{aligned} k_m &= \chi k + (1-\chi) k_s \\ \rho C_{pm} &= \chi \rho C_p + (1-\chi) \rho C_{ps} \end{aligned} \tag{7}$$

고상성장 영역에 대한 지배방정식인 식 (1)~(7)은 다음의 몇 가지 점에서 불완전하다. 그 첫 번째는 초기조건이 주어지지 않은 점이다. 이 문제는 초기성장 영역에 대한 해석해를 이용하여 해결할 수 있다. 앞서 말했듯이 초기성장 영역의 경우 해석해가 존재하며, 따라서 이 영역에 대한 수치해석은 사실상 필요하지 않다. 본 연구는 이러한 사실을 고려하여 초기성장 영역에 대하여 해석해의 결과만을 이용하는 접근방법을 택하며, 적절한 초기조건을 해석해로부터 얻는다.

두 번째 불완전성은 액상의 대류효과를 나타내는 대류 열전달 계수가 정의되어 있지 않다는 점이다. 선택할 수 있는 첫 번째 가능성은 일정한 속도로 이동하는 평판에서의 대류 열전달 계수를 사용하는 것이다. 이러한 접근은 이전의 연구자들에 의해 사용되기도 하였다.[6,7] 그러나 실제 공정의 경우 상경계의 형상은 편평하지 않으며, 이러한 이유로 액상/코팅층 경계에서의 열전달 계수는 평판의 경우와 다르다. 다행히 무한평판의 냉각코팅에 대한 해석해로부터 대류 열전달 계수를 추출하는 것이 가능하며, 본 연구에서는 이 값을 사용한다.

마지막으로 고상소멸 영역의 범위에 대한 언급이 빠져있는데, 올바른 해석을 위해서는 영역의 하한인 x_0와 상한인 x_1의 선택이 중요하다. 본

연구에서는 x_0를 해석해가 적용될 수 있는 충분히 작은 값으로 선택하였다. 또한 x_1은 고상층의 두께가 평판의 두께에 비해 무시할 만큼 충분히 작아지는 지점으로 선택하였다.

초기성장영역 ($0 < x < x_0$)

앞서 말한 바와 같이 이 영역에 대한 해석은 Stevens와 Poulikakos[9]의 해석적 접근방법을 통해 수행되며, 이 과정에서 초기조건과 대류 열전달 계수를 추출한다.

머시소멸영역 ($x_1 < x < x_2$)

머시소멸 영역에서 일어나는 물리적 현상은 고상층이 존재하지 않는다는 사실을 제외하고는 고상소멸 영역과 비교하여 거의 동일하다. 따라서, 고상층에 대한 에너지 보존과 고상/머시 상경계의 이동에 대한 관계식만을 고려하지 않으면 된다. 이에 덧붙여 머시층이 평판과 직접 접촉하게 되므로 평판/머시층 경계에서의 경계조건이 필요하게 된다. 즉, 식 (2b)와 (6a)의 경계조건은 다음의 식 (8)로 교체되어야 한다.

$$y=L:\ T_w=T_m,\ k_w\frac{\partial T_w}{\partial y}=k_m\frac{\partial T_m}{\partial y} \tag{8}$$

2.3 좌표변환 및 무차원화

앞 절에서 유도된 지배방정식과 경계조건은 다음의 무차원 좌표와 변수를 통하여 무차원화 되었다. 이 과정에서 계속적으로 변화하는 고상층 및 머시층은 고정된 계산영역으로 변환되었다. 다음에 본 연구에서 사용한 무차원 좌표와 변수를 나타내었다.

$$\xi=\frac{Ux}{a} \tag{9}$$

$$\Delta_1=\frac{\delta_1-L}{L},\ \Delta_2=\frac{\delta_2-L}{L} \tag{10}$$

식 (9)는 x-방향 무차원 좌표를 나타내며, 식 (10)은 무차원화 된 상경계의 위치 혹은 코팅 두께를 의미한다. 다음의 식 (11)은 평판, 고상층, 머시층 각각의 y-방향 좌표에 대한 무차원 좌표 변환식이다.

$$\eta=\frac{y}{L}\ \text{평판} \tag{11a}$$

$$\eta=\frac{(y/L)-1}{\Delta_1}\ \text{고상층} \tag{11b}$$

$$\eta=\frac{[(y/L)-1]-\Delta_1}{\Delta_2-\Delta_1}\ \text{머시층} \tag{11c}$$

위의 무차원 좌표와 함께 각각의 상에서의 온도는 다음과 같이 무차원화 되었다.

$$\theta_w=\frac{T_w-T_0}{T_e-T_0},\ \theta_s=\frac{T_s-T_0}{T_e-T_0},\ \theta_m=\frac{T_m-T_r}{T_e-T_r} \tag{12}$$

위의 무차원 좌표 및 온도를 이용하여 고상소멸 영역의 지배방정식과 경계조건을 무차원화면 다음과 같다.

고상소멸영역

평판 ($0\le\eta\le1$)

$$\frac{\partial^2\theta_w}{\partial\eta^2}=Pe^2D\frac{\partial\theta_w}{\partial\xi} \tag{13}$$

$$\eta=0:\ \frac{\partial\theta_w}{\partial\eta}=0 \tag{14a}$$

$$\eta=1:\ \theta_w=\theta_s,\ \frac{\partial\theta_w}{\partial\eta}=\frac{Q}{\Delta_1}\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta} \tag{14a}$$

고상층 ($0\le\eta\le1$)

$$\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\eta^2}=Pe^2A\Delta_1{}^2\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial\xi}-\frac{\eta}{\Delta_1}\frac{\partial\Delta_1}{\partial\xi}\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}\right) \tag{15}$$

$$\eta=0:\ \theta_s=\theta_w,\ \frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}=\frac{\Delta_1}{Q}\frac{\partial\theta_w}{\partial\eta} \tag{16a}$$

$$\eta=1:\ \theta_s=1,\ Pe^2AG\frac{M}{\theta_m}\Delta_1\frac{d\Delta_1}{d\xi}= N\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}+\left[1+(F-1)\frac{M}{\theta_m}\right]\frac{\Delta_1}{\Delta_2-\Delta_1}\frac{\partial\theta_m}{\partial\eta} \tag{16b}$$

머시층 ($0\le\eta\le1$)

$$Pe^2A(\Delta_2-\Delta_1)^2\left(1+(B-1)\frac{M}{\theta_m}+G\frac{M}{\theta_m{}^2}\right)\left\{\frac{\partial\theta_m}{\partial\xi}-\frac{1}{\Delta_2-\Delta_1}\left[\frac{d\Delta_1}{d\xi}+\eta\left(\frac{d\Delta_2}{d\xi}-\frac{d\Delta_1}{d\xi}\right)\right]\frac{\partial\theta_m}{\partial\eta}\right\} =\left[1+(F-1)\frac{M}{\theta_m}\right]\frac{\partial^2\theta_m}{\partial\eta^2}-(F-1)\frac{M}{\theta_m{}^2}\left(\frac{\partial\theta_m}{\partial\eta}\right)^2 \tag{17}$$

$$\eta=0:\ \theta_m=1,\ Pe^2AG\chi\Delta_1\frac{d\Delta_1}{d\xi}= N\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}+\left[1+(F-1)\frac{M}{\theta_m}\right]\frac{\Delta_1}{\Delta_2-\Delta_1}\frac{\partial\theta_m}{\partial\eta} \tag{18a}$$

$$\eta=1:\theta_m=-R,\ \frac{\partial\theta_m}{\partial\eta}=Nu_x(R-\Theta)(\Delta_2-\Delta_1) \tag{18b}$$

위의 지배방정식에서 나타난 무차원 인수들은 다음의 식 (19)에 정리하였다. 이 무차원 인수들은 Stevens와 Poulikakos[9]의 그것과 동일하게 설정하였다.

$$Pe=\frac{UL}{\alpha},\ D=\frac{\alpha}{\alpha_w},\ Q=\frac{k_s}{k_w},\ A=\frac{\alpha}{\alpha_s},$$
$$F=\frac{k}{k_s},\ G=\frac{H}{C_{ps}(T_r-T_e)},\ N=\frac{T_e-T_0}{T_r-T_e}$$
$$B=\frac{\rho C_p}{\rho C_{ps}},\ R=\frac{T_{eq}-T_r}{T_r-T_e},\ \Theta=\frac{T_\infty-T_r}{T_r-T_e} \tag{19}$$

고상소멸 영역의 지배방정식에는 액상분율의 항이 포함되어 있지 않은데, 이것은 다음의 머시 모델에 의해 액상분율을 머시의 온도로 치환하여 정리하였기 때문이다.

$$\chi=\frac{C_\infty}{C_m}=\frac{M}{\theta_m},\ M=-\frac{\gamma C_\infty}{T_r-T_e} \tag{20}$$

또한 식 (18b)의 Nu_x는 무차원화를 통하여 다음의 식 (21)로 나타내어지며, 평판의 경우 C_{Nu}은 0.53이 된다. 본 연구에서는 C_{Nu}로 해석해로부터 얻어진 값을 사용한다.

$$Nu_x=\frac{h_xL}{k}=C_{Nu}\frac{Pe}{\sqrt{\xi}} \tag{21}$$

머시소멸 영역에서의 지배방정식은 고상소멸 영역의 경우에서와 거의 동일하다. 차이점은 Δ_1이 0이 되어 고상층의 지배방정식이 사라지고, 식 (8)의 무차원 형태인 다음의 식 (22)가 평판/머시층 경계에서의 경계조건으로 필요한 점이다.

$$\eta=0:\theta_w-1=-\frac{1}{N}(T_s-1),$$
$$\frac{\partial T_w}{\partial\eta}=-\frac{Q}{\Delta_2 N}\left(1+(F-1)\frac{M}{\theta_m}\right)\frac{\partial\theta_m}{\partial\eta} \tag{22}$$

2.4 유한차분

위에서 정리된 무차원 지배방정식과 경계조건들은 유한차분법을 이용하여 차분화되었다. 지배방정식의 형태가 포물선형 편미분 방정식이므로, 본 연구에서는 ξ-방향으로 암시적 방법(implicit)을 사용하고, η-방향의 미분은 중심차분법을 사용하여 해석하였다. 다음의 식 (23)은 (i,j)에서의 각각의 미분에 대한 유한차분식이다. 여기서 i는 ξ-방향을, j는 η-방향을 각각 의미한다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}=\frac{\phi_j^i-\phi_j^{i-1}}{\Delta\xi} \tag{23a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=\frac{\phi_{j+1}^i-\phi_{j-1}^i}{2\Delta\eta} \tag{23b}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}=\frac{\phi_{j+1}^i-2\phi_j^i+\phi_{j-1}^i}{(\Delta\eta)^2} \tag{23c}$$

수치해석은 우선 공정에 대응하는 무차원 인수들을 결정하고 Stevens와 Poulikakos[9]의 방법을 사용하여 해석해를 구하는 것으로 시작한다. 이 과정에서 고상소멸 영역의 초기조건과 함께 액상으로부터의 대류 열전달 계수를 계산하는 식 (21)의 상수 C_{Nu}을 얻는다.

고상소멸 영역에 대한 지배방정식과 경계조건은 상경계의 성장 및 소멸에 의한 비선형 항들을 포함하고 있다. 따라서 이러한 비선형 항의 영향으로 반복계산이 필요하게 되는데, 본 연구에서는 상경계의 변화가 주어진 수렴조건을 만족할 때까지 반복치환하는 방법을 사용하였다. 다음의 식 (24)는 반복계산의 수렴판정 조건으로 상대오차가 10^{-6}보다 작아지면 수렴한 것으로 간주하였다. 여기서 ϕ에는 온도와 상경계의 위치가 모두 포함되며, k는 내부 반복계산의 횟수를 지칭한다.

$$\left|\frac{\phi^{k+1}-\phi^k}{\phi^k}\right|<\varepsilon \tag{24}$$

식 (23a)~(23c)에 의해 차분화된 지배방정식은 TDMA 방법에 의해 계산되었으며, 반복계산을 통해 온도가 식 (24)의 수렴조건을 만족하도록 하였다. 또한 식 (18a)와 (18b)에서 보여진 Δ_1과 Δ_2의 이동에 대한 비선형 관계식은 사격방법(Shooting method)과 이분방법(Bisect method)을 결합하여 해를 찾았다.

해석을 위해서는 고상소멸 영역 및 머시소멸 영역의 범위의 결정이 필요한데, 고상소멸 영역의 경우 고상층의 두께가 물체의 크기의 10^{-4} 이하가 되면 계산을 종료하였다. 머시소멸 영역

에 대해서도 머시층의 두께가 앞서의 조건과 동일하게 충분히 작아지면 계산을 종료하였다.

격자계의 구성을 살펴보면, 평판의 경우가 온도변화가 가장 급격하고 또한 실제 물리적 크기가 가장 크므로, $\Delta\eta$를 0.001로 작게 설정하였다. 반면에 고상층 및 머시층의 격자는 $\Delta\eta$를 0.01로 비교적 크게 설정하였다. $\Delta\xi$는 상경계의 변화($d\Delta/d\xi$)가 0.05를 넘지 않도록 프로그램 내에서 자동으로 결정하였으며, 또한 Peclet 수가 1인 경우 $\Delta\xi$는 최대 0.01을 넘지 않도록 하였다.

3. 결 과

본격적인 해석에 앞서 수치해석의 타당성을 검증하기 위하여 기준문제(reference case)에 대하여 해석을 수행하였다. 기준문제의 경우 모든 물성은 평판, 고상 및 머시를 막론하고 액상과 동일하게 설정하였다. 또한 합금의 경우를 가정하여 Prandtl 수를 0.05로 설정하였으며, Peclet 수는 1로 설정하였다. 다음의 Table 1에 기준문제를 정의하기 위하여 사용된 무차원 공정인수를 정리하였다.

Table 1 The non-dimensional control parameters of the reference case which is simulated for the validation purpose of the present numerical analysis

Pe	Pr	A	B	D	F	G	$M,-R$	N	Q	Θ	U_∞/U
1	0.05	1	1	1	1	5	0.5	5	1	1	0

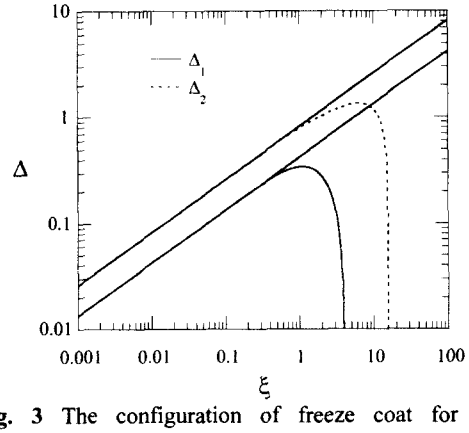

Fig. 3 The configuration of freeze coat for the reference case

Fig. 3는 기준문제에 대하여 코팅층의 성장 및 소멸거동을 나타낸 그림이다. 여기서 직선은 Stevens와 Poulikakos[9]의 무한 평판의 경우에 대한 해석해의 결과로서, 코팅층의 두께가 ξ의 1/2승에 비례하여 증가함을 보여준다. Fig. 3에서 수치해석의 결과가 ξ가 0.4보다 작은 영역에서는 해석해와 잘 일치하는 것으로부터, 이 영역이 초기성장 영역임을 유추할 수 있다. 계속하여 ξ가 0.4 이상이 되면 코팅층은 해석해의 예측으로부터 벗어나기 시작하여 결국 고상층, 머시층의 순서로 소멸된다. 이상의 해석결과에서 초기성장 영역이 매우 짧은 것을 관찰할 수 있으며 수치적 해석의 필요성을 간접적으로 확인할 수 있다.

Fig. 4는 평판의 중심선에서의 온도와 평판/고상 경계의 온도를 해석해와 비교한 그래프로 상경계 위치를 해석해와 비교한 상대오차도 함께 도시하였다. 그림에서 평판 중심선의 온도가 해석해의 예측으로부터 벗어나기 시작하는 지점은 급격한 온도변화로 인한 열유속파가 중심선에 도달하는 시기에 대응된다. 이후, 무한평판의 경우 일정하게 유지되는 평판/고상 경계에서의 온도는, 유한한 크기의 평판에서는 계속적으로 상승하여 공융온도로 접근하게 된다. 이러한 평판/고상 경계에서의 온도상승의 결과로 고상층의 성장은 둔화된다. 그 결과, 고상층의 성장은 해석해가 예측하는 바와는 달라지고 Fig. 4에서 보여진 바와 같이 해석해와 수치해의 상대적 차이는 점점 증가하게 된다.

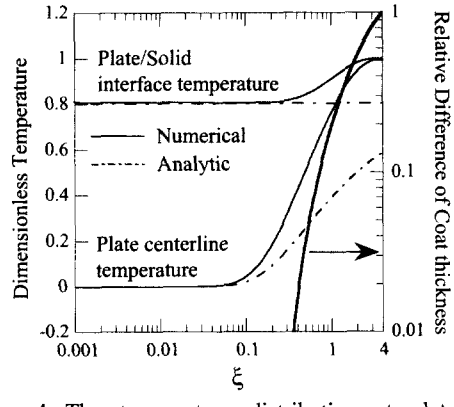

Fig. 4 The temperature distribution at plate/solid interface and centerline of the plate, and the relative difference of solid coat thickness for the reference case

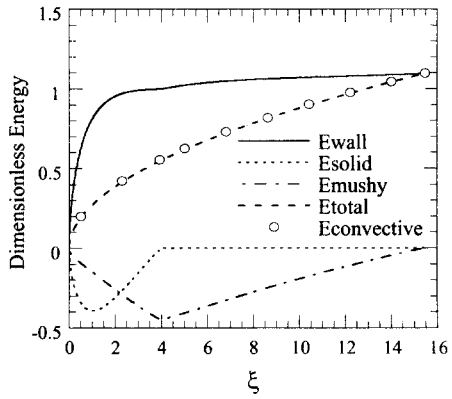

Fig. 5 The comparison of the energy absorbed by each layer and the energy convected from liquid melt for reference case

Fig. 5는 각각의 영역에 저장된 무차원 에너지와 액상으로부터의 열전달량을 비교한 그림이다. 그림에 보여진 각각의 무차원 에너지는 다음의 식 (25a)에서 식 (25c)에 의해 계산되었다.

$$E_{wall}=\int_0^L \frac{\rho_w C_{pw} U(T_w-T_0)}{\rho C_p UL(T_e-T_0)}\,dy \tag{25a}$$

$$E_{solid}=\int_L^{\delta_1} \frac{\rho C_{ps} U(T_s-T_{eq})-\rho UH}{\rho C_p UL(T_e-T_0)}\,dy \tag{25b}$$

$$E_{mushy}=\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\rho C_{pm} U(T_m-T_{eq})+\rho UH(\chi-1)}{\rho C_p UL(T_e-T_0)}\,dy \tag{25c}$$

여기서 무차원 에너지는 실제의 에너지라기보다는 고상층 및 머시층의 경우 같은 높이에서 유입과 유출된 에너지의 변화량을 의미한다. Fig. 5에서 코팅과 평판의 전체 에너지는 액상으로부터의 열전달량과 매우 잘 일치함을 관찰할 수 있으며, 본 해석의 타당성을 확인할 수 있다.

만약 평판의 온도가 코팅이 완전히 소멸되는 지점에서 y-방향으로 일정하다면, 그 소멸 지점은 간단한 에너지 보존으로부터 다음의 식 (26)의 형태로 계산할 수 있다.

$$\sqrt{\xi_2}=\frac{Pe}{2C_{Nu}}\frac{D}{FQ}\frac{N+R+1}{\Theta-R} \tag{26}$$

위의 식에서 ξ_2는 x_2에 대응하는 무차원 좌표이다. 식 (26)을 이용하여 기준문제의 경우 코팅의 소멸위치를 계산하면 $\xi_2=15.88$로 수치해석과 3% 정도의 오차로 예측하게 된다.

Table 2 The definition of numerical cases which are simulated to investigate the effects of non-dimensional control parameters

case no.	change of non-dimensional control parameters from reference case
1	$D\rightarrow 0.5$, $Q\rightarrow 0.5$
2	$D\rightarrow 2$, $Q\rightarrow 0.5$
3	$A\rightarrow 0.5$, $F\rightarrow 0.5$
4	$A\rightarrow 2$, $B\rightarrow 0.5$
5	$-R$, $M\rightarrow 0.75$
6	$G\rightarrow 10$
7	$N\rightarrow 2.5$
8	$\Theta\rightarrow 0$
9	$U_\infty/U\rightarrow 0.5$
10	$Pe\rightarrow 5$

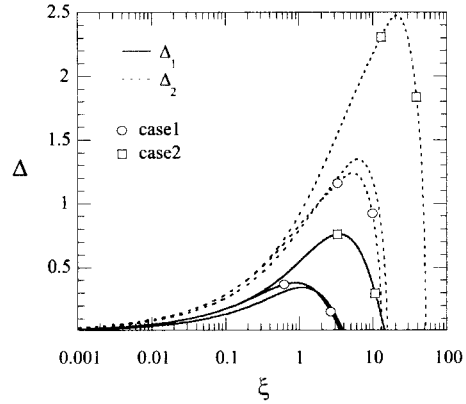

Fig. 6 The configuration of freeze coat for case1 and case2; the effect of plate properties variation

이상의 검증을 통해 수치해석의 타당성에 대해 고찰하였다. 다음으로 공정인수들을 변화시키면서 수치해석을 수행하였는데, 각각의 경우에 대한 문제정의를 Table 2에, 기준문제로부터 공정인수의 변화로 정리하였다.

Fig. 6은 case1과 case2의 경우에 대한 코팅층의 거동을 나타낸 그림이다. case1과 case2는 모두 평판의 물성을 변화시킨 경우로, 각각 평판의 열전도도와 열용량이 기준문제의 두 배인 경우이다. case1의 경우, 열전도도의 증가에 따르는 열전달의 향상으로 기준문제에서 보다 코팅의 성장이 빠르며, 동시에 소멸도 빠르게 된다. case2의 경우에는 평판의 열용량의 증가로 인하여 코팅의 두께가 상당히 증가하는 것이 관찰된다.

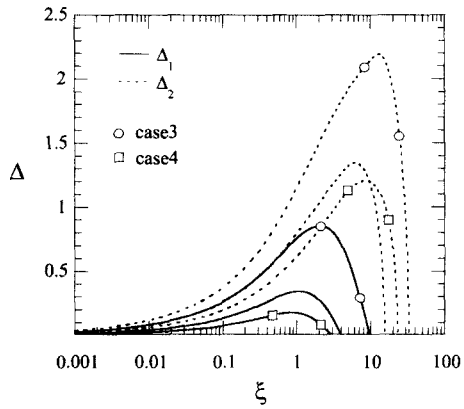

Fig. 7 The configuration of freeze coat for case3 and case4; the effect of solid properties variation

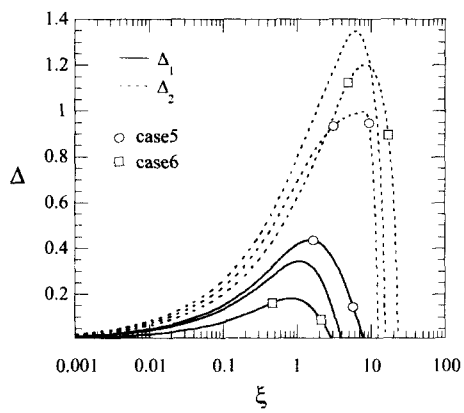

Fig. 8 The configuration of freeze coat for case5 and case6; the effect of phase change characteristics

다음의 Fig. 7은 코팅 물질의 상변화 중의 물성의 변화로 인한 영향을 보여준다. case3과 case4는 각각 고상의 열전도도와 열용량이 액상의 두 배인 경우이다. case3의 경우 기준문제와 비교하여 코팅층의 성장이 가속되는 것은 고상층 내의 열전달이 액상에서 보다 빠르기 때문이다. 결국 상경계의 입장에서는 액상으로부터 유입되는 열전달량보다 고상으로 유출되는 열전달량이 더 크게 되고, 성장이 가속되는 것이다. case4의 경우 고상층의 두께는 기준문제의 약 반정도가 되는데, 이것은 고상층의 열용량이 기준문제의 두 배가 되므로 같은 열전달량에 대하여 더 작은 고상층이 생겨나기 때문이다.

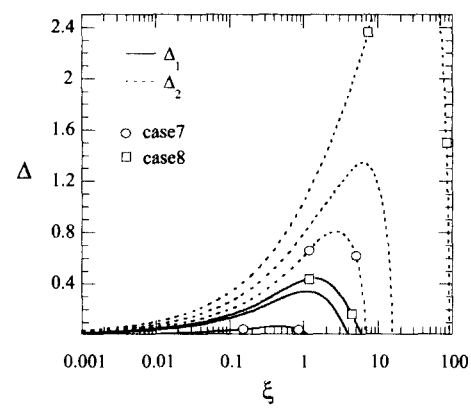

Fig. 9 The configuration of freeze coat for case7 and case8; the effect of processing temperature variation

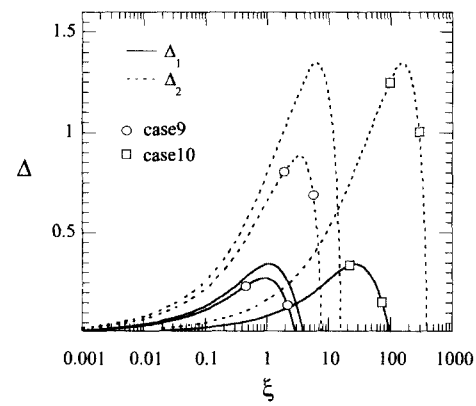

Fig. 10 The configuration of freeze coat for case9 and case10; the effect of process speed and liquid convection

Fig. 8은 상변화 특성에 대한 영향을 나타낸 것으로, case5와 case6은 각각 상평형도에서 머시의 영역이 반으로 작아지는 경우와 잠열이 기준문제의 두 배인 경우에 해당한다. case5의 결과에서 머시층의 두께가 작아짐을 확인할 수 있다. 또한 고상층이 소멸된 이후 급격히 머시층이 소멸하는 경향도 확인할 수 있다. case6의 결과에서 고상층의 두께가 잠열의 증가로 감소함을 관찰할 수 있으며 또한 머시층이 더 오래 유지됨을 관찰할 수 있다.

Fig. 9는 공정의 온도조건이 달라지는 경우의 냉각코팅의 형상을 나타낸 그림이다. case7은 평판의 과냉을 반으로 감소시킨 경우이며, case8은 액상의 과열을 감소시킨 경우이다. 예상한 바와 같이 case7의 결과는 과냉의 감소로 인하여 코팅

층의 성장이 둔화되었음을 보여준다. 반면에 과열이 감소된 case8의 경우 머시층이 더 오래 지속됨을 관찰할 수 있다.

마지막으로 Fig. 10에 액상 내에 존재하는 유동의 영향과 공정의 Peclet 수의 영향을 나타내었다. case9와 액상의 유속이 물체의 이동속도의 반에 해당하는 경우로, 이 경우 뜨거운 용융물의 유입이 커져 코팅층의 성장이 둔화된다. case10은 공정 속도에 관계되는 Peclet 수가 증가한 경우로, 식 (26)에서 예측할 수 있듯이 코팅층이 매우 긴 영역에 걸쳐 유지된다. 그림에서 case10의 결과는 기준문제의 경우의 상경계의 형상을 ξ-축으로 늘여놓은 형태와 같아진다.

4. 결 론

본 연구에서는 비등온 평판에서의 이성분 합금의 냉각코팅 공정을 좌표변환과 유한차분법을 이용하여 수치적으로 해석하였다. 해석에 필요한 초기조건 및 액상의 대류 열전달 조건은 Stevens와 Poulikakos[9]에 의해 제시된 해석적 방법을 사용하여 얻었다. 그 결과 머시물질의 냉각코팅의 해석에 있어서 완결된 형태의 수치해석 절차를 얻을 수 있었다.

위의 해석해는 본 수치해석의 타당성을 검증하는 데 이용되었으며 초기성장 영역에서 일치하는 결과를 얻었다. 또한 추가적으로 최초로 해석해와 벗어나는 지점 및 전체 에너지 보존을 검토하였다.

이어 무차원 공정인수의 변화에 따른 냉각코팅의 형상의 변화를 고찰하였다. 해석결과 Stevens와 Poulikakos[9]의 해석해는 Peclet 수가 작은 경우, 공정의 초기에 국한되어 적용될 수 있음을 확인하였다. 또한 냉각코팅의 머시층은 고상층이 소멸된 이후에도 비교적 긴 영역에서 존재함을 확인할 수 있었다. 공정변수의 영향은 Stevens와 Poulikakos[9] 및 Nam et al.[10]의 해석에서 예측된 경향과 잘 일치함을 확인하였다.

참고문헌

(1) Kuiken, H. K., 1977, Solidification of a Liquid on a Moving Sheet, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 20, pp. 309~314.

(2) Levy, H. L. R. M., Lockyer, A. J. and Arridge, R. G. C., 1978, The Coating of Fibres, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 435~443.

(3) Seeniraj, R. V. and Bose, T. K., 1981, Freeze-Coating on a Continuous Moving Sheet and on an Axially Moving Cylinder, *Warme Stoffubertrag.*, Vol. 15, pp. 239~243.

(4) Cheung, F. B., 1985, Analysis of Freeze Coating on a Nonisothermal Moving Plate by a Perturbation Method, *J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 549~556.

(5) Cheung, F. B. and Cha, S. W., 1987, Finite-Difference Analysis of Growth and Decay of a Freeze Coat on a Continuous Moving Cylinder, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 12, pp. 41~56.

(6) Cheung, F. B., 1990, Solidification on a Chilled Continuous Surface Moving in a Parallel Free Stream, *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 521~523.

(7) Mahmoud, K. G., 1994, Numerical Analysis of Freeze Coating on a Two-Dimensional Moving Plate, *Numer. Heat Transfer, Part A*, Vol. 25, pp. 279~293.

(8) Rezaian, A. and Poulikakos, D., 1991, Heat and Fluid Flow Processes during the Coating of a Moving Surface, *AIAA J. Thermophys.*, Vol. 5, pp. 192~198.

(9) Stevens, R. and Poulikakos, D., 1991, Freeze Coating of a Moving Substrate with a Binary Alloy, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 20, pp. 409~432.

(10) Nam, J. H., Hong, H. and Kim, C.-J., 1999, Freeze Coating of a Cylindrical Object with a Binary Alloy, *Heat Transfer－Asian Research*, Vol. 28, pp. 239~254.

(11) Worster, M. G., 1986, Solidification of an Alloy from a Cooled Boundary, *J. Fluid Mech.*, Vol. 167, pp. 481~501.