한국 퍼지 및 지능시스템학회 논문지 2000, Vol. 10, No. 2 (2000)161~167

최적화기법을 이용한 BAM의 설계
Design of BAM using an optimization approach

박주영 · 권철희* · 박대희**
Jooyoung Park, Cheol-Hee Kwon* and Daihee Park**

고려대학교 제어계측공학과 , *LG 정밀
** 고려대학교 전산학과

요 약

본 논문에서는, 양방향 연상 기능을 효과적으로 수행할 수 있는 BAM(bidirectional associative memory)의 설계방법론을 제안한다. 먼저, BAM의 성질에 관한 이론적 고찰을 바탕으로 하여, 주어진 패턴 쌍을 안정하게 그리고 높은 오차수정율(error correction ratio)을 가지고 저장할 수 있는 BAM을 찾는 문제를 제약조건이 있는 최적화 문제로 공식화한다. 다음 과정에서는, 이 최적화 문제를 GEVP(generalized eigenvalue problem)로 변환함으로써, 최근에 개발된 내부점 방법(interior point method)을 통하여 해가 구해질 수 있도록 한다. 제안된 설계 방법론의 적용가능성은 예제를 통해 확인된다.

ABSTRACT

In this paper, we propose a design method for BAMs(bidirectional associative memories) which can perform the function of bidirectional association efficiently. Based on the theoretical investigation about the properties of BAMs, we first formulate the problem of finding a BAM that can store the given pattern pairs as stable states with high error correction ratio in the form of a *constrained optimization problem*. Next, we transform the constrained optimization problem into a GEVP(generalized eigenvalue problem), which can be solved by recently developed interior point methods. The applicability of the proposed method is illustrated via design examples.

1. 서 론

뉴론의 상호결합에 의한 궤환 시스템(feedback system)이 Hebb 규칙에 의해 학습되면, 연상 기능을 갖는 메모리 장치로 활용될 수 있음이 Hopfield[1]에 의해 보여진 이후, 여러 종류의 신경망 기반 연상 메모리가 제시되어 왔다. Kosko[2]는 Hopfield의 연구 내용을 기초로 하여, 두 개의 층(layers)으로 배열된 뉴론들(neurons)로 이루어진 BAM(bidirectional associative memory)을 이용하면 양방향 연상 기능이 가능함을 보였다. 하지만, Hebb 학습 규칙을 이용하는 Kosko의 BAM 모델은 기억시킬 수 있는 패턴 쌍의 개수가 작고, 의사 상태(spurious state)의 수가 많으며, 낮은 오차수정률(*error correction ratio*)을 갖는 등 개선되어야 할 많은 문제점을 갖고 있었다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여, 주어진 패턴 쌍을 BAM에 기억시키는 과정에 관한 기본 이론의 확립과 새로운 학습 방법론의 개발에 대한 여러 가지 연구가 꾸준히 수행되어 왔다. [3]에서는 multiple training과 dummy augmentation을 이용하는 두 가지 학습 방법론이 제안되었고, [4]에서는 주어진 패턴 쌍의 올바른 연상을 보장하는 필요충분조건이 소개되었다. [5]에서는 BAM의 학습을 위하여 유전자 알고리즘을 사용하는 방법이 모색되었으며, [6]에서는 기울기 강하(gradient descent)를 이용한 학습 방법론이 제안되었다. 그리고, [7]에서는 BAM을 위한 학습과정에서, 패턴 공간을 dilation과 translation을 이용하여 적절하게 변환시킨 이후에 Hebb 규칙을 적용할 경우에 보다 우수한 성능이 얻어질 수 있음이 보여졌다.

본 연구에서는, 보다 우수한 오차수정율(error correction ratio)을 갖는 BAM의 설계를 위하여 GEVP(generalized eigenvalue problem)으로 불리우는 최적화 문제를 이용하는 방법론을 제안한다. 먼저, BAM에 관한 이론적 고찰을 바탕으로 하여, 주어진 패턴 쌍을 안정하게 그리고 최대한 높은 오차수정율(error correction ratio)을 갖도록 저장시키는 방안을 제약조건이 있는 최적화 문제로 공식화한다. 그리고, 이 최적화 문제를 GEVP(generalized eigenvalue problem)로 변환한 후에 내부점 방법(interior point method)을 통하여 해를 구하는 방법을 제안한다.

본 논문에서 사용하는 주요 용어와 기호의 정의는 다음과 같다: R^n은 n차원의 실수 벡터 공간을 나타낸다. 벡터 $x \in R^n$의 i번째 원소는 x_i로 표기된다. 0이 아닌 모든 $x \in R^n$에 대해서 $x^T Ax > 0$이 성립하는 대칭 행렬 $A \in R^{n \times n}$는 양의 정부호 행렬이라 불리우며, $A > 0$로 표기된다. 또한, $A > B$은 $A - B$가 양의 정부호임을 의미한다. B^n은 n차원 이진 벡터의 집합 $\{-1, +1\}^n$을 나타낸다. B^n에 속한 두 이진 벡터 x^*와 x 사이의 해밍거리(Hamming distance)는 $H(x^*, x)$로 표기된다. 그리고, 편의상 이진 벡터와 패턴은 같은 의미를 갖는 동의어로 사용한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 BAM에 대한 기본적인 사항을 소개한 후, 본 논문에서 제안하는 학습방법론의 이론적 근거가 되는 기본 정리를 제시한다. 그리고, 제시된 기본 정리를 바탕으로 하여, 주어진 패턴 쌍들을 안정하게 그리고 최대한 높은 오차수정율을 갖도록 저장하는 문제를, 제약조건을 갖는 최적화 문제로 공식화한다. 3절에서는 이 최적화 문제를 GEVP(generalized eigenvalue problem)으로 변환시키는 과정을 다룬다. 널리 알려진 바와 같이 GEVP 문제는 내부점 방법(interior point method)에 의하여 빠른 시간 내에 효과적으로 풀릴 수 있기 때문에, 3절에서 제시하는 GEVP를 이용한 풀이는 BAM을 위한 매우 효과적인 설계 방법론이 될 수 있다. 4절에서는 예제 문제에 대하여 제안된 방법론을 적용해보고, 기존의 방법론과의 성능 비교를 수행한다. 마지막으로, 5절에서는 결론을 제시한다.

2. 패턴 쌍을 BAM에 저장시키는 방법론에 관한 기본 이론

BAM은 n개의 뉴론(neuron)으로 이루어진 X층 이진 벡터 $x = [x_i]_{i=1}^n \in B^n$와 p개의 뉴론으로 이루어진 Y층 이진 벡터 $y = [y_j]_{j=1}^p \in B^p$로 구성된다. 같은 층 내에서는 뉴론 끼리의 연결이 존재하지 않으며, X층과 Y층 상호간에는 연결 강도 행렬 $W = [w_{ij}] \in R^{n \times p}$와 $W^T \in R^{p \times n}$을 통한 피드백 형태의 연결이 존재한다. 그리고, 한 단위의 시간 스텝이 경과할 때 각 뉴론이 겪게 되는 상태 변화는 다음과 같은 규칙에 의해 결정된다.

$$[x^{new}]_i = f(\textstyle\sum_{j=1}^p w_{ij}[y^{old}]_j,\ [x^{old}]_i) = f([Wy^{old}]_i,\ [x^{old}]_i),\quad i = 1, , \cdots, n \qquad (1)$$

$$[y^{new}]_j = f(\textstyle\sum_{i=1}^n w_{ij}[x^{old}]_i,\ [y^{old}]_j) = f([W^T x^{old}]_j,\ [y^{old}]_j),\quad j = 1, , \cdots, p \qquad (2)$$

여기에서, $f: R \times B \rightarrow B$는 다음과 같이 정의되는 이진 함수이다:

$$f(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, \text{ if } \alpha > 0 \\ \beta, \text{ if } \alpha = 0 \\ -1, \text{ if } \alpha < 0 \end{cases}$$

한 쌍의 이진 벡터 $x \in B^n$과 $y \in B^p$가 각각 다음 시간 스텝에서 반대편 층의 이진 벡터로 상대방을 발생시키게 될 때, 우리는 이들 패턴 쌍이 BAM에 "안정하게 저장되었다"라고 하고, 이들을 안정한 패턴 쌍(stable pattern pair) 혹은 안정한 상태라고 부른다. 이러한 개념을 수식을 이용하여 정의하면 다음과 같다.

정의 1: $x \in B^n$와 $y \in B^p$가 다음 조건을 만족하면 $(x, y) \in B^{n+p}$는 안정한 패턴 쌍이다.

$$x_i = f(\textstyle\sum_{j=1}^p w_{ij} y_j,\ x_i),\ i = 1, \cdots, n$$
$$y_j = f(\textstyle\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i,\ y_j),\ j = 1, \cdots, p$$

BAM의 X층에 이진 벡터 $x_0 \in B^n$가 초기조건으로 주어지는 경우에, Y층과 X층의 뉴론들은 안정한 패턴 쌍에 이를 때까지 각각 (2)식과 (1)식의 반복 적용을 통해 계속적으로 변화하게 된다. 그리고, Y층에 이진 벡터 $y_0 \in B^p$가 초기조건으로 주어지는 경우에는 (1)식과 (2)식이 안정한 패턴 쌍에 이를 때까지 반복되는 형태를 취하게 된다. Kosko에 의하여 증명된 바와 같이, BAM은 항상 전역적으로 안정하기 때문에 어느 층에 어떠한 초기 조건으로부터 상태변화가 시작되더라도 궁극적으로는 반드시 안정한 상태에 도달하게 된다. 일정한 연결강도 행렬에 의하여 정의되는 BAM이 주어진 패턴을 안정하게 저장할 수 있는지는 다음의 필요충분조건에 의하여 판별될 수 있다[4].

정리 1: 다음의 두 식이 동시에 성립함과 패턴 쌍 $(x, y) \in B^{n+p}$가 BAM에 안정된 상태로 저장되는 것은 동치이다.

$$(\textstyle\sum_{j=1}^p w_{ij} y_j) x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, n$$
$$(\textstyle\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i) y_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, p$$

위의 정리에 소개된 필요충분조건을 이용하여 설계된 BAM은, 주어진 각각의 패턴 쌍을 안정하게 저장할 수 있으므로 양방향 연상 작용을 성공적으로 수행할 수 있다. 하지만 보다 우수한 연상 능력을 소유하기 위해서는, 초기 조건으로 주어지는 입력 패턴에 잡음이 섞여서 들어오는 경우에 대해서도 효과적으로 대처할 수 있어야 한다[5]. 즉, (x, y)가 안정한 패턴 쌍

으로 저장되어 있을 때, $H(x, x+\delta x)$값이 비교적 작은 $x+\delta x \in B^n$가 X층의 초기 패턴으로 주어지는 경우에도 (혹은, $H(y, y+\delta y)$값이 비교적 작은 $y+\delta y \in B^p$가 Y층의 초기 패턴으로 주어지는 경우에도) BAM의 상태가 최종적으로 (x, y)에 도달하는 것이 바람직하다. 이와 같은 능력을 본 논문에서는 오차 수정 능력(error correction capability)으로 정의하며, 오차 수정이 성공적으로 수행될 수 있는 확률을 백분율로 표현한 값을 오차수정율(error correction ratio)이라 부르기로 한다. 다음에서는, 오차수정율을 극대화시키는 설계방법론의 확립을 위하여 새로운 정리를 제시한다:

정리 2: 주어진 패턴 쌍 $(x, y) \in B^{n+p}$와 상수 $d \in [0, n/2]$에 대하여,

$$(\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j) x_i > 2d \max_{1\le j\le p} |w_{ij}|,\ i=1, \cdots, n, \tag{3}$$

$$(\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i) y_j > 2d \max_{1\le i\le n} |w_{ij}|,\ j=1, \cdots, p. \tag{4}$$

을 만족하는 BAM은 반드시 다음과 같은 성질을 갖는다:

① 패턴 쌍(x, y)는 안정한 상태로 저장된다.

② $0 \le H(y^*, y) \le d$을 만족하는 $y^* \in B^p$가 Y층에 초기조건으로 주어질 경우, X층이 다음 시간 스텝에 갖는 벡터 값은 x이다.

③ $0 \le H(x^*, x) \le d$을 만족하는 $x^* \in B^n$가 X층에 초기조건으로 주어질 경우, Y층이 다음 시간 스텝에 갖는 벡터 값은 y이다.

증명) d가 어떠한 값을 갖더라도 (3)과 (4)의 좌변은 0 이상의 수가 되므로, ①의 사실은 정리 1에 의하여 증명된다.

②를 보이기 위하여, $0 \le H(y^*, y) \le d$를 만족하는 이진 벡터 $y^* \in B^p$를 고려하자. 삼각 부등식(triangle inequality)을 이용하면, $\delta \triangleq y^* - y$는 항상

$$\begin{aligned} |\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij}\delta_j| &= |w_{i1}\delta_1 + \cdots + w_{ip}\delta_p| \\ &\le |w_{i1}\delta_1| + \cdots + |w_{ip}\delta_p| \\ &\le 2d \max_{1\le j\le p} |w_{ij}| \end{aligned}$$

를 만족함을 알 수 있다. 이 부등식과 정리의 조건 (3)을 이용하면 다음을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} (\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j^*) x_i &= (\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij}(y_j + \delta_j))(x_i) \\ &= x_i\{(\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j) + (\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij}\delta_j)\} \\ &\ge x_i(\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j) - |x_i(\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij}\delta_j)| \\ &= x_i(\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j) - |\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij}\delta_j| \\ &\ge x_i(\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j) - 2d \max_{1\le j\le p} |w_{ij}| \\ &> 0. \end{aligned}$$

위의 부등식으로부터, x_i와 $(\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j^*)$은 모든 $i \in \{1, \cdots, p\}$에 대해서 항상 같은 부호를 가짐을 알 수 있다. 따라서, (1)의 업데이트 규칙(update rule)으로부터, $y^* \in B^p$가 Y층에 초기조건으로 주어질 경우, X층의 각 뉴론은 다음 시간 스텝에 x의 각 원소와 같은 이진수 값을 가지므로 ②가 성립한다. ③의 경우도, 위와 같은 과정을 이용하여 증명할 수 있다. □

위의 정리로부터, BAM의 설계가 주어진 M개의 패턴 쌍 $(x^{(k)}, y^{(k)}) \in B^{n+p}$, $k=1, \cdots, M$ 각각에 대하여 (3)과 (4)를 만족시키는 방향으로 이루어질 경우에는, 설계된 BAM은 반드시 다음과 같은 바람직한 특성을 가지게 됨을 알 수 있다:

- X층에 (혹은 Y층에) 주어진 초기조건 벡터가, 주어진 패턴 쌍들 중 하나인 $(x^{(k)}, y^{(k)})$의 $x^{(k)}$(혹은 Y층 벡터 $y^{(k)}$)에 d 비트 이하의 거리에 있을 경우에는 다음 시간 스텝에서 반드시 오차수정이 이루어진다. 즉, Y층(혹은 X층)이 다음 시간 스텝 때에 갖는 벡터 값은 반드시 $y^{(k)}$(혹은 $x^{(k)}$)가 된다.
- 어떠한 벡터 $(x^*, y^*) \in B^{n+p}$의 x좌표인 x^*가 (혹은 y좌표인 y^*가), 주어진 패턴 쌍$(x^{(k)}, y^{(k)}) \in B^{n+p}$, $k=1, \cdots, M$중 하나의 x좌표(혹은 y좌표)에서 d비트 이내의 거리에 있을 경우에는$(x^*, y^*) \in B^{n+p}$는 결코 안정하게 저장된 패턴 쌍이 될 수 없다. 즉, $(x^*, y^*) \in B^{n+p}$는 설계자가 의도하지 않았음에도 불구하고 안정하게 저장되는 의사 상태(spurious state)가 아니다.

이와 같은 관찰을 바탕으로 본 논문에서는 주어진 M개의 패턴 쌍 $(x^{(k)}, y^{(k)}) \in B^{n+p}$, $k=1, \cdots, M$ 각각에 대하여, (3)과 (4)식의 d값을 양의 실수 범위에서 극대화시키는 설계 전략을 제안한다. 이와 같은 설계 전략은 위에서 살펴본 바와 같이 오차 수정 능력을 극대화시키고, 의사 상태의 수를 줄여주는 효과를 갖게 된다. 이러한 설계 전략을 최적화 문제 형태로 표현하면 다음과 같아진다:

$$\begin{aligned} &\max\ d(>0) \\ &\text{s.t. } (\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j^{(k)}) x_i^{(k)} > 2d \max_{1\le j\le p} |w_{ij}|,\ i=1, \cdots, n, \\ &\qquad k=1, \cdots, M, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &(\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i^{(k)}) y_j^{(k)} > 2\text{d} \max_{1\le i\le n} |w_{ij}|,\ j=1, \cdots, p, \\ &\qquad k=1, \cdots, M. \end{aligned} \tag{6}$$

위의 최적화 문제는 복잡한 형태의 제약조건을 가지고 있기 때문에, 현재의 상태에서 최적해를 구하는 것은 상당히 어려운 작업이 될 수 있다. 본 논문에서는 위의 문제를 보다 쉽게 풀릴 수 있는 다른 형태의 문제로 치환함으로써, 보다 손쉬운 방법으로 최적해를

찾는 방안을 제시한다.

3. GEVP를 이용한 BAM의 설계 방법론

이번 절에서는, 제약조건 (5)와 (6)을 선형 행렬 부등식(linear matrix inequality, LMI)과 관련된 형태의 부등식으로 전환시킴으로써, 앞 절에서 공식화된 최적화를 이용한 BAM의 설계문제를 짧은 시간 내에 효과적으로 풀릴 수 있는 GEVP(generalized eigenvalue problem) 형태의 문제로 변환시키는 방안을 소개한다.

선형 행렬 부등식이란 다음과 같은 형태로 주어지는 제약조건에 대한 일반적인 명칭이다[8]:

$$A(z) \triangleq A_o + z_1 A_1 + \cdots + z_N A_N > 0. \tag{7}$$

여기에서, $z \triangleq [z_1 \ \cdots \ z_N]^T \in R^N$는 변수이고, $A_o, \cdots, A_N$은 상수들로 이루어진 대칭 행렬들이며, ">"는 위 부등식의 좌변이 양의 정부호임을 의미한다. (7)의 좌변과 같은 형태를 우리는 보통 "변수 z에 대하여 애파인 함수(affine function)인 대칭행렬"이라고 부른다. 다중의 선형 행렬 부등식 $A^{(1)}(z) > 0, \cdots, A^{(p)}(z) > 0$과 $diag(A^{(1)}(z), \cdots, A^{(p)}(z)) > 0$은 동치이므로, 여러 개의 선형 행렬 부등식 조건들은 반드시 단 하나의 선형 행렬 부등식으로 표현될 수 있음을 기억하자. 선형 행렬 부등식과 관련된 최적화와 관련해서 중요한 주제 중 하나인 GEVP는, 다음과 같은 일반형을 갖는 최적화 문제를 의미한다[8]:

$$\begin{aligned} &\min \ \lambda \\ &\text{s.t.} \ \lambda B(z) > A(z) \\ &\qquad B(z) > 0 \\ &\qquad C(z) > 0 \end{aligned}$$

여기에서, $A(z)$, $B(z)$와 $C(z)$는 변수 z에 대하여 애파인 함수인 대칭행렬들이다. 따라서, GEVP의 제약조건들 중 $B(z) > 0$과 $C(z) > 0$는 선형 행렬 부등식 형태이며, $\lambda B(z) > A(z)$는, 변수 $\lambda \in R$, $z \in R^N$들 중 하나를 상수로 고정시킬 경우에는 나머지 변수에 대하여 선형 행렬 부등식 형태를 가지게 된다. GEVP 형태의 최적화 문제는 내부점 방법(interior point method)에 의하여 효과적으로 풀릴 수 있음은 널리 알려져 있으며[8], 최근에는 이를 풀 수 있는 MATLAB의 Toolbox[9]도 등장하였다.

본 논문에서 BAM의 설계를 위하여 제시한 최적화 문제 중 제약조건 부분인 (5)와 (6)은, 보조변수인 q_i와 p_j를 이용하면 다음과 같은 형태로 수정될 수 있다:

$$(\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j^{(k)}) x_i^{(k)} > 2dq_i > 2d \max_{1\le j\le p}|w_{ij}|, \ i = 1, \cdots, n,$$
$$k = 1, \cdots, M, \tag{8}$$

$$(\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i^{(k)}) y_j^{(k)} > 2dp_j > 2d \max_{1\le i\le n}|w_{ij}|, \ j = 1, \cdots, p, \ k = 1, \cdots, M. \tag{9}$$

여기에서, (8)은 (6)의 "$(\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j^{(k)}) x_i^{(k)}$"과 "$2d \max_{1\le j\le p}|w_{ij}|$" 사이에 "$2dq_i$"이 삽입되어 얻어진 형태이고, (9)는 (7)의 "$(\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i^{(k)}) y_j^{(k)}$"과 "$2d \max_{1\le i\le n}|w_{ij}|$"사이에 "$2dp_j$"가 삽입되어 얻어진 것임에 유의하자. 또한, (8)과 (9)를 분할하여 다시 표현하면 다음과 같은 부등식이 얻어질 수 있다:

$$\begin{aligned} &q_i > \max_{1\le j\le p}|w_{ij}| \\ &p_j > \max_{1\le i\le n}|w_{ij}| \\ &-2dq_i + (\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j^{(k)}) x_i^{(k)} > 0 \\ &-2dp_j + (\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i^{(k)}) y_j^{(k)} > 0, \\ &i = 1, \cdots, n, \ j = 1, \cdots, p, \ k = 1, \cdots, M \end{aligned}$$

이상에서 설명한 변환 과정을 이용하면, 앞 절에서 패턴 쌍 $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}_{k=1}^{M} \in B^{n+p}$을 안정하게 저장하는 BAM을 설계하기 위하여 제시한 최적화 문제는 다음과 같은 형태로 치환될 수 있음을 알 수 있다:

$$\begin{aligned} &\min \ -d(<0) \\ &\text{s.t.} \ (-d)(2q_i) + (\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j^{(k)}) x_i^{(k)} > 0 \\ &\qquad (-d)(2p_j) + (\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i^{(k)}) y_j^{(k)} > 0 \\ &\qquad q_i > \max_{1\le j\le p}|w_{ij}| \\ &\qquad p_j > \max_{1\le i\le n}|w_{ij}| \end{aligned}$$

최적화를 이용하여 BAM을 설계하는 과정에서 반드시 고려해야 할 추가적인 주의사항으로, 연결 강도 행렬의 크기 $|w_{ij}|$가 지나치게 큰 값을 갖지 않도록 상한선을 두는 것이 필요하다. 이러한 필요는, 위의 제약조건에 다음과 같은 선형 행렬 부등식을 추가함으로 충족시킬 수 있다:

$$\begin{aligned} &L_{ower} < q_i < U_{pper}, \ i = 1, \cdots, n \\ &L_{ower} < p_j < U_{pper}, \ j = 1, \cdots, p \end{aligned}$$

이상의 내용을 종합하면, 본 논문에서 제안하는 설계 방법론은 다음과 같은 GEVP로 요약될 수 있다:

$$\begin{aligned} &\min \ -d(<0) \\ &\text{s.t.} \ (-d)(2q_i) + (\textstyle\sum_{j=1}^{p} w_{ij} y_j^{(k)}) x_i^{(k)} > 0 \\ &\qquad (-d)(2p_j) + (\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i^{(k)}) y_j^{(k)} > 0 \\ &\qquad q_i > w_{ij} > -q_i \\ &\qquad p_j > w_{ij} > -p_j \\ &\qquad L_{ower} < q_i < U_{pper} \\ &\qquad L_{ower} < p_j < U_{pper} \\ &\text{where} \ i = 1, \cdots, n, \ j = 1, \cdots, p, \ k = 1, \cdots, M. \end{aligned} \tag{10}$$

4. 실 험

다음에서는, 제안된 설계 방법론의 성능을 평가하기 위하여 두 가지 설계 예제를 고려한다.

첫번째 예제에서는, X, Y층에 각각 $n=20$, $p=20$ 개의 뉴론을 갖는 BAM에 다음에서 제시하는 $M=4$ 개의 패턴 쌍 $\{(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3), (x4, y4)\}$을 저장하는 문제를 다룬다:

$$x1 = [+1+1+1+1+1-1-1+1-1-1-1-1+1-1-1-1-1+1-1-1]^T$$
$$y1 = [-1-1+1-1-1+1+1+1+1+1-1-1+1-1-1-1-1+1-1-1]^T$$
$$x2 = [+1+1+1+1+1+1-1-1-1-1+1-1-1-1-1+1+ \\ 1+1+1+1]^T$$
$$y2 = [-1-1-1-1-1-1-1+1+1-1-1+1-1-1-1-1-1+1+1-1]^T$$
$$x3 = [+1-1-1-1+1-1+1-1+1-1-1-1+1-1-1-1+1-1+1-1]^T$$
$$y3 = [-1-1-1-1-1-1+1-1+1-1-1-1+1-1-1-1+1-1+1-1]^T$$
$$x4 = [-1+1+1+1-1+1-1-1-1+1+1-1-1-1+1-1+1 \\ +1+1-1]^T$$
$$y4 = [-1-1-1-1-1-1+1+1+1-1-1+1-1+1-1-1+1+1+1-1]^T$$

이것은 참고 논문 [7]에서 고려되어진 패턴 쌍들과 같은 것이다. 본 논문에서 제안된 방법에 따라, $L_{ower}=1$, $U_{pper}=2$로 고정시키고 MATLAB LMI Control Toolbox의 함수 "gevp"를 이용하여 GEVP (10)을 풀어서 연결 강도 행렬 W를 구했다. 그리고, 이렇게 구해진 BAM의 성능을 평가하기 위한 비교대상으로, [7]의 방법에 따라 $\lambda=\mu=0.06$[1]을 사용하여 또 하나의 BAM을 설계하였다. 이 두가지 BAM의 오차 수정 능력을 비교하기 위하여, 각 BAM의 각 층 (즉, X층 및 Y층 각각)에 대하여 가능한 모든 경우의 이진 벡터를 초기 조건으로 주고 이들이 최종적으로 어떠한 패턴 쌍으로 수렴하는지를 관찰하였다. 오차수정율을 비교하기 위하여 초기 조건 벡터와, 초기 조건이 가해진 층에서 최종 출력 패턴 쌍이 갖는 벡터 값 사이의 해밍 거리에 관한 내용을 표 1과 2에 정리하였다. 표에 기재된 수치는 다음과 같이 해석된다: 예를 들어, 표 1의 $x2$ 줄과 HD = 3 칸이 만나는 곳에 위치한 항 1066/1140은, x2와 HD=3 비트 떨어진 이진 벡터가 가질 수 있는 경우의 수는 모두 1140 가지인데, 각각의 경우를 X층에 대한 초기 조건으로 사용한 시뮬레이션 결과 이들 중 1066 가지 경우가 최종적으로 패턴 쌍 $(x2, y2)$로 수렴하였음을 의미한다. 따라서 이 항에 나타난 숫자는, X층에 $x2$와 3 비트 떨어진 초기 조건이 가해진 경우의 오차수정율을 의미한다. 각 BAM이 갖는 오차 수정 능력을 보다 분명하게 비교하기 위하여 각 표의 마지막 두줄에는 각각 위의 4줄에 있는 데이터를 총괄한 결과와 평균값(%)을 실었다. 표 1과 2의 HD=0에 해당하는 칸의 위쪽에 있는 네 개의 항이 모두 "1/1"을 가짐은, 우리가 고려하는 두가지 BAM이 모두 주어진 패턴 쌍들을 안정하게 저장하고 있음을 보여준다. 그리고, 표 1-4에 나타난 평균 오차수정율들은, 본 논문의 방법론에 따라 설계된 BAM이 [7]에 의해 설계된 BAM보다 전반적으로 우수한 오차 수정 능력을 가짐을 보여준다.

두번째 예제에서는, X, Y층에 각각 $n=9$, $p=9$개의 뉴론을 갖는 BAM에 다음에서 제시하는 $M=3$개의 패턴 쌍 $\{(a1, b1), (a2, b2), (a3, b3)\}$을 저장하는 문제를 다룬다:

표 1. 본 논문의 방법론에 따라 설계된 BAM이 갖는 오차 수정율 (초기조건이 X층에 주어진 경우)

	HD=0	HD=1	HD=2	HD=3
$x1$	1 / 1	20 / 20	190 / 190	967 / 1140
$x2$	1 / 1	20 / 20	190 / 190	1066 / 1140
$x3$	1 / 1	20 / 20	190 / 190	1070 / 1140
$x4$	1 / 1	20 / 20	168 / 190	903 / 1140
Total	4 / 4	80 / 80	738 / 760	4006 / 4560
Percentage(%)	100	100	97.1	87.9

표 2. 본 논문의 방법론에 따라 설계된 BAM이 갖는 오차 수정율 (초기조건이 Y층에 주어진 경우)

	HD=0	HD=1	HD=2	HD=3
$y1$	1 / 1	20 / 20	190 / 190	1053 / 1140
$y2$	1 / 1	20 / 20	167 / 190	857 / 1140
$y3$	1 / 1	20 / 20	190 / 190	1053 / 1140
$y4$	1 / 1	20 / 20	160 / 190	682 / 1140
Total	4 / 4	80 / 80	707 / 760	3645 / 4560
Percentage(%)	100	100	93	79.9

표 3. [7]의 방법론에 따라 설계된 BAM이 갖는 오차수정율 (초기조건이 X층에 주어진 경우)

	HD=0	HD=1	HD=2	HD=3
$x1$	1 / 1	20 / 20	190 / 190	1061 / 1140
$x2$	1 / 1	20 / 20	168 / 190	928 / 1140
$x3$	1 / 1	20 / 20	162 / 190	929 / 1140
$x4$	1 / 1	16 / 20	105 / 190	621 / 1140
Total	4 / 4	76 / 80	625 / 760	3539 / 4560
Percentage(%)	100	95	82.2	77.6

표 4. [7]의 방법론에 따라 설계된 BAM이 갖는 오차수정율 (초기조건이 Y층에 주어진 경우)

	HD=0	HD=1	D=2	HD=3
*y*1	1 / 1	20 / 20	184 / 190	976 / 1140
*y*2	1 / 1	16 / 20	147 / 190	597 / 1140
*y*3	1 / 1	18 / 20	163 / 190	752 / 1140
*y*4	1 / 1	16 / 20	147 / 190	597 / 1140
Total	4 / 4	70 / 80	641 / 760	2922 / 4560
Percentage(%)	100	87.5	84.3	64

표 5. 본 논문의 방법론에 따라 설계된 BAM이 갖는 오차수정율 (초기조건이 X층에 주어진 경우)

	HD=0	HD=1	HD=2	HD=3
*a*1	1 / 1	8 / 9	15 / 36	30 / 84
*a*2	1 / 1	5 / 9	15 / 36	30 / 84
*a*3	1 / 1	9 / 9	30 / 36	30 / 84
Total	3 / 3	22 / 27	60 / 108	90 / 252
Percentage(%)	100	81.5	55.6	35.7

표 6. 본 논문의 방법론에 따라 설계된 BAM이 갖는 오차수정율 (초기조건이 Y층에 주어진 경우)

	HD=0	HD=1	HD=2	HD=3
*b*1	1 / 1	8 / 9	27 / 36	40 / 84
*b*2	1 / 1	9 / 9	17 / 36	36 / 84
*b*3	1 / 1	9 / 9	25 / 36	30 / 84
Total	3 / 3	26 / 27	69 / 108	106 / 252
Percentage(%)	100	96.3	63.9	42

$a1=[+1-1-1+1+1+1-1-1-1]^T$
$b1=[-1+1+1+1-1-1+1+1+1]^T$
$a2=[+1-1+1-1+1+1-1+1+1]^T$
$b2=[+1+1+1-1-1-1-1+1-1]^T$
$a3=[+1-1-1-1-1-1-1-1+1]^T$
$b3=[-1+1-1+1-1-1+1-1+1]^T$

이것은 참고 문헌 [10]의 5장에서 고려되어진 패턴 쌍들과 같은 것이다. $L_{ower}=1$, $U_{pper}=2$를 고정시키고 본 논문의 방법론에 따라 GEVP를 풀어서 연결 강도 행렬 W를 구하였다. 그리고 비교대상으로는 [10]의 5장에서 multiple training 기법에 따라 설계된 BAM을 선택하였다. 이 두 BAM의 오차 수정 능력을 비교하기 위하여, 첫 번째 예제의 경우에 수행하였던 것과 같은 종류의 시뮬레이션을 수행하여 결과를 비교

표 7. Multiple training 기법[10]에 따라 설계된 BAM이 갖는 오차수정율 (초기조건이 X층에 주어진 경우)

	HD=0	HD=1	HD=2	HD=3
*a*1	1 / 1	8 / 9	25 / 36	55 / 84
*a*2	1 / 1	5 / 9	25 / 36	40 / 84
*a*3	1 / 1	5 / 9	5 / 36	0 / 84
Total	3 / 3	18 / 27	55 / 108	95 / 252
Percentage(%)	100	66.7	50.9	37.7

표 8. Multiple training 기법[10]에 따라 설계된 BAM이 갖는 오차수정율 (초기조건이 Y층에 주어진 경우)

	HD=0	HD=1	HD=2	HD=3
*b*1	1 / 1	9 / 9	30 / 36	51 / 84
*b*2	1 / 1	9 / 9	27 / 36	37 / 84
*b*3	1 / 1	3 / 9	15 / 36	24 / 84
Total	3 / 3	21 / 27	72 / 108	112 / 252
Percentage(%)	100	77.8	66.7	44.4

하였다. 즉, 각 BAM의 각 층 (즉, X층 및 Y층 각각)에 대하여 가능한 모든 경우의 이진 벡터를 초기조건으로 주고 이들이 최종적으로 어떠한 패턴 쌍으로 수렴하는지를 관찰한 후 그 결과를 토대로 오차수정율을 구하여 표 5와 6에 각각 정리하였다. 이 도표의 내용은, 본 논문의 방법론으로 설계된 BAM이 multiple training으로 설계된 BAM보다 전반적으로 우수한 오차 수정 능력을 가짐을 보여준다.

V. 결 론

본 논문에서는, 주어진 패턴 쌍들을 높은 오차수정율을 가지고 안정하게 저장할 수 있는 BAM을 설계하는 방법론을 제시하였다. 우선 설계 방법론의 주요한 기초가 되는 기본 정리를 제시한 후, 높은 오차수정 능력을 갖는 BAM을 설계하는 문제를 제약조건이 있는 최적화 문제로 공식화하였다. 그리고, 보조변수의 도입을 통하여 이 최적화 문제를 GEVP 형태의 최적화 문제로 변환하였다. BAM의 설계를 GEVP와 같이 보편적인 형식의 문제를 통하여 풀 수 있다는 것은, 본 논문이 제시하는 설계 방법이 특수한 알고리즘의 구현을 요구하는 것이 아니라 MATLAB LMI Control Toolbox와 같이 내부점 방법을 구현한 보편적인 소프트웨어에 의해 이루어질 수 있음을 의미하므로 상당한 실용적 가치를 갖는다. 기존의 관련 연구에서 사용해 온 예제들 중 두가지에 대하여 시뮬

레이션을 수행해본 결과, 본 논문의 방법론을 통하여 설계된 BAM은 비교대상 방법론에 의해 구해진 BAM보다 전반적으로 우수한 오차 수정 능력을 보여 주었다.

본 논문에서는 설명의 편의를 위하여 X층과 Y층이 갖는 뉴론의 개수가 비슷한 수준인 경우를 주로 다루었다. 만일 이들이 갖는 뉴론의 개수가 현저하게 차이가 나는 경우에는, 정리 2의 조건 (3), (4)에 같은 d 값을 사용하는 대신 각각 n 및 p에 비례하는 상수를 사용하는 것이 더욱 합리적인 선택이 될 것이며, GEVP(10)도 이에 따라 적절히 수정될 수 있다. 본 논문에서 다룬 전형적인 BAM이 여러 가지 형태로 변형된 경우에도 본 논문의 방법론은 손쉽게 수정 · 적용될 수 있다. 즉, 본 논문의 정리 2는, BAM에 바이어스 항이 있는 경우, BAM의 연결강도 행렬이 비대칭인 경우, 초기 입력이 X층(혹은 Y층)에만 가해지는 경우, 및 초기 입력이 X층과 Y층에 동시에 가해지는 경우등을 적절하게 다룰 수 있는 형태로 수정될 수 있으며, 이에 따라 각각의 경우를 고려할 수 있는 GEVP 기반 설계 방법론의 제시가 가능하다. 본 논문의 방법론을 더욱 개선하기 위해 필요한 향후 연구과제로는, 본 논문의 설계 방법론의 이론적 기초가 되는 기본 정리의 추가 개선과 대규모 BAM을 이용한 실용적인 문제에 대한 도전 등을 들 수 있다.

감사의 글

이 논문은 1999년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 연구되었음(KRF-99-041-E00266 E2304).

참고문헌

[1] J. J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities," Proceedings of National Academy of Sciences, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982.

[2] B. Kosko, "Bidirectional Associative Memories," *IEEE Trans. Syst.*, Man, and Cybern., vol. 18, no. 1, pp. 49-60, 1988.

[3] Y. F. Wang, J. B. Cruz, and J. H. Mulligan, "Two coding strategies for bidirectional associative memory," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 1, no. 1, pp. 81-92, 1990.

[4] Y. F. Wang, J. B. Cruz, and J. H. Mulligan, "Guaranteed recall of all training pairs for bidirectional associative memory," *IEEE Trans.* Neural Networks, vol. 2, no. 6, pp. 559-567, 1991.

[5] G. Shi, "Genetic approach to the design of bidirectional associative memory," *International Journal of Systems Science*, vol. 28, no. 2, pp. 133-140, 1997.

[6] T. Wang, X. Zhuang and X. Xing, "Designing bidirectional associative memories with optimal stability," *IEEE Trans. Syst.*, Man, Cybern., vol. 24, no. 5, pp. 778-790, 1994.

[7] B. Lenze, "Complexity preserving increase of the capacity of bidirectional associative memories by dilation and translation," Neural Networks, vol. 10, no. 5, pp. 1041-1048, 1998.

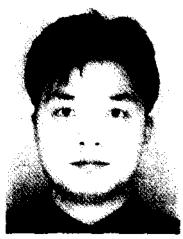
[8] S. Boyd, L. ElGhaoui, E.Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Philadelphia, PA:SIAM, 1994.

[9] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, MATLAB LMI Control Toolbox, Natick, MA: MathWorks Inc., 1995.

[10] M. H. Hassoun (ed.), Associative Neural Memories, New York: Oxford Univ. Press, 1993.

박 주 영 (Joo-Young Park)

1983년 : 서울대학교 전기공학과(학사)
1992년 : 텍사스대학 전기 및 컴퓨터공학과(박사)
1993년~현재 : 고려대학교 제어계측공학과 부교수
관심분야 : 신경망, 제어이론 등



권 철 희 (Cheol-Hee Kwon)

1998년 : 고려대학교 제어계측공학과(학사)
2000년 : 고려대학교 전자 및 정보공학과(석사)
2000년~현재 : LG 정밀
관심분야 : 제어공학, 신경망 등

박 대 희 (Dai-Hee Park)

1982년 : 고려대학교 수학과(학사)
1984년 : 고려대학교 수학과(석사)
1989년 : 플로리다 주립대학 전산학과(석사)
1992년 : 플로리다 주립대학 전산학과(박사)
1993년~현재 : 고려대학교 전산학과 부교수
관심분야 : 인공지능 및 데이터베이스 등