

볼록형 최적화기법을 이용한 LQ-서보 설계 방법(I) 주파수 영역에서의 접근

정회원 이 응 석*, 서 병 설**

LQ-servo Design Method Using Convex Optimization (I) Frequency Domain Approach

Eung-Suk Lee*, Byung-Suhl Suh** *Regular Members*

요 약

기존의 LQ-서보형 PI 설계방법은 보드선도 상에서 저주파와 고주파 영역에서의 루프전달함수의 특이값 일치에 기인한 설계상의 문제를 가지고 있다. 이러한 점을 해결하기 위해 역 최적제어와 볼록형 최적화기법에 기초한 새로운 설계 방법을 제안하고자 한다.

ABSTRACT

The previous LQ-servo PI design methods have some design problems happened from the frequency matching of the maximum and minimum singular values of loop transfer function at both low and highfrequency regions on the Bode plot. To solve these problems, this paper proposes a new design technique based on the inverse-optimal control and convex optimization.

I. 서론

PID 제어기 설계에 있어 안정도-강인성 보장의 중요성 이외에도 주어진 설계사양을 만족하도록 시스템의 제어기를 조율(tuning)하여 성능-강인성을 확보하도록 하는 문제의 중요성 또한 강조되어지고 있다^{[1],[2]}. PID 제어기 설계 방법에 최적이론의 도입은 일반적으로 제어기의 설계를 난해하게 하고 다변수 시스템에서는 그 어려움이 가중되었다. 이런 어려움을 극복하기 위해서 Athans에 의해 제시되었던 LQ-서보^[3]를 다변수 PI형 제어기로 해석함으로써 새로운 LQ-서보형 PI 제어기를 제안^[4]한 바 있다.

이는 LQR의 특성을 갖고 있기 때문에 안정도-강인성을 확보할 수 있을 뿐만 아니라 기존의 LQ-서

보방법에 보다 융통성 있는 설계를 하여 가중치를 도입함으로써 성능향상을 기할 수 있었다.

LQ-서보형 PI 제어기 설계는 설계가 용이하다는 간편성에도 불구하고 LQG-LTR 방법과 같이 저가 제어(cheap control)로 현실적인 문제점을 야기할 수 있으며, 입력 가중 행렬이 정칙행렬이 되어야만 하는 제한적 요소^[5]를 갖고 있다. 또한 이 제어기 설계시 가중치를 부여하여 제어기 설계의 경직성을 해결하려는 시도는 고주파에서의 성능 향상을 기하기가 사실상 어려웠다^[4]. 이점은 제어기의 설계시 주파수 영역에서 주파수의 극한을 취한 특이값을 일치시키는 기법의 사용에 기인한 것으로 간주된다.

이와 같은 특이값 일치방법에 의존하는 설계방법의 근원적인 문제를 해결하기 위해서 본 논문에서는 종전의 LQ-서보기법의 설계방법의 역으로, 출력 측 루프전달함수(loop transfer function)들의 볼록형

* 삼성 SDI P.D.Ping 근무

** 한양대학교 전자·전기공학부교수

논문번호: 99446-1110, 접수일자: 1999년 11월 10일

※본 논문은 한국과학재단(과제번호:981-1212-036-2)의 연구비 지원에 의한 결과임.

집합(convex set)을 형성하여 주파수 영역에서의 설계장벽에 만족하는 제어이득을 결정하고 이로 인해 잃어버린 LQR 특성 즉, 최적 및 안정도-강인성을 부여하는 새로운 역 최적제어기법을 제안하도록 하겠다.

본 논문의 내용을 간략히 서술하면, 다음 2절에서는 LQ-서보형 PI 제어기를 위한 본 논문과 관련된 기존의 방법들의 소개와 그 문제점을 서술하였다. 3절에서는 설계장벽에 만족하도록 출력측 루프전달함수들을 구축시키기 위해 블록형 집합을 활용하는 기법을 소개하고 이때 잃어버린 LQR 특성을 다시 부여하기 위한 새로운 역 최적기법을 소개한다. 끝으로 4절에서는 예제를 통해 본 논문에서의 설계기법의 유용성을 검토하고, 끝으로 5절에서는 본 논문의 주요 요점과 앞으로 연구되어야 할 방향에 대해 살펴보고자 한다.

II. LQ-서보형 PI 제어기의 기존의 설계 방법

1. LQ-서보형 PI 제어기

LQ-서보형 PI 제어기는 기존의 연구⁴⁾에서도 언급된바 있으나 본 논문의 효율적인 설명과 전개를 위해 간략히 서술하고자 하며, LQ-서보형 PI 제어기라는 명명은 MIT의 Athans에 의해 창출된 LQ-서보 구조가 PI 제어기로 해석되어져 LQ-서보형 PI 제어기의 설계방법은 사실상 LQ-서보 설계 방법과 동일하다는 것이다. 구체적으로 말하면, 적분요소를 포함한 LQ-서보형 구조는 그림 2-1에서 안정도 향상에 관련된 부분적(partial) 상태의 궤환, $x_r(t)$, 에서의 설계 변수 G_r 과 시스템의 성능에 관련되는 부분적 출력의 궤환, $y_p(t)$, 에서의 PI 제어기인 비례 상수 G_y , 적분 상수 G_z 로 간주할 수 있다.

LQ-서보형 PI구조에 대해 알아보면, LQR이 안정도-강인성은 보장하지만 완전한 상태궤환의 문제만을 다룸으로써 성능-강인성에 대한 최적 제어법칙을 수행할 수 없다는 문제를 시스템의 상태 중 일부를 부분적으로 분리해 낸 뒤 즉, $y_p(t)$, 이를 출력으로 궤환시킴으로써 명령추종에 대한 성능과, 외란과 잡음에 대한 강인성을 고려하고자 한 것이다. 또한 시스템의 정상상태오차를 제거하지는 목적으로 시스템의 출력 궤환에 적분기를 추가해 정상상태 오차를 제거하도록 하였다. 따라서 시스템은 출력의 적분이 상태에 추가, $z_p(t)$, 되어지는 덧붙임 상태(augmented state)가 되고, 식 (2-1)과 같은

덧붙임 상태 공간 모델식을 가진다. 또한 제어법칙은 식 (2-2)를 따르며, 식 (2-3)과 같이 쪼개어 그림 2-1과 같다.

상태공간식:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= [y_p(t) \ x_r(t)]^T, \quad x_r(t) \in R^m, \quad y_p(t) \in R^{n-m} \\ \dot{z}_p(t) &= I \cdot y_p(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$x(t) = [z_p(t) \ x_p(t)]^T, \quad x(t) \in R^{n+m}$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$C_p = [I_{m \times m} \ 0_{m \times (n-m)}], \quad D_p = [0_{(n-m) \times m} \ I_{(n-m) \times (n-m)}]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix}, \quad \Phi_p(s) = (sI - A_p)^{-1}$$

$$u(t) = -G \cdot x(t) = -R^{-1} B^T K \cdot x(t) \quad (2-2)$$

$$G = [G_z \ ; \ G_y \ ; \ G_r] \quad (2-3)$$

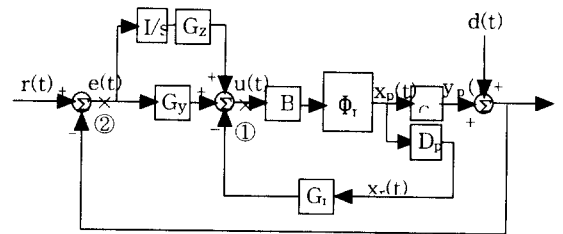


그림 2-1. LQ-서보형 PI 제어기 구조

이제 LQ-서보형 PI는 그림 2-1구조의 ①에서 절단한 입력측 개루프(open loop) 전달함수 $G_{LQ}(s)$ 가 식 (2-4)와 같이 완전한 LQR 문제와 같은 구조로, 안정도-강인성을 이어받으면서 ②에서 절단한 출력측 개루프(open loop) 전달함수인 식 (2-5)를 가지고 루프형상 기법(Loop shaping method)을 활용하여 성능-강인성의 향상에 대한 문제를 다루게 된다.

$$G_{LQ}(s) = G(sI - A)^{-1}B \quad (2-4)$$

$$T(s) = C_p(sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p (G_y + \frac{1}{s} G_z) \quad (2-5)$$

2. 기존의 설계 방법

LQ 서보형 PI 제어기 혹은 LQ-서보의 기존 설계방법은 식 (2-6)을 최소화하는 최적설계변수 Q , R 을 결정하고 Riccati 방정식 식 (2-7)을 풀음으로써 제어이득을 결정하는 것이다. 이 LQR 최적설계 변수를 결정할 때 기존의 설계 방법들은 Q , R 을

용이하게 결정하는 조직적인 방법의 개발을 위해 루프형상 기법을 활용하였다.

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u_p^T(t) \cdot R \cdot u_p(t)] dt$$

$$Q = N^T N, \quad R = \rho I \tag{2-6}$$

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1}B^T K = 0 \tag{2-7}$$

그리고 기존의 설계 방법은 루프형상 기법의 활용시 식 (2-4)의 입력측 루프전달함수를 사용하였던 경우, 또는 식 (2-5)의 출력측 루프전달함수를 사용하였던 경우, 마지막으로 출력측 루프전달함수로 사용하며 설계 변수 선정시 가중치를 도입하는 경우로 크게 3가지의 방법으로 나눌 수 있다. 이제부터는 각각의 방법들에 대해 간단히 살펴보고 그 문제점에 대해 논해보고자 한다.

2-1. Athans의 특이값 일치방법

Athans은 LQR 문제에서 Q, R의 선정의 어려움을 개선시키기 위해 최소 특이값과 최대 특이값을 저주파와 고주파 부분에서 일치시킴(mathcing)^[3]으로 해서 설계 변수 Q를 결정하도록 하고 또한 남겨진 또 하나의 설계변수 R = ρI를 변화시킴으로 전체적인 특이값 형상을 위, 아래로 조정하여 원하는 설계 성능을 만족시키려고 노력하였다. Athans이 제시한 ρ 값의 선정은 특이값이 1이 되는 교차주파수 ω_c가 설계 성능인 외란 장벽의 경계값 Ω_d과 센서잡음 장벽의 경계값 Ω_n 사이에 놓이도록 식 (2-8)에 만족되는 값을 선택함으로써 얻어질 수 있게 하였다.

$$\frac{1}{\Omega_n^2} < \rho < \frac{1}{\Omega_d^2} \tag{2-8}$$

이와 같은 특이값 일치 방법은 LQ-서보 시스템의 설계를 용이하게 하는 조직적인 방법을 제시하였지만 식 (2-4)의 입력측 루프전달함수 G_{LQ}(s)을 고려함으로써 사실상 성능-강인성을 논할 수는 없다. 이 G_{LQ}(s)의 사용을 통한 시뮬레이션 결과들이 유용하게 이용될 수 있다고 가정하여도 설계장벽의 침범이 발생한 경우에는 이를 피하기 위해 결정되어진 제어기 설계파라미터들을 조정할 방법이 ρ를 통해 특이값 형상을 위, 아래로 조정하는 방법밖에 없다는 경직성의 문제가 발생한다. 즉, 특이값 형상을 위, 아래로 조정한다고 해서 설계장벽의 침범을 피할 수 없는 경우가 발생할 수 있고, 또한 고주파

에서는 극한상황에서 고려하였기 때문에 특이값 형상의 조정이 불가능하였다.

2-2. Yun-Suh의 방법

Athans의 방법은 입력측 루프전달함수로 시스템의 실제적인 성능-강인성을 이룰 수 없었기 때문에 윤서는 성능항상을 기할 수 있는 식 (2-5) 출력측 루프전달함수 T(s)를 사용하여 특이값을 일치^[5]시키려고 노력하였다. 좀 더 구체적으로 설명하면, 윤서 방법은 식 (2-5)에서와 같이 복잡한 출력측 루프전달함수를 특이값 일치에 사용하기 위해서 Kwakernaak Sivan의 제어 이득행렬 G의 극한 거동^[6]에 관한 관계식 (2-9)를 활용하였고 이 활용을 통해 특이값을 일치시킴으로써 해서 성능-강인성을 위한 설계가 용이하도록 하였다.

극한거동식 (2-9)의 W는 일원행렬이고, N은 식 (2-6)에서 나타나는 설계변수으로써 대응하는 상태변수에 따라 분해하여 식 (2-10), (2-11), (2-12)인 제어이득을 결정하는 관계식을 구하였다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G = WN \tag{2-9}$$

$$G_x = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_{\rho 1}^{-1} A_{11} \tag{2-10}$$

$$G_y = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_{\rho 1}^{-1} \tag{2-11}$$

$$G_r = B_{\rho 1}^{-1} A_{12} \tag{2-12}$$

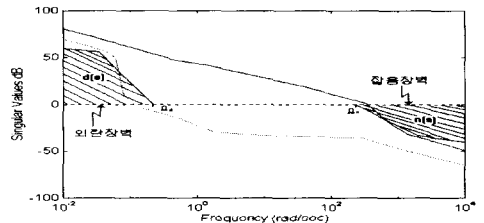


그림 2-2. 출력측 루프전달함수 T(s)의 특이값 선도

이 방법은 출력측 루프전달함수를 다루었다는 점에서 앞서의 방법의 문제점을 해결하였지만, Kwakernaak Sivan의 관계식의 이용으로 LQG-LTR 방법에서와 같이 저가 제어가 발생하는 문제점과 비최소위상문제가 거론될 수 있으며 위의 식 (2-10), (2-11), (2-12)에서 상태변수 y_ρ(t)에 대응되는 입력 가중행렬 B_{ρ1}이 정칙행렬인 경우에만 적용할 수 있다는 제약을 가지고 있다. 또한 Athans의 방법에서

이미 지적된 경직성을 그대로 내포하고 있게 된다. 다시 말하면, 그림 2-2에서 처럼 주어진 설계사양을 만족하지 않는다면 설계장벽 Ω_d 과 Ω_n 을 만족하도록 식 (2-8)의 ρ 의 값을 변경하여도 고주파 설계장벽 Ω_n 의 침범을 사실상 막을 수 없게 된다.

2-3. 가중치를 이용한 방법

Athans 방법이나 윤서 방법에서 거론된 설계의 경직성을 보다 유연하게 하기 위해서 특이값 일치 방법의 제어기에 가중치를 도입함으로써 출력측 특이값 형상을 저주파와 고주파의 설계 장벽에서 좀더 자유롭도록 설계하도록 시도한 방법⁴⁾이 가중치를 이용한 방법이다. 이 방법은 가중치에 의해 어느 정도 유연성을 가질 수는 있었으나, 앞서의 방법과 같이 고주파에서는 향상시키기가 어려웠고, 또한 가중치 도입에 따른 시행착오적인 수행이 필요하게 되는 설계상의 부가적인 어려움이 있다.

III. 본 논문에서 제안하는 방법

앞 절에서 기존의 연구 방법들은 설계된 제어기가 설계장벽을 만족시킬 수 없을 때, 극한에서의 특이값 일치로 발생되어지는 설계의 경직성 때문에 이를 효율적으로 해결할 수 없다는 것이 지적되었다. 이러한 문제의 근원적인 해결은 기존의 방법과는 달리 역으로 주파수 설계장벽에 의한 구속조건을 만족하는 제어이득을 우선 설계하는 것으로 가능해질 수 있다. 그러나 제어이득 G 를 먼저 설정함으로써 LQR 특성 즉, 최적 제어와 안정도-강인성을 잃어버린다는 문제가 발생한다. 본 논문에서는 이를 해결하기 위해 새로운 역 최적제어기법을 제안하고자 한다.

좀더 구체적으로 설명하면, 식 (2-6)의 설계 변수 Q, R 과 식 (2-7)의 Riccati 방정식에 의해 제어이득 G 를 찾는 일반적인(regular) LQR 최적 제어 문제가 아닌 역으로 제어이득 G 를 결정한 후 Riccati 방정식의 설계 변수 Q, R 이 LQR이 되도록 결정하는 역 최적제어의 문제로 다루고자 함을 말한다. 역 최적제어기법에 의해 잃어버린 LQR 특성을 부여하게 함으로써 최적제어와 안정도-강인성을 보장하는 LQ-서보형 PI 제어기를 설계하는 구체적인 내용을 아래와 같이 서술하고자 한다.

3-1. 설계장벽을 만족하는 출력측 루프전달함수의 블록형 집합(convex set) 형성

앞에서 언급한 바와 같이 주어진 설계장벽에 항

상 만족되는 제어이득을 구하기 위해서는, 설계장벽 즉 구속조건에 만족되는 출력측 루프전달함수 $T(s)$ 들의 특이값 형상을 블록형 집합^{7),8),9)}으로 구성하고 이를 형성하게 하는 제어이득들의 집합을 구하도록 한다. 그리고 이 제어이득 집합을 구함에 있어 앞 절의 $T(s)$ 의 식 (2-5)를 살펴보면, 시스템의 성능에 관련되는 PI 제어기의 제어이득 G_y, G_z 와 상태피드백으로서 안정도 향상에 관련된 제어이득 G_r 로 구성되어 있음을 볼 수 있다. 따라서 이미 LQ-서보 구조는 안정도-강인성이 확보되어 있고 성능향상이 본 연구의 과제임으로 G_r 은 고정값(fixed)으로 간주할 수 있으며 G_y 와 G_z 가 성능향상을 위한 설계파라미터가 되어진다. 이 설계파라미터들의 값에 따라 상응되어 형성되는 출력측 루프전달함수 $T(s)$ 들의 특이값 형상이 구속조건을 만족하도록 함으로써 제어이득 집합을 구할 수 있게 되어지는 것이다.

본 논문에서 제안하는 방법의 효율적인 설명과 설계의 용이를 부여하도록 하기 위해 제어이득 $[G_z : G_y : G_r]$ 의 값들이 일단 임의로 정하여 고정값(fixed value)으로 간주하고, 가중치 (α, β) 을 도입하면 제어이득을 $[\beta \cdot G_z : \alpha \cdot G_y : G_r]$ 로 나타낼 수 있게 된다. 그래서 설계파라미터는 G_y, G_z 가 아닌 α, β 로 간주할 수 있게 된다. 여기서 제어이득 값 G_r, G_y, G_z 를 고정시킬 때 종전의 방법으로 구해서 정하면 보다 효율적 설계가 된다.

출력측 루프전달함수 $T(s)$ 는 식 (3-1)과 식 (3-2)와 같이 나타낼 수 있고, 편의상 $T_\alpha(s), T_\beta(s)$ 를 사용하여 식 (3-3)으로 나타내면 출력측 루프전달함수가 각 주파수 값에 대해 α 와 β 의 선형적 결합으로 이루어지게 됨을 알 수 있다. 이와 같이 새로운 설계파라미터 α, β 로 표현된 수식들을 가지고 구속조건을 만족하는 제어이득 집합을 구하기 위해서는 그림 2-2의 외란장벽 $d(s)$ 및 잡음장벽 $n(s)$ 을 고려한 식 (3-3)의 $T(s)$ 가 설계장벽식 (3-4)와 (3-5)를 만족하도록 하는 α 와 β 를 찾으면 된다.

$$T(s) = C_p(sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p [\alpha \cdot G_y + \frac{I}{s} \beta \cdot G_z]$$

$$= \alpha \cdot C_p(sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p G_y \tag{3-1}$$

$$+ \beta \cdot C_p(sI - A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p \frac{I}{s} G_z \tag{3-2}$$

$$= \alpha \cdot T_\alpha(s) + \beta \cdot T_\beta(s) = T(\alpha, \beta, s) \tag{3-3}$$

$$\sigma_{\min}[T(j\omega)] = \sigma_{\min}[a \cdot T_a(j\omega) + \beta \cdot T_\beta(j\omega)] \geq |d(j\omega)| \quad 0 \leq \omega \leq \omega_n \quad (3-4)$$

$$\sigma_{\max}[T(j\omega)] = \sigma_{\max}[a \cdot T_a(j\omega) + \beta \cdot T_\beta(j\omega)] \leq |n(j\omega)| \quad \omega_d \leq \omega \quad (3-5)$$

다음 단계로 식 (3-4)와 (3-5)를 만족하는 (α, β) 순서쌍 중 임의로 $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ 두 개를 선정하고 각각에 상응하는 출력측 루프전달함수를 $T_1(s)$ 와 $T_2(s)$ 라 할 때 식 (3-6)과 식(3-7)이 얻어진다. 이때 각 주파수에서 $T_1(s)$ 와 $T_2(s)$ 는 convex적인 결합을 시킬 수 있으며 식 (3-8)로 나타낼 수 있다. 따라서 λ 에 따라 형성된 $T_3(s)$ 는 $T_1(s)$ 와 $T_2(s)$ 사이의 공간 내에 항상 존재하게 되어짐으로 설계장벽식 (3-4)와 (3-5)를 만족하는 $T_1(s)$ 와 $T_2(s)$ 에 대해서는 $T_3(s)$ 는 항상 주어진 설계장벽을 만족하게 된다.

$$T_1(s) = C_p(sI - A_p + B_p G_a D_p)^{-1} B_p (\alpha_1 \cdot G_y + \beta_1 \cdot \frac{1}{s} G_z) \quad (3-6)$$

$$T_2(s) = C_p(sI - A_p + B_p G_a D_p)^{-1} B_p (\alpha_2 \cdot G_y + \beta_2 \cdot \frac{1}{s} G_z) \quad (3-7)$$

$$T_3(s) = \lambda \cdot T_1(s) + (1-\lambda) \cdot T_2(s) \quad , \quad \lambda \in [0,1] \quad (3-8)$$

여기서 설계파라미터인 $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ 가 외란장벽과 잡음장벽을 동시에 만족하는 값으로 설정될 수 있다면, λ 의 값에 따라 수많은 $T_3(s)$ 가 형성될 수 있고 설계장벽을 만족하는 수많은 제어이득의 순서쌍들이 존재하게 된다. 그리고 λ 는 설계장벽들을 설계 사양에 따라 융통성 있게 만족시킬 수 있는 역할을 할 수 있어 설계파라미터로 간주할 수 있다. 그림 3-1은 이와 같이 형성된 블록형구간을 나타내고 있다.

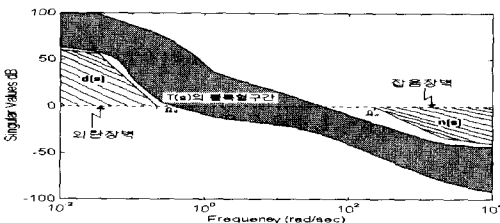


그림 3-1. 설계사양을 고려한 T(s)의 블록형 집합

끝으로 위의 두개의 설계장벽들을 동시에 만족하는 $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ 의 일반적 설정에 관해 언급하면, 주파수 영역에서 이들 두 장벽이 그림 3-1처럼 멀리 떨어진 형태로 존재하기 때문에 이러한 설정은 용이하다.

3-2. 계산(Computation)

구속조건 식 (3-4)와 식 (3-5)를 만족하는 설계파라미터 값들의 순서쌍 (α, β) 를 구하는데 있어서 순서쌍 (α, β) 가 이들 특이값 괄호 안에 존재하게 됨으로 계산상 크나큰 부담을 주게 된다. 이러한 부담을 줄이기 위해서는 순서쌍을 괄호 바깥으로 나가게 하여 식 (3-9)를 식 (3-10)의 관계로 표현하여서 즉, 중첩(superposition)의 관계식 형태로 변형시켜 LP를 사용할 수 있도록 해야 할 것이다.

잡음영역과의 관계를 나타내는 식 (3-5)는 삼각부등식 성질에 의해 (α, β) 순서쌍에 대해 식 (3-10)와 같이 중첩의 형태이다.

$$\sigma_{\max}[T(j\omega)] = \sigma_{\max}[a \cdot T_a(j\omega) + \beta \cdot T_\beta(j\omega)] \quad (3-9)$$

$$\leq a \cdot \sigma_{\max}[T_a(j\omega)] + \beta \cdot \sigma_{\max}[T_\beta(j\omega)] \leq |n(j\omega)| \quad (3-10)$$

그렇지만, 외란장벽 식 (3-4)에서 최소 특이값 부등식의 하한값을 설정할 수 있는 관계식 유도에는 있으나 그 값의 한계값이 느슨한(loose) 형태이다. 그 한계값을 좁히기(tight) 위해서 본 논문에서는 LQ-servo의 구조적인 특징을 고려하였다. 기존 연구방법에서 특이값을 일치시킬때 나타났듯이 정상상태오차를 없애기 위해 추가되어진 적분제어요소의 기여로 $T_\beta(s)$ 의 값이 $T_a(s)$ 의 값보다는 저주파영역에서 매우 크다는 사실이다. 또한 고주파영역에서는 $T_a(s)$ 가 $T_\beta(s)$ 보다 지배적임을 알 수 있다. 이러한 사실은 $T_a(s)$ 와 $T_\beta(s)$ 가 최소 특이값에서 독립적이라고 보아도 현실적으로 큰 문제가 되어지지 않으므로 가능해진다^[4]. 그래서 식 (3-11) 또한 식 (3-12)와 같은 중첩의 관계식으로 근사화시킬 수 있다.

$$\sigma_{\min}[T(j\omega)] = \sigma_{\min}[a \cdot T_a(j\omega) + \beta \cdot T_\beta(j\omega)] \quad (3-11)$$

$$\approx a \cdot \sigma_{\min}[T_a(j\omega)] + \beta \cdot \sigma_{\min}[T_\beta(j\omega)] \geq |d(j\omega)| \quad (3-12)$$

이와 같이 얻어진 식 (3-10), (3-12)의 구속조건식들은 LP(Linear Programming)를 이용하여 모든 주

파수 영역에서 쉽게 계산되어질 수 있다. 하지만 지금까지의 방법으로 제어이득을 구하면 최적의 조건은 물론 LQR의 중요특성인 안정도-강인성을 잃어버리게 될 것이다. 그래서 다음 3-3절에서는 구한 제어이득에 LQR 특성을 어떻게 부여할 수 있는지 살펴보도록 한다.

3-3. 역 최적제어(inverse optimal control)을 통한 LQR 특성 부여

LQR 특성을 부여하기 위해서는 역 최적제어 문제^{[10],[11]}를 다루어야 할 것이다. 기존의 방법은 역 최적문제를 해결하기 위해 주어진 시스템 A, B 상에서 아래식 (3-13)을 만족하는 제어이득 G가 식 (3-14)의 귀환차(return difference)에 의한 안정도-강인성을 만족할 때, 최적조건을 위한 Riccati 방정식에서 목적함수 식 (2-6)의 양의 반한정 Q, 양의 한정 R이 존재^[12]한다.

$$\lambda_i(A - B \cdot G) < 0, \quad \forall i, i = 1, 2, \dots, n + m \quad (3-13)$$

$$\sigma_{\min}(I + G(j\omega I - A)^{-1}B) \geq 1 \quad \text{for } \omega \in R \quad (3-14)$$

이 기존의 방법은 부등식 (3-14)만을 가지고 만족하는 제어이득을 구하는 것은 그 존재범위가 너무 넓어 사실상 불가능하기 때문에 알고 있는 제어이득에 대한 안정도 확인작업을 하는데만 유용하다. 그리고 조직적이고 용이한 구체적 방법을 개발한다는 것은 더욱 어렵다. 그러나 본 연구의 과제인 역 최적제어문제는 설계장벽들에 적합한 G가 주어졌을 때 잃어버린 LQR 특성 즉, 최적 및 안정도-강인성을 부여하기 위해서 주어진 임의의 제어이득 G에 대해 K의 대칭성을 유지하도록 하는 것이다. 왜냐하면, Riccati 식 (2-7)에서 K가 대칭성을 유지하고 R을 양의 한정대칭행렬로 선택(일반적으로는 $R = \rho I$ 을 선택)하면 Q는 반한정 대칭 행렬의 선형 결합으로 나타나게 되어 대칭성을 유지시킬 수 있다는 것이다. 또한 Q가 양의 반한정 대칭행렬이 되도록 하면 주파수역 등가식(freq. domain equality)을 만족시켜 안정도-강인성을 만족^[13]하게 되어 LQR 특성을 유지시킬 수 있다.

LQ-서보에 의해 기존의 방법으로 얻어진 최적 제어이득 G_z, G_y, G_r 은 식 (3-15) 관계로 나타내지며 그 제어이득은 LQR의 해임으로 항상 K는 식 (3-16)에서 볼 수 있듯이 대칭으로 선택할 수 있다. 그러나 3-1절에서 언급한 것과 같이 기존의 방법으로 얻어진 G_z, G_y, G_r 을 고정값으로 간주하고 G_y

와 G_z 에 대응하는 설계파라미터 α 와 β 를 도입하도록 하자. 그러면 이제 α 와 β 의 변화에도 K의 대칭성이 유지되어야 할 것이다. 그러나 식 (3-17)과 식 (3-18)에 α 와 β 가 도입되어 식 (3-19)와 식 (3-20)으로 나타낼 때 행렬 $K_{\alpha, \beta}$ 에서 대칭성이 유지되지 못함을 알 수 있다.

$$[G_z \ G_y \ G_r] = R^{-1} \cdot B^T \cdot K \quad (3-15)$$

$$= \frac{1}{\rho} [0 \ B_{\rho 1} \ B_{\rho 2}] \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

$$G_y = \frac{1}{\rho} (B_{\rho 1} \cdot K_{22} + B_{\rho 2} \cdot K_{23}) \quad (3-17)$$

$$G_z = \frac{1}{\rho} (B_{\rho 1} \cdot K_{12} + B_{\rho 2} \cdot K_{13}) \quad (3-18)$$

$$[\beta \cdot G_z \ \alpha \cdot G_y \ G_r] = R^{-1} \cdot B^T \cdot K_{\alpha, \beta} \quad (3-19)$$

$$= \frac{1}{\rho} [0 \ B_{\rho 1} \ B_{\rho 2}] \cdot \begin{bmatrix} \beta K_{11} & \alpha K_{12} & K_{13} \\ \beta K_{12} & \alpha K_{22} & K_{23} \\ \beta K_{13} & \alpha K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

이에 K의 대칭성을 유지시키기 위해 다음과 같이 변형된 가중치 도입을 하고자 한다. 식 (3-17)에서 G_y 의 첫 번째 항에만 α' 배를 해주어 식 (3-21)과 같이 변환한다. 그리고 G_z 는 종전과 같이 β 배를 해주어 식 (3-22)로 변환한다. 이때 식 (3-21)을 $G_{y, \alpha'}$ 라하고 식 (3-22)를 $G_{z, \beta}$ 라 할 때 식 (3-23)과 식 (3-24), 식 (3-25)의 관계식으로 나타낼 수 있어 $K_{\alpha', \beta}$ 는 대칭성을 유지시킬 수 있음을 알 수 있다.

$$G_{y, \alpha'} = \frac{1}{\rho} (\alpha' \cdot B_{\rho 1} \cdot K_{22} + B_{\rho 2} \cdot K_{23}) \quad (3-21)$$

$$G_{z, \beta} = \frac{1}{\rho} (\beta \cdot B_{\rho 1} \cdot K_{12} + \beta \cdot B_{\rho 2} \cdot K_{13}) \quad (3-22)$$

$$G_{\alpha', \beta} = \left[\beta \cdot G_z \ \frac{1}{\rho} (\alpha' \cdot B_{\rho 1} \cdot K_{22} + B_{\rho 2} \cdot K_{23}) \ G_r \right] \quad (3-23)$$

$$= R^{-1} \cdot B^T \cdot K_{\alpha', \beta} \quad (3-24)$$

$$= \frac{1}{\rho} [0 \ B_{\rho 1} \ B_{\rho 2}] \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & \beta K_{12} & \beta K_{13} \\ \beta K_{12} & \alpha' K_{22} & K_{23} \\ \beta K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

변형된 가중치 도입에 의해 $K_{\alpha', \beta}$ 가 대칭행렬이 될 수 있다는 것은 LQ-서보의 구조적인 특징인 적

분제어요소에 의해 $B^T = [0 \ B_{\beta_1} \ B_{\beta_2}]$ 와 같이 입력 가장 행렬에 영행렬이 항상 부분적으로 포함되어 있어서 제어이득에 이 영행렬과 곱으로 나타나게 되는 K_{12} 와 K_{13} 에 β 를 곱해주어도 제어이득과 시스템에는 아무런 변화가 없다는 점에 착안함으로써 가능해진다. 따라서 적분이득 G_z 에는 β 배를 해주고 비례이득 G_y 의 일부에만 α' 배를 해주어 $G_{y,\alpha'}$ 를 형성함으로써 대칭성을 유지하는 $K_{\alpha',\beta}$ 가 존재하게 되고, 이 $K_{\alpha',\beta}$ 의 존재에 의해 $Q_{\alpha',\beta}$ 는 대칭성이 확보되어진다. 따라서 역 최적제어를 통해 LQR 특성이 부여되어지는 것이다. 또한 식 (3-21)에서 보듯이 $G_{y,\alpha'}$ 는 선형결합으로 된 두 부분으로 나누어지고 그 일부에만 α' 배를 해줌으로써 앞에서 설명한 (α, β) 의 볼록형 집합이 (α', β) 의 볼록형 집합으로 바뀐다는 사실 이외는 앞에서의 convex적인 결합에 아무런 영향을 미치지 못함으로써 새로 선택한 순서쌍 (α', β) 도 주어진 $T(s)$ 의 특이값 형상을 주어진 공간 내로 구속시킬 수 있게 된다. 이렇게 G_y 의 일부에만 α' 를 해줌으로서 식 (3-4), (3-5)의 구속조건을 만족하는 모든 (α', β) 순서쌍은 성능-강인성을 성취할 수 있으며 안정도-강인성 또한 항상 확보되어진다.

(α', β) 순서쌍에 의해 나타나는 변형된 $Q_{\alpha',\beta}$ 는 변형된 목적함수 $J_{\alpha',\beta}$ 를 최적으로 하는 제어기틀 얻을 수 있음을 뜻한다. 물론 이렇게 변형되어진 목적함수는 Q 에서 변형된 $Q_{\alpha',\beta}$ 의 선택으로 인해 시간 영역에서의 성능의 저하 혹은 향상이 나타날 수 있을 것이고, 이는 트레이드 오프(trade-off)의 개념으로 해석될 수도 있을 것이다.

이제는 다음과 같은 설계절차를 제안하고자 한다.

단계 1. 기존의 방법(참고문헌 [3], [5])에 의해 제어이득 $[G_z : G_y : G_i]$ 의 값을 구한다. 이 제어이득이 고정값이 된다.

단계 2. 단계 1에서 구한 고정값에 가중치 α' , β 를 도입하여 식 (3-21)과 (3-22)로 나타낼 수 있으며 이들을 결합하여 식 (3-23)이 얻어진다. 그리고 식 (3-23)의 제어이득에 의한 출력측 루프전달함수가 식 (3-4)와 (3-5)의 구속조건을 만족하도록 설계파라미터들 즉, 순서쌍 (α_1', β_1) 값과 순서쌍 (α_2', β_2) 값들을 3-2절에서 제시한 중첩형태의 관계식 (3-10), (3-12)를 사용하여 LP로 구한다. 여기서 이들 순서쌍의 값들은 설계자의 판단에 의해 설계여건에 가장 적합하도록 선정한다.

단계 3. 단계 2에 의해 구한 설계파라미터들을 가지고 λ 에 의해 convex 결합시킴으로써 (α', β) 의 볼록형 집합을 형성한다. 또한 설계사양에 맞게 목적함수를 설정하여 볼록형 최적화기법으로 λ_{opt} 의 값을 결정하면 이에 상응하는 식 (3-23)의 최적제어이득 $G_{\alpha',\beta_{opt}}$ 의 값이 결정된다.

IV. 예 제

<예 제 1>

이 시뮬레이션 예제는 기존의 방법들과 비교하기 위해 기존의 방법들이 사용한 예제를 선택하였다.

(시스템의 상태 공간 모델식)

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + B_p u(t) \quad , \quad y_p(t) = C_p x_p(t)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -1.4600 & 0.0000 & 2.4276 \\ 0.1643 & -0.4000 & -0.3788 \\ 0.3107 & 0.0000 & -2.2300 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0.4182 & 5.2026 \\ 0.3921 & -0.1245 \\ 0.5186 & 0.0236 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

단계 1을 수행하기 위해 기존의 방법인 윤서 방법으로 고정값을 잡아 아래의 제어이득을 구하고 그 특이값 형상을 그림 4-1에 도시하였다.

(윤서 방법에서의 R과 제어이득)

$$R = \rho \cdot I = 0.001 \cdot I$$

$$G = \begin{bmatrix} -10.0741 & 31.4296 & 1.9274 & 78.5741 & -1.4941 \\ 9.7952 & -2.8489 & 5.9171 & -7.1223 & 1.0174 \end{bmatrix}$$

그림 4-1에서 알 수 있듯이 설계장벽으로 잡은 두 직선을 저주파영역과 고주파영역에서 특이값 형상이 두 직선의 바깥영역에 존재함으로써 설계장벽을 침범함을 볼 수 있다.

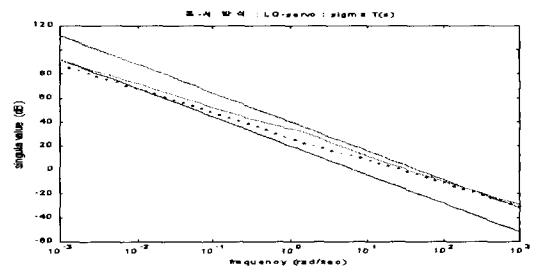


그림 4-1. 윤서 방법에 의한 출력측 루프전달함수 T(s)

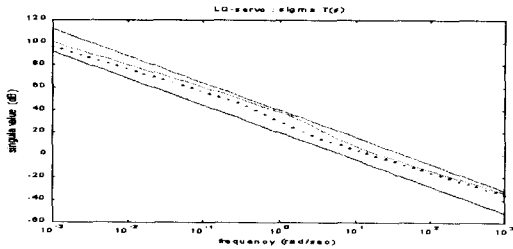


그림 4-2. $(\alpha_1', \beta_1) = (0.6, 2.7)$ 에 의해 얻어진 출력측 루프 전달함수 T(s)

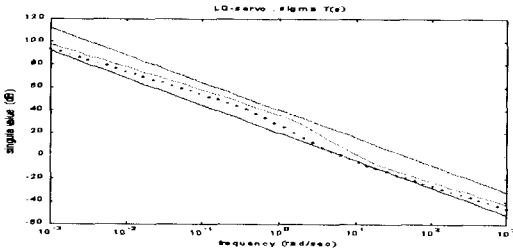


그림 4-3. $(\alpha_2', \beta_2) = (0.2, 2)$ 에 의해 얻어진 출력측 루프 전달함수 T(s)

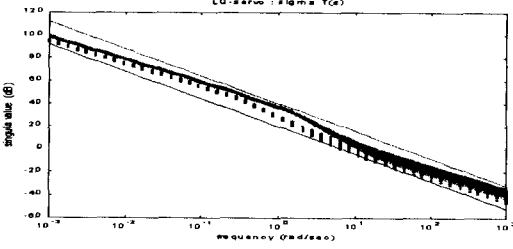


그림 4-4. convex적인 결합에 의해 얻어진 출력측 루프 전달함수 T(s)들의 집합

이제는 단계 2를 수행함으로써 안정도-강인성이 확보되어지며 특이값 형상이 설계장벽을 만족하도록 α' 와 β 를 변형시켜 보도록 하자. 주어진 설계장벽을 통한 구속조건을 만족하며 외란에 강하도록 LP의 목적함수를 선택하면 (α_1', β_1) 는 $(0.6, 2.7)$ 으로 선택되고 그 특이값 형상은 그림 4-2와 같이 도시할 수 있다. 그리고 잡음에 강하도록 LP의 목적함수를 선택한 (α_2', β_2) 는 $(0.2, 2)$ 가 되어 그 특이값 형상은 그림 4-3과 같이 된다. 따라서 그림 4-2와 그림 4-3은 주어진 설계장벽을 절대 침범하지 않음을 볼 수 있다. 이제는 단계 3으로, λ 를 이용해 그림 4-2와 4-3을 convex 결합시켜 그림 4-4에 도시하였고 그림 4-4는 λ 의 값에 의해 생성되는 모든 특이값 형상이 주어진 설계장벽을 만족함을 보이고 있다. 또한, 이제는 λ 만의 함수가 된 입력변수와 상태변수에 블록형 최적화기법을 이용하여 λ

의 값을 결정하여 보면, 그 값은 $\lambda_{opt} = 0$ 가 됨을 볼 수 있다.

이 값을 구하기 위해 Bryson' rule을 이용하여 입력변수의 제곱과 출력변수의 제곱의 합이 최소값을 갖도록 하는 λ_{opt} 를 얻을 수 있었고 그 제어이득은 아래와 같다.

$$G_{\alpha', \beta_{opt}} = \begin{bmatrix} -20.1481 & 62.8593 & 0.3855 & 15.7148 & -1.4941 \\ 19.5903 & -5.6979 & 1.1834 & -1.4245 & 1.0174 \end{bmatrix}$$

이 $G_{\alpha', \beta_{opt}}$ 를 이용하여 그림 4-6의 step response를 얻어 그림 4-5의 윤서 방법과 비교하여 보면, 각각의 출력변수에 대해 5배와 10배로 명령추종이 빠르게 이루어진다.

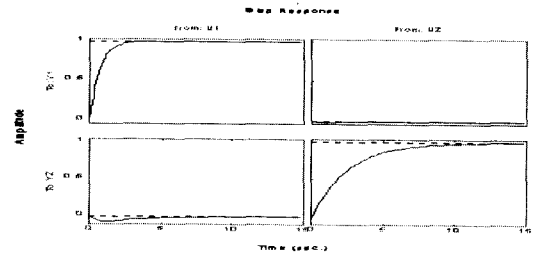


그림 4-5. 윤서 방법에 따른 step response

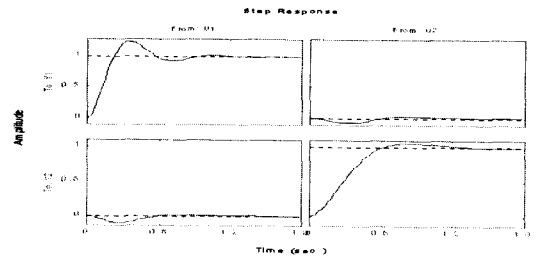


그림 4-6. 본 논문에 따른 step response

<예 제 2>

이 예제는 앞서 든 예제와는 달리 윤서 방법에서 지적되었던, 정칙행렬의 문제가 발생함으로써 고려할 제어기로 Athans의 방법에서의 제어기를 선택하도록 하여 특이값 형상을 조정하고자 한다.

(시스템의 상태 공간 모델식)

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \quad , \quad y_p(t) = C_p x_p(t)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.1400 & 0.4400 & -1.3000 & -30.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0200 & 0.0050 & 2.3000 & -32.0000 \\ 0.0000 & 0.0180 & -1.6000 & 1.2000 \end{bmatrix}$$

$$B_{\beta} = \begin{bmatrix} B_{\beta 1} \\ \dots \\ B_{\beta 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3600 & -8.6000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ \dots & \dots \\ 0.1400 & -0.1200 \\ 0.3500 & 0.0090 \end{bmatrix}$$

$B_{\beta 1}$ 부분에서 역행렬이 존재하지 않는다. 따라서 윤서 방법은 사용할 수 없게 되고 본 논문에서의 방법은 Athans 방법의 제어이득을 이용하여 출력측 전달함수에서 해석함으로써 윤서 방법과는 다르게 정칙행렬이 아닌 경우에도 고려할 수 있다는 것이다.

$$C_{\beta} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 57.3000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

단계 1을 통해 Athans의 방법으로 고정값을 잡고 특이값을 그림 4-7에 도시하였고 step response는 그림 4-8과 같이 된다.

(Athans 방법에서의 R과 제어이득)

$$R = \rho \cdot I = 0.0002 \cdot I$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.26 & -0.07 & 1.78 & -35.26 & -118.74 & 295.57 \\ -0.98 & 0.05 & -8.14 & -3.41 & -5.42 & 15.21 \end{bmatrix}$$

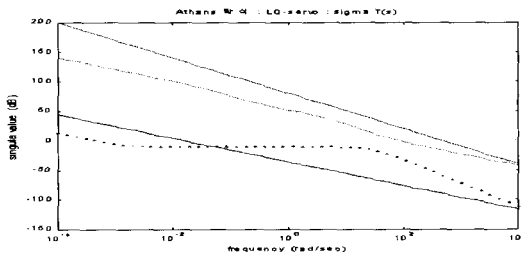


그림 4-7. Athans의 방법에 의한 출력측 루프전달함수 T(s)

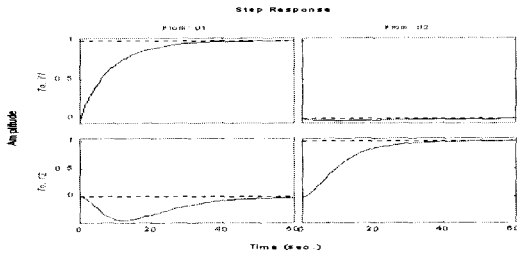


그림 4-8. Athans 방식에 따른 step response

예제 1과 같은 절차를 통해 $\lambda_{opt}=0$ 을 얻게 되고 $G_{\alpha, \beta opt}$ 는 아래와 같이 얻어진다.

$$G_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} 5.2 & -1.4 & 1.78 & -35.26 & -118.74 & 295.57 \\ -19.6 & 1 & -8.14 & -3.41 & -5.42 & 15.21 \end{bmatrix}$$

이 때의 특이값 형상과 step response를 도시하

면, 그림 4-9과 그림 4-10를 얻게 된다.

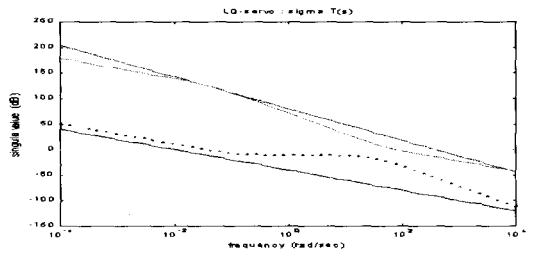


그림 4-9. $(\alpha, \beta) = (1, 80)$ 에 의해 얻어진 출력측 루프 전달함수 T(s)

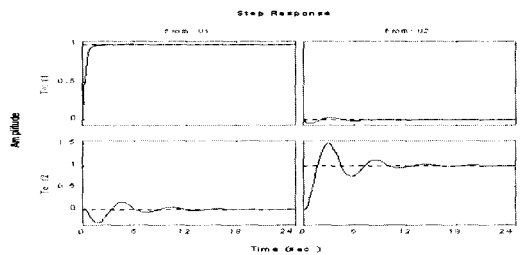


그림 4-10. 본 논문에 따른 step response

V. 결론

LQ-서보형 PI 제어기 설계에 있어서 기존의 방법들의 경직성 및 정칙행렬의 문제를 해결할 수 있는 설계기법을 제시하기 위해 블록형 최적화기법을 활용하는 기법을 논하였다. 그리고 본 논문에서 제안된 방법의 주요내용은 설계장벽에 맞는 설계파라미터 혹은 제어이득을 결정하기 위해서 블록형집합을 사용하였고 잃어버린 LQR 특성을 회복시키기 위해서 LQ-서보형 PI 제어기의 구조적 특징을 고려하여 새로운 역 최적기법을 제시한 것이다. 시뮬레이션 결과에서는 예제 1을 통해 저주파와 고주파에서 출력측 루프전달함수의 특이값 형상을 설계장벽에 만족하도록 설계파라미터를 용이하게 결정할 수 있었고, 예제 2를 통해 정칙행렬일 때만 성립하는 기존의 방식의 문제점도 해결할 수 있음을 보였다. 지금까지 제안한 설계방법은 주파수영역에서 루프형상기법(loop-shaping method)에 기초한 설계방법을 제시한 것임으로 LQG 혹은 H^{∞} 방법들과 마찬가지로 시간영역에서의 수행능력에는 한계가 있을 수 있다. 그래서 시간영역에서 LMI(Linear Matrix Inequality)에 의한 성능향상을 위한 기법에 대한 연구가 필요하다고 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] M.Grimble, “ H_{∞} controllers with a PID structure”, *J. of Dynamic Syst. Meas. and Contr.*, Vol 112, pp 325-336, 1990.
- [2] C. Matzezzoni and P. Rocco, “Robust Tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification”, *European J. of Contr.* Vol 3, pp 125~136, 1997.
- [3] M. Athans, *Lecture Notes on Multiv ariable Control Systems*, M.I.T. Ref. No. 860224/6234., 1986.
- [4] 서병설, “가중치를 이용한 LQ-Servo형 PI제어기 설계”, *한국통신학회 제재 확정*, 2000.
- [5] 윤성오, 서병설, “명령추종과 출력추 외란제거를 위한 LQ-servo 설계”, *제어 · 자동화 · 시스템 공학회 논문집 제 3권 5호*, 1997.
- [6] H. Kwakernaak and R. Sivan, “The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-17, pp.79~86, 1972.
- [7] A. Wayne Roberts and Dale E. Varberg, *Convex Functions*, Academic Press, 1973.
- [8] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, Lecture Notes for EE394, *Introduction to Convex Optimization with Engineering Applications*, Stanford University, 1998.
- [9] Stephen P. Boyd and Craig H. Barratt, *Linear Controller Design*, Prentice-Hall International Editions, 1991.
- [10] Brian D. O. Anderson and John B. Moore, *Optimal Control*, Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [11] Brian P. Molinari, “The Stable Regulator Problem and Its Inverse”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-18, pp.454~459, 1973.
- [12] William s. Levine, *The Control Handbook*, CRC Press, pp.595-606, 1996.

이 응 석(Eung-Suk LEE)

1998년 2월 : 한양대학교 전자공학과 졸업(공학사)
 2000년 2월 : 한양대학교 대학원 전자통신전파공학과
 졸업(공학석사)
 2000년 2월~현재 : 삼성SDI P.D.Ping 근무
 <주관심 분야> 최적제어

서 병 설(Byung-Suhl Suh)

정회원

한국통신학회논문지 제16 제10호 참조
 현재 : 한양대학교 전자 · 전기공학부 교수