

## 멀티레이트 수치적분법을 이용한 유연다물체 동역학해석

김 성 수\* · 김 봉 수\*\*  
(2000년 4월 6일 접수)

### Flexible Multibody Dynamic Analysis Using Multirate Integration Method

Sung-Soo Kim and Bong Soo Kim

**Key Words:** Multirate Integration(멀티레이트 적분법), Multibody Dynamics(다물체 동역학), Nordsieck Form of Integration(노르직 형태의 적분법).

#### Abstract

A Nordsieck form of the multirate integration scheme has been proposed for flexible multibody dynamic systems. It is assumed that vibrational modal coordinates in the equations of motion are treated as fast variables, whereas the relative joint coordinates are treated as slow variables. In the multirate integration, the fast variables are integrated with smaller step-size, and the slow variables are integrated with larger step-size. The proposed multirate integration method is based on the Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector method and implemented in the Nordsieck vector form. The Nordsieck form of multirate integration method provides effective step-size control and at the same time, inherits the efficiency from the Adams integration method. Simulations of a flexible gun and turret system of the military tank have been carried out to show the effectiveness and efficiency of the proposed method.

#### 1. 서 론

우주선의 안테나, 또는 경량화된 고속회전 기계 시스템과 같은 유연다물체 시스템은 유연체가 거대운동과 연성된 진동운동을 하므로, 거대운동을 기술하는 변수와 연성된 진동운동을 기술하는 변형 변수들로 운동방정식이 형성된다. 이러한 변수들은 서로 연성이 되어 있지만 일반적으로 주파수가 서로 다르게 변화하고 있다. 따라서 이러

한 시스템의 해를 구하기 위한 수치적분에서는 빠르게 변하는 변형좌표 변수에 의해서 수치적분 단계의 크기(stepsize)가 매우 작게 결정되므로 효과적인 해를 구하는데 어려움이 있다.

이와 같이 시스템의 변수가 상이한 주파수를 가지고 있는 경우에는 적분단계의 크기(stepsize)를 달리하여 계산하는 멀티레이트 수치 적분방법을 적용하면 효과적이다. 즉 주어진 시스템의 고주파수 변수에 대해서는 작은 크기의 단계를 사용하여 적분하고 저주파수 변수에 대해서는 비교적 큰 크기의 적분단계를 이용하면, 모든 시스템 변수에 대하여 동일하게 작은 크기의 적분단계를 사용하지 않으므로 그 만큼 효율적인 계산을 할 수 있다.

멀티레이트 적분 방법은 Hofer,<sup>(1)</sup> Gear<sup>(2)</sup> 등에 의하여 제안되었고, Srinivasin<sup>(3)</sup>에 의해서 2차원 유연 다물체 시스템에 처음으로 적용되었다. Solis<sup>(4)</sup>

\* 회원, 충남대학교 메카트로닉스공학과

E-mail : sookim@cnu.ac.kr

TEL : (042)821-6872 FAX : (042)823-4919

\*\* 충남대학교 대학원 메카트로닉스공학과

는 비연성된 관성행렬을 갖는 운동방정식으로 표현되는 차량 부분 시스템에 관하여 멀티레이트 적분방법을 적용시켰다. 또한 Kim<sup>(5)</sup>은 시스템변수가 관성행렬로 연성된 시스템에 관하여 비연성 시스템으로 분리시켜 멀티레이트로 적분하는 방법을 제안하고 강체 차량 현가 시스템에 적용하였다.

본 논문에서는 3차원 유연체 시스템의 효율적인 해석을 위해서 Nordsieck 형태의 멀티레이트 수치적분법을 적용하여 효율성을 고찰하고 제한한 방법의 타당성에 관하여 연구하였다. 멀티레이트 적분법을 효과적으로 적용하기 위한 유연다물체 시스템의 운동방정식을 분리하는 방법을 유도하였고, 또한 위 방법에 대한 효율성을 입증하기 위해서 군용전차의 유연체 포신-포탑 시스템을 멀티레이트 적분법을 이용해서 해석하였다.

## 2. 유연체 시스템 운동방정식

### 2.1 모드 좌표계를 이용한 한 개의 유연체 운동방정식

유연체의 운동을 기술하기 위해서는 먼저 좌표계의 설정이 필요하다. Fig. 1은 관성좌표계(inertial frame) X-Y-Z에서의 변형체의 일반좌표를 나타내기 위한 기구학적 관계가 도식적으로 나타나 있다. 위의 그림에서 X-Y-Z 좌표는 관성 좌표계를 나타내고  $x_i-y_i-z_i$  좌표계는 탄성체에 고정된 물체 기준 좌표계(body reference frame)를 나타낸다. 위의 그림에서 실선은 초기의 물체의 위치를 나타내고 점선으로 표시된 것은 변형 후 물체의 위치를 나타낸다. 관성 좌표계에서 변형 후 p점까지의 위치벡터  $r_i^p$ 는 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$\begin{aligned} r_i^p &= r_i + A_i \rho^p \\ &= r_i + A_i (s'^p + u'^p) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $r_i$ 는 관성좌표계에서 물체 기준 좌표계까지의 거리를 나타내는 위치 벡터이고,  $A_i$ 는 물체 기준 좌표계에서 관성 좌표계로의 자세변환

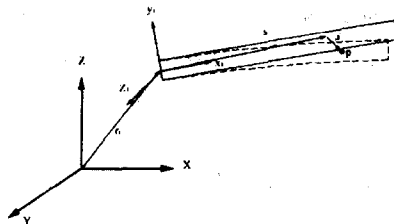


Fig. 1 Generalized coordinate of the ith deformable body

행렬,  $s'^p$ 는 물체기준 좌표계에서 변형 전 p점까지의 위치 벡터이며,  $u'^p$ 는 변형에 의한 변위 벡터를 나타낸다. 이 탄성변위  $u'^p$ 는 Ritz 벡터의 근사화를 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$u'^p = \Psi_i^p a_i \quad (2)$$

또한,  $\Psi_i^p$ 는 유연체 전체의 변위장 모드 중 점 p에 해당하는 병진 모드 형상행렬이며  $a_i$ 는 물체 i의 모드좌표벡터를 나타낸다. 따라서 물체 i의 점 p의 위치벡터는 아래와 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$r^p \equiv r_i + A_i (s'^p + \Psi_i^p a_i) \quad (3)$$

한 개 유연체에 대하여 가상 일의 원리를 적용하여 운동 방정식을 구하면 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \mu \delta r^{pT} \ddot{r}^p d\Omega + \int_{\Omega} \delta r^{pT} f^p d\Omega + \int_{\sigma} \delta r^{pT} T^p d\sigma \\ = \int_{\Omega} \delta \epsilon^{pT} \tau^p d\Omega = \delta W_i \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $\mu$ 는 물체의 밀도,  $\ddot{r}^p$ 는 p점에서의 가속도,  $f^p$ 는 단위 체적 당 작용하는 힘,  $T^p$ 는 단위 면적 당 작용하는 힘,  $\delta r^p$ 는 가상변위,  $\tau^p$ 는 응력 벡터,  $\delta \epsilon^p$ 는 가상 변형률 벡터를 나타낸다. 따라서 식 (1)의 기구학적 정의로부터 가상변위와 속도 가속도를 계산하여 위의 식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$- [\delta r_i^T, \delta \pi_i^T, \delta a_i^T] \left\{ M_i \begin{bmatrix} \ddot{r}_i \\ \dot{\omega}_i \\ \ddot{a}_i \end{bmatrix} + S_i - Q_i \right\} = \delta W_i \quad (5)$$

또한 식 (5)의 우변항의 가상 내부일을 평가하면, 변형률과 변형 변위를 나타내는 모드좌표와의 관계와, 선형적인 훅의 법칙(Hooke's law)을 사용하여 다음과 같이 나타내어질 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{\Omega} \delta \epsilon^P \tau^P d\Omega \\ &= [\delta \mathbf{r}_i^T, \delta \boldsymbol{\pi}_i^T, \delta \mathbf{a}_i^T] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i \end{bmatrix} \\ &= [\delta \mathbf{r}_i^T, \delta \boldsymbol{\pi}_i^T, \delta \mathbf{a}_i^T] \mathbf{U}_i(\mathbf{a}_i) \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 여기서 유도된 가상 일에 대한 식을 식 (5)에 대입하면 물체 i의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[\delta \mathbf{r}_i^T, \delta \boldsymbol{\pi}_i^T, \delta \mathbf{a}_i^T] \left\{ \mathbf{M}_i \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \\ \mathbf{a}_i \end{bmatrix} + \mathbf{S}_i - \mathbf{Q}_i + \mathbf{U}_i(\mathbf{a}_i) \right\} = 0 \quad (7)$$

2.2 순환공식을 이용한 시스템 운동방정식

유연다물체 시스템은 탄성체와 강체들의 기구적인 결합에 의해서 구성되므로 본 절에서는 순환공식에 의한 시스템 운동방정식이 유도된다. Fig. 2는 물체 i와 물체 j로 구성된 탄성체 시스템을 나타내고 있다. 여기서, F는 관성좌표계를 나타내고, F'은 변형전 물체기준좌표계를 나타내고 있다. 또한 F''은 조인트를 정의하기 위해 물체에 고정된 조인트 좌표계이며, F'''는 물체에 고정된 조인트 좌표계로서 변형이전에는 F'에 평행하고, 변형후는 변형에 의한 변위 및 회전을 고려할 수 있는 좌표계를 나타낸다. 물체 j의 자세행렬은 좌표변환에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_i \mathbf{B}_{ij}(\mathbf{a}_i) \mathbf{C}_{ij} \mathbf{D}_{ij}(q_{ij}) \mathbf{C}_{ji}^T \mathbf{B}_{ji}^T(\mathbf{a}_j) \quad (8)$$

여기서 A는 관성좌표계에 대한 F' 좌표계의 자세변환행렬을 나타내고, B는 F'''좌표계에서 F'좌표계로의 자세변환행렬이고, C는 F'' 좌표계에서 F''' 좌표계로의 자세변환 행렬이다.

물체 j의 기준좌표계의 위치는 Fig. 2로부터 물체 i의 외향 조인트의 위치와 두물체 사이의 거리 그리고 물체내의 탄성 변형변위로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

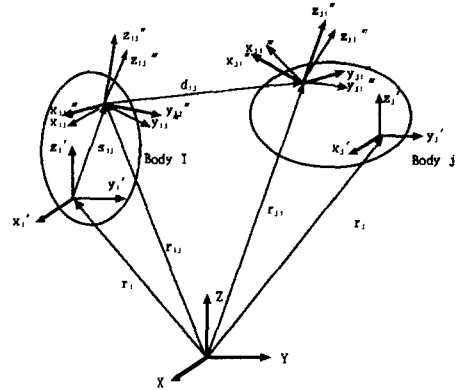


Fig. 2 Adjacent Flexible Bodies

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_i(\mathbf{s}'_{ij} + \mathbf{u}'_{ij}) + \mathbf{d}_{ij}(\mathbf{A}_{ij}, q_{ij}) - \mathbf{A}_j(\mathbf{s}'_{ji} + \mathbf{u}'_{ji}) \quad (9)$$

순환공식에서, 보다 효율적으로 기구학적인 관계를 정의하기 위해서, 물체의 속도 상태를 나타낼 수 있는 상태벡터(state vector)를 직교좌표 속도 벡터인  $\mathbf{Y}_i = [\dot{\mathbf{r}}_i \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i]^T$ 로부터 다음과 같이 정의한다.

$$\widehat{\mathbf{Y}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widetilde{\mathbf{r}}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{bmatrix} \equiv \mathbf{T}_i \mathbf{Y}_i \quad (10)$$

이러한 상태 벡터를 이용하여, 물체 j와 물체 i 사이의 속도에 관한 기구학적인 관계를 정의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\widehat{\mathbf{Y}}_j = \widehat{\mathbf{Y}}_i + \mathbf{A}_{ij} \dot{\mathbf{a}}_i + \mathbf{B}_{ij} \dot{q}_{ij} - \mathbf{A}_{ji} \dot{\mathbf{a}}_j \quad (11)$$

여기서,

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{r}}_{ji} \mathbf{H}_{ij} + \frac{\partial \mathbf{d}_{ij}}{\partial q_{ij}} \\ \mathbf{H}_{ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \boldsymbol{\Psi}_{ij}^y + \widetilde{\mathbf{r}}_{ij} \mathbf{A}_i \boldsymbol{\Psi}_{ij}^y \\ \mathbf{A}_i \boldsymbol{\Psi}_{ij}^y \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

그리고,  $\boldsymbol{\Psi}_{ij}^y$ 는 물체 i에 위치한 점 P<sub>ij</sub>의 병진에 관한 모드행렬이고,  $\boldsymbol{\Psi}_{ij}^y$ 는 회전에 관한 모드행렬이다. 위의 상태 속도 관계식으로부터 상태 가상 변위와 직교 좌표계에서의 가상 변위는 다음과 같이 구해진다.

$$\delta \widehat{\mathbf{Z}}_j = \delta \widehat{\mathbf{Z}}_i + \mathbf{A}_{ij} \delta \mathbf{a}_i + \mathbf{B}_{ij} \delta q_{ij} - \mathbf{A}_{ji} \delta \mathbf{a}_j \quad (12)$$

$$\delta \widehat{\mathbf{Z}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widetilde{\mathbf{r}}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_i \\ \delta \boldsymbol{\pi}_i \end{bmatrix} \equiv \mathbf{T}_i \delta \mathbf{Z}_i \quad (13)$$

또한 식 (11)과 (10)을 미분하면 다음과 같이 상태 가속도 벡터와 직교좌표의 가속도벡터의 관계를 얻을 수 있다.

$$\dot{\hat{Y}}_j = \hat{Y}_j + \mathcal{E}_{\dot{y}} + \Lambda_{\dot{y}} \dot{\bar{a}}_i + D_{\dot{y}} + B_{\dot{y}} \dot{\bar{q}}_i - \mathcal{E}_{\dot{y}} - \Lambda_{\dot{y}} \dot{\bar{a}}_i \quad (14)$$

$$\dot{Y}_i = T_i^{-1} \dot{\hat{Y}}_i + \dot{T}_i^{-1} \hat{Y}_i \quad (15)$$

여기서,  $D_{\dot{y}} = \dot{B}_{\dot{y}} \dot{\bar{q}}_i$ ,  $\mathcal{E}_{\dot{y}} = \dot{\Lambda}_{\dot{y}} \dot{\bar{a}}_i$ 이다. 따라서 식 (8), (9), (11), (14)에 의하여 각 물체의 자세와 위치, 속도와 가속도를 첫 번째 물체부터 시작하여 순환적으로 구할 수 있다.<sup>(7,8)</sup>

식 (7)에 나타난 유연체의 가상 일에 의한 직교좌표의 운동방정식(Variational Cartesian equation of motion)을 식 (13)과 (15)를 이용하여 직교좌표 공간(Cartesian space)으로부터 상태 공간(state vector space)으로 바꾸어서 표현하면 다음과 같다.

$$[\delta \dot{Z}_i^T, \delta \dot{\bar{a}}_i^T] \left\{ \bar{M}_i \begin{bmatrix} \dot{\hat{Y}}_i \\ \dot{\bar{a}}_i \end{bmatrix} - \bar{Q}_i \right\} = 0 \quad (16)$$

여기서,

$$\bar{M}_i = \begin{bmatrix} T_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T M_i \begin{bmatrix} T_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_i^{mm} & \bar{M}_i^{ma} \\ \bar{M}_i^{ma} & \bar{M}_i^{aa} \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_i = \begin{bmatrix} T_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \left( M_i \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \end{bmatrix} - S_i - U_i + Q_i \right) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_i^s \\ \bar{Q}_i^a \end{bmatrix}$$

이다.

위의 유연체 운동방정식을 n+1개의 순차적으로 연결된 유연 다물체 시스템에 적용하여 가상 일에 의한 운동방정식을 더하면 전체 시스템에서의 운동 방정식을 가상 일의 형태로 식 (17)과 같이 유도할 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$\sum_0^N \left\{ \delta \dot{Z}_i^T (\bar{M}_i^{mm} \dot{Y}_i + \bar{M}_i^{ma} \dot{\bar{a}}_i - \bar{Q}_i^s) + \delta \dot{\bar{a}}_i^T (\bar{M}_i^{am} \dot{Y}_i + \bar{M}_i^{aa} \dot{\bar{a}}_i - \bar{Q}_i^a) \right\} = 0 \quad (17)$$

따라서 위의 식을 식 (12)와 (14)를 이용하여 말단 물체로부터 첫 번째 물체까지 역순환적으로 대입하여 정리하면 조인트 좌표계와 변형 모드 좌표계에 관한 시스템 운동방정식 (18)을 얻을 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$M \dot{\bar{q}} = P \quad (18)$$

$$\text{여기서, } M = \begin{bmatrix} M^{aa} & M^{a\alpha} & M^{\alpha y} \\ & M^{\alpha a} & M^{\alpha y} \\ \text{symm} & & M^{\alpha y} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P^{a^T} \\ P^{\alpha^T} \\ P^{y^T} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{a}}^T \\ \dot{\bar{q}}^T \\ \dot{\hat{Y}}_o^T \end{bmatrix} \text{이고, 첨자 } a \text{는 변형 모드 좌표}$$

계에 관한 항, 첨자 q는 조인트 좌표계에 관한 항, 첨자 y는 첫 번째 물체의 직교 좌표계에서 표시된 항을 말한다.

### 3. 멀티레이트(Multirate) 수치적분 방법

#### 3.1 Nordsieck 형태의 일정 단계의 크기를 갖는 Adams 예측자-수정자 적분 방법

시변수(時變數) t, 상태 변수 x, 그리고 초기값을 갖는, 아래와 같은 1계 상미분 방정식을 풀기 위해서

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0 \quad (19)$$

일정한 단계의 크기(stepsize)를 갖는 Adams 예측자-수정자 적분법<sup>(9)</sup>은 다음의 행렬식으로 주어질 수 있다.

$$x_{n,(0)} = Bx_{n-1} \quad (20)$$

$$x_{n,(m+1)} = x_{n,(m)} + cG(x_{n,(m)}), m \geq 1 \quad (21)$$

여기서 식 (20)은 3차 Adams-Bashforth 예측자(predictor) 공식을 나타내고 식 (21)은 그에 상응하는 Adams-Moulton 수정자(corrector) 공식을 나타낸다. 위의 공식에서 변수벡터들은 다음과 같이 주어진다.

$$x_{n,(0)} = [x_{n,(0)}, hx_{n,(0)}, hx_{n-1}, hx_{n-2}]^T \quad (22)$$

$$x_{n-1} = [x_{n-1}, hx_{n-1}, hx_{n-2}, hx_{n-3}]^T \quad (23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{23}{12} & -\frac{16}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$c = \left[ \frac{3}{8}, 1, 0, 0 \right]^T \quad (25)$$

$$G(x_{n,(m)}) = hf(x_{n,(m)}, t_n) - (3hx_{n-1} - 3hx_{n-2} + hx_{n-3}) \quad (26)$$

그리고 일정한 단계의 크기를 갖는 Nordsieck 형태의 3차(3rd order) 예측자 4차(4th order) 수정자 공식은 아래의 변환 관계를 식 (20)과 식 (21)의 Adams 공식에 대입하여 얻어질 수 있다.

$$a_{n,(0)} = Tx_{n,(0)} \quad (27)$$

여기서

$$a_{n,(0)} = [x_{n,(0)}, hx_{n,(0)}, \frac{h^2}{2!} \ddot{x}_n, \frac{h^3}{3!} \dot{\ddot{x}}_n] \quad (28)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (29)$$

이다. 따라서 3차(3rd order) Nordsieck 형태의 예측자 공식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$a_{n,(0)} = Aa_{n-1} \quad (30)$$

여기서,  $A = TBT^{-1}$  이다. 또한 4차(4th order) 수정자 공식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$a_{n,(m+1)} = a_{n,(m)} + lF(a_{n,(m)}), m \geq 0 \quad (31)$$

여기서  $l = TC$  이며, 함수  $F$ 는 다음과 같이 된다.

$$F(a_{n,(m)}) = G(T^{-1}x_{n,(m)}) = hf(x_{n,(m)}, t_n) - h(\dot{x}_{n-1} + h\ddot{x}_{n-1} + \frac{h^2}{2!} \dot{\ddot{x}}_{n-1}) \quad (32)$$

여기서, 식 (28) Nordsieck vector를 식 (22)와 비교하면, 일단계의 적분 방법과 같이 변환되어, 일 단계 적분 방법의 장점인 이전의 여러단계의 데이터에 의존하지 않는 장점과 이것에 의해서 적분단계크기의 조절이 용이한 것을 알 수 있다.

3.2 Nordsieck 형태의 Adams 멀티레이트 적분법

서로 다른 주파수 성분을 가지고 있는 시스템

의 운동방정식은 일반적으로 식 (33)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m_{ss} & m_{sf} \\ m_{fs} & m_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_s \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^s(q_s, q_f, \dot{q}_s, \dot{q}_f, t) \\ g^f(q_s, q_f, \dot{q}_s, \dot{q}_f, t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

여기서 밀침자  $s$ 는 저주파수,  $f$ 는 고주파수의 변수를 나타내고,  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  은 변위, 속도, 가속도 변수들을 나타낸다. Nordsieck 형태의 멀티레이트 방법을 적용하기 위해서 식 (33)의 관성력 항을 오른쪽으로 이항함으로써 식 (34)와 같이 비연성(decoupled)된 식으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m_{ss} & 0 \\ 0 & m_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_s \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^s(q_s, q_f, \dot{q}_s, \dot{q}_f, t) - m_{sf}\ddot{q}_f \\ g^f(q_s, q_f, \dot{q}_s, \dot{q}_f, t) - m_{fs}\ddot{q}_s \end{bmatrix} \quad (34)$$

여기서 식 (34)의 첫 번째식에서 저주파수 변수의 가속도를 계산할 때 우변의 고주파수 변수의 가속도  $\ddot{q}_f$ 를 직접 계산하는 것이 용이하지 않고, 또한 보간법(interpolation)에 의하여 근사적으로 구한 경우는 해의 불안정성을 가져오므로 먼저 식 (34)의 두 번째식을 이용하여 첫 번째식의 우변의  $\ddot{q}_f$ 를 소거하여 정리하고, 일계 미분방정식 형태로 변환하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ x_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ q_s \\ \dot{q}_f \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \frac{g^s(q_s, q_f, \dot{q}_s, \dot{q}_f, t) - \frac{m_{sf}}{m_{ff}} \dot{q}_f}{m_e} \\ \dot{q}_f \\ \frac{g^f(q_s, q_f, \dot{q}_s, \dot{q}_f, t) - m_{fs}\ddot{q}_s}{m_{ff}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s(x_s, x_f, t) \\ F^f(x_s, x_f, x_s, t) \end{bmatrix} \quad (35)$$

여기서  $x_s = [q_s, \dot{q}_s]^T$ ,  $x_f = [q_f, \dot{q}_f]^T$  그리고

$$m_e = m_{ss} - \frac{m_{sf}m_{fs}}{m_{ff}}$$

이다. 위의 방정식에 저주파수 변수에 대해서 큰 단계의 크기를, 고주파수 변수에 대해서 작은 단계의 크기의 멀티레이트 적분법을 적용하면, 다음의 식으로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ x_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s(x_s, x_f, t) \\ F^f(x_s^*, x_f, x_s^*, t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

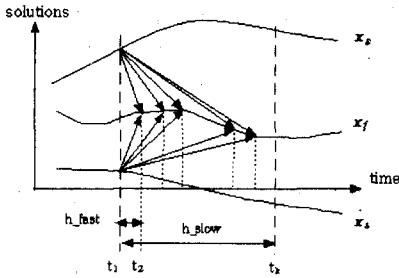


Fig. 3 Schematic diagram of multirate integration

여기서 두 번째 방정식의 우변의 \* 표시의 항은 외삽법(extrapolation method)으로 보간된 값을 나타낸다. Fig. 3은 이러한 값을 계산하는 방법을 나타낸 Nordsieck 형태의 멀티레이트 적분법의 개략적인 그림이다. 그림에 나타난 바와 같이 \$t\_2, t\_3, \dots, t\_{k-1}\$에서 \*로 표시된 저주파수 변수 값들과 도함수들의 근사적인 값들은 식 (37)에 의해서 \$t\_1\$에서의 정보를 사용하므로써 외삽법으로 계산되어진다.

$$a^*_{n, t_i} = A C(\alpha) a_{n, t_1} \quad (37)$$

$$t_i = t_1 + (i-1) * h_{fast}, \quad i = 2, \dots, k-1$$

$$C(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\alpha = (i-1) \frac{h_{fast}}{h_{slow}} \quad (39)$$

또한, 식 (38)에서 보는 바와 같이, 적분 단계의 비를 조절하여 \$x^\*\_s\$와 \$x^\*\_f\$를 쉽게 구할 수 있다.

#### 4. 멀티레이트 수치적분을 이용한 유연 포신 포탑 시스템 해석

제안한 멀티레이트 적분법의 효율성을 고찰하기 위해 Fig. 4과 같은 유연체 포신-포탑 시스템에<sup>(10)</sup> 대하여 운동방정식을 나타내었다. 위의 시스템은 4개의 물체로 구성되어있는 다물체 시스

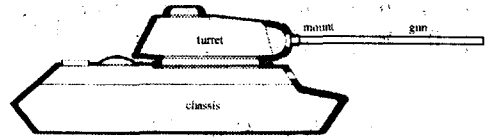


Fig. 4 Gun and turret system of tank

템이다. 기준물체(base body)인 차체(chassis)와 포탑(turret), 그리고 주퇴복좌기 마운트는 강체(rigid body)로 가정하고 포신을 유연체(flexible body)로 가정하여 나타내었다. 그리고 차체와 포탑, 그리고 포탑과 마운트의 연결은 각각 회전 조인트(revolute joint)를 사용하여 포신의 회전과 고저운동이 가능하게 하였다. 그리고 마운트와 포신 사이에는 고정 조인트(bracket joint)를 사용하였다. 그리고 차체는 고정되어 있는 것으로 모델링 하였다. 유연체 포신의 변형을 고려하기 위한 변형 모드로 포신의 상하 방향의 변형을 나타내는 1, 2차 진동 모드와 포신 좌우로 진동을 나타내는 1, 2차 진동 모드로 모두 4개의 진동 모드를 고려하였다. 제안한 멀티레이트 적분법의 효과를 고찰하기 위하여, 다음과 같은 토크를 주어 포탑과 포신을 구동하였다.

$$T_1(t) = -45500 \sin(2\pi t) \quad (40)$$

$$T_2(t) = 17600 \sin(2\pi t) - 33451 \quad (41)$$

첫 번째 토크는 포탑을 좌우로 움직이는 토크이고, 두 번째 토크는 포신을 들어올리는 토크이다.

위의 전차 시스템에 대하여 순환공식에 의한 운동방정식은 식 (18)에서와 마찬가지로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & M_{fs} \\ M_{sf} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_f \\ \bar{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_f \\ Q_s \end{bmatrix} \quad (42)$$

여기서 \$\bar{q}\_f\$는 유연체 포신의 변형 모드좌표계의 가속도를 나타내고 있으며, \$\bar{q}\_s\$는 포신의 고저와 회전을 나타내는 조인트 좌표계와 차체의 직교좌표계의 가속도를 나타낸다. 식 (42)은 멀티레이트 적분방법을 적용하기 위해서 다음과 같은 비연성된 식으로 변형될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & 0 \\ 0 & M_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_f \\ \bar{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_f - M_{fs} \bar{q}_s \\ Q_e \end{bmatrix} \quad (43)$$

여기서  $M_e = M_{ss} - M_{sf} M_{ff}^{-1} M_{fs}$  이고

$Q_e = Q_s - M_{sf} M_{ff}^{-1} Q_f$  이다. 또한 위식을 계산 하는데 진동모드를 사용하므로 모달관성행렬  $M_{ff} = I$  이므로 역행렬계산을 할 필요가 없다.

단지 첫 번째 식의  $\bar{q}_s$ 를 외삽법에 의한 보간을 하여 구해야 한다.

멀티레이트 수치적분을 수행하기 위해서 4개의 진동 모드를 고주파수 변수로 가정하고, 나머지 변수를 저주파수 변수로 가정하였다. 또한 4가지 경우에 대해서 시뮬레이션을 수행하였는데, 첫 번째 경우는 저주파수 변수와 고주파수 변수에 대한 적분단계의 크기를 0.0001(sec)로 동일하게 시뮬레이션 하였고, 두 번째 경우는 저주파수 변수의 적분단계의 크기를 2배, 세 번째 경우는 5배, 4번째 경우는 10배로 하여서 시뮬레이션 하였다. 이때 포신의 끝단의 위치와 속도를 4가지 경우에 모두 시뮬레이션한 결과는 Fig. 5와 Fig. 6에 나타나 있다. 4가지 경우에 대한 위치와 속도의 그래프가 약간의 오차는 보이나 거의 비슷하게 시뮬레이션되는 것을 알 수 있다. 따라서 본 적분방법의 정확성을 확인할 수 있다.

이번에는 4가지 경우에 대한 진동 모드를 그린 그래프를 보면 Fig. 7과 같다. 여기서 크게 사인함수처럼 변하는 모드가 z 방향(수평방향)의 모드이고, 아래쪽 모드가 y 방향(수직방향)의 모드를 나타낸다. 그리고 나머지 모드는 거의 지배적이지 못하다는 것을 알 수 있다. 부과된 토크에

의해서 포신은 진동을 하는 것을 알 수 있고, 4가지 경우에 대해서 z 방향의 모드를 제외하고는 거의 오차가 없는 것을 알 수 있다. z방향의  $1.0 \times 10^{-2}$  정도의 오차는 보간에 기인한 것으로 생각된다.

제안한 멀티레이트 방법의 효율성을 비교하기 위하여 4가지 경우에 대하여 적분시간에 대한 결과를 보면 Table 1과 같다. Table 1은 두 개의 조인트에 부과된 토크에 의해서 0~1초까지의 포신-포탑 시스템을 시뮬레이션 하였을 경우의 해석시간을 각각의 경우에 대해서 조사한 것이다. 위에서 보면 실제 적분단계의 비가 증가하면 증가할수록 적분시간이 단축되는 것을 확인할 수 있다. 특히 4번째 경우에는 70% 정도의 속도향상을 기한 것으로 나타났다. 따라서 멀티레이트 적분방법이 유연 다물체 시스템에 대해서 효율성을 나타냄을 알 수 있었다.

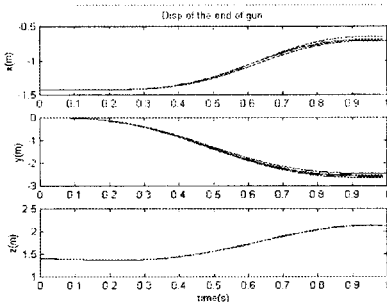


Fig. 5 End Position of the Gun

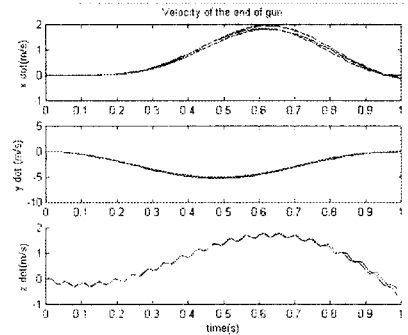


Fig. 6 End Velocity of Gun

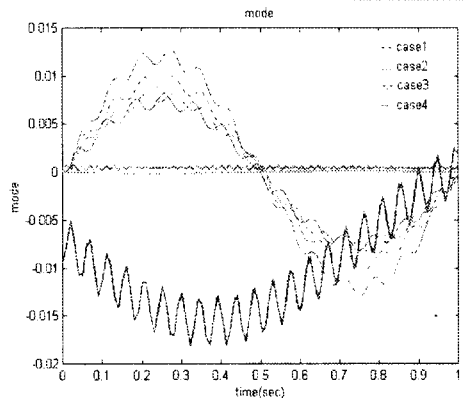


Fig. 7 Whole mode graph of multirate

**Table 1** C.P.U time comparison with various cases

Simul. no	h_fast (sec)	h_slow (sec)	h_ratio	C.P.U time(sec)	speed up
case 1	0.0001	0.0001	1/1	251.06	1
case 2	0.0001	0.0002	1/2	197.34	1.272
case 3	0.0001	0.0005	1/5	162.74	1.546
case 4	0.0001	0.001	1/10	148.90	1.696

6. 결 론

본 논문에서는 Nordsieck 형태의 멀티레이트 적분법을 소개하고, 순환공식에 의한 유연 다물체 동역학 시스템에서 멀티레이트 적분방법을 적용하기 위한 유연체 운동방정식의 조인트 변수와 변형모드변수에 관하여 비연성(decoupling) 시키는 방법을 제안하였다. 제안한 Nordsieck 방법은 일 단계 적분법(one step method)이 가지고 있는 효과적인 적분단계 크기 조절성과 Adams 방법이 가지고 있는 적분의 효율성을 동시에 가지므로 효과적으로 멀티레이트 수치적분을 수행할 수 있다. 유연체 포신-포탑 시스템 시뮬레이션 결과를 통하여 제안한 멀티레이트 적분방법이 70%정도 적분시간을 단축할 수 있음을 알 수 있었다.

참고문헌

(1) Hofer E., 1976, "A Partially Implicit Method for Large Stiff Systems of ODEs with only Few Equations Introducing Small Time-Constants," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 13, No. 5, pp. 645~663.  
 (2) Gear, C. W., 1980, *Automatic Multirate Methods for Ordinary Differential Equations*, Report UIUCDCS-R-80-1000 Information

Processing 80, S.H. Lavington(ed), North-Holland Publishing Company. pp. 717~722.  
 (3) Srinivasin, M., 1982, *Multirate Numerical Integration in Design and Analysis of Flexible Mechanical Systems*, Ph.D. Thesis, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.  
 (4) Dario Solis, 1996, *Multirate Integration Methods for Constrained Mechanical Systems with Interacting Subsystems*, Ph.D. Thesis, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.  
 (5) Kim, S. S. and Freeman, J. S., 1999, "Multirate Integration for Multibody Dynamic Analysis with Decomposed Subsystems," *ASME Design Engineering Technical Conferences*, DETC99/VIB-8252.  
 (6) Wu, S. C., Haug, E. J., and Kim, S. S., 1989, "A Variational Approach to Dynamics of Flexible Multibody Systems," *International Journal of Mechanics of Structures and Machines*, Vol 17(1), pp. 3~32.  
 (7) Lai, H.J. and Haug, E.J., 1989, *A Decoupled Recursive Approach for Flexible Multibody Dynamics and Its Application in Parallel Computation*, Technical Report R-55, Center for Computer Aided Design, University of Iowa, Iowa City.  
 (8) 김성수, 유진영, 김국호, 1998, "유한요소법에 의한 이동질량효과가 포함된 유연 다물체 동역학 시스템," 대한기계학회 논문집 A권, 제 22권 제 11호, pp. 2048~2060.  
 (9) Gear C. W., 1971, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall.  
 (10) 김성수, 유진영, 1997, "유연다물체 동역학을 이용한 포신-포탑시스템의 진동해석," 한국소음진동공학회 제8권 제1호, pp. 203~211.