응용통계연구 제 **13**권 *1*호, *2000*년, *pp. 71-80*

# 이변량 교대 위치이동 대립가설에 대한 비모수적 검정

나종화[1)] 박효일[2)]

요 약

본 논문에서는 이변량 분포함수의 위치모수에 대한 교대위치이동 대립가설에 대한 비모수적 검정법을 제안하였다. 소표본의 경우 실제 자료에 대해 순열원리에 기초한 정확한 검정을 실시하였으며, 대표본의 경우 검정통계량의 극한분포를 유도하고 이에 기초한 근사적 검정법을 제시하였다. 모의실험을 통하여 Bhattacharyya와 Johnson(1970)의 층계순위(layer ranks)에 기초한 검정법과 검정력을 비교하였다.

주요용어: 층계순위, 순열원리, 교대 위치이동, 비모수적 검정.

## 1. 서 론

먼저 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 과 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 을 각각 연속형인 이변량 분포함수 $F$와 $G$로부터의 이변량 확률표본들이라 하자. 또한 분포함수 $F$와 $G$는 다음의 관계를 만족하는 이변량 위치이동 모형(location translation model)이라 가정하자.

$$G(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}) .$$

본 논문에서는 귀무가설 $H_o : F = G$ 에 대한 다음의 교대 위치이동(alternating location translation) 대립가설에 대한 비모수적 검정법을 제안하고자 한다.

$$H_1 : \theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \leq 0\ (\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}) . \qquad (1.1)$$

위의 대립가설에 대한 실제의 응용 범위는 대단히 넓다고 할 수 있다. 예를 들어 신제품으로 개발된 약품의 효능이 한 종류의 증상에는 효과적인 반응을 보이나 다른 증상에는 부정적인 반응을 보이는지, 운동선수에 특별한 조치를 취할 때 신체적인 조건이 긍정적으로 변하는 요인과 동시에 부정적인 요인이 존재하는지에 대한 경우를 생각할 수 있다. 이러한 실제의 많은 응용성에 비해 이에 대한 효과적인 검정법에 대한 연구는 대단히 미비하다.

이변량 위치모수와 관련된 지금까지의 연구는 주로 단측대립가설(one sided alternatives) $K : \theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0\ (\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0})$ 에 대해 진행되어 왔다. Bhattacharyya와 Johnson(1970)은 2차원의 층계순위(layer ranks)에 기초한 검정법을 제안하였고, Johnson과 Mehrotra(1972)는 스코어(score) 통계량에 기초한 검정을 실시하였으며, Boyett과 Shuster(1977)는 최대 -t 통

1) (361-763) 충북 청주시 흥덕구 개신동 산 48, 충북대학교 통계학과, 조교수
E-mail: cherin@cbucc.chungbuk.ac.kr
2) (360-764) 충북 청주시 상당구 내덕동 36번지, 청주대학교 응용통계학과, 부교수
E-mail: hipark@chongju.ac.kr

계량(maximal-t statistics)에 기초한 비모수적 검정법을 제안하고 순열원리(permutation principle)를 적용하여 귀무가설하의 분포를 유도하였다. 또한 Wei와 Knuiman(1987)은 중도절단 자료(censored data)에 대한 단측검정을 분포함수에 대한 확률적 순서화(stochastic ordering)에 기초한 검정을 실시하였으며, 최근 Park, Na와 Desu(1999)는 p-차원 ($p \geq 2$)의 경우에도 적용이 가능한 다변량 위치모수에 대한 단측검정법을 제안하였다.

본 연구에서는 지금까지 잘 다루어지지 않은 식(1.1)의 대립가설에 대한 비모수적 검정법을 고려하였다. 2절에서는 검정통계량을 제안하고 대표본 근사에 기초한 검정법을 다루었으며, 3절에서는 실제자료에 대해 순열원리에 기초한 소표본 검정과 대표본 검정과정을 구체적으로 제시하였다. 4절에서는 모의실험을 통해 순열원리의 적용이 어려운 비교적 대표본의 경우에 대한 제안된 검정법들의 검정력(power)을 비교하였다.

## 2. 검정통계량

### 2.1. 수정된 층계순위(MODIFIED LAYER RANK) 검정

Bhattacharyya와 Johnson(1970)은 순서화 이변량 대립가설(ordered bivariate alternatives) $K : \theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0\ (\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0})$ 에 대한 비모수적 검정법을 이차원 층계순위 (two-dimensional layer ranks)에 기초한 검정법을 제안하였다. 본 논문에서는 Bhattacharyya와 Johnson(1970)의 검정법을 식 (1.1)에 주어진 이변량 교대 위치이동(bivariate alternating location translation)대립가설에 대한 검정에 적합하도록 수정된 층계순위(modified layer ranks)검정을 소개하고 2.2절에서 제시될 검정통계량과 효율을 비교하고자 한다. 먼저 $m$개의 $X$표본과 $n$개의 $Y$표본이 결합된 혼합표본을 $\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_m, Z_{m+1}, \cdots, Z_{m+n}\}$이라 하고 $N = m + n$이라 하자. 먼저 층계순위를 다음과 같이 정의하자. 즉, $Z_i = (Z_{i1}, Z_{i2})'$이라 할 때

$$L(i,j) = \begin{cases} 1 & , Z_{i1} \geq Z_{j1},\ Z_{i2} \leq Z_{j2} \\ 0 & , \text{그외} \end{cases}$$

이고

$$L_i = \sum_{j=1}^{N} L(i,j),\ L = (L_1, \cdots, L_N)$$

이라 하자. 위 식에서 $L_i$를 혼합표본(combined sample)에서 $Z_i$의 제2사분면 층계순위(2nd quadrant layer ranks)라 정의한다. 이변량 교대 위치 이동 대립가설에 대한 검정통계량은 $w = m/N$이라 할 때 다음과 같다.

$$S_N = N^{-2}\left[w \sum_{i=m+1}^{N} L_i - (1-w)\sum_{i=1}^{m} L_i\right]. \tag{2.1}$$

검정통계량 $S_N$의 극한분포는 Bhattacharyya와 Johnson(1970)으로부터 다음과 같이 주어짐을 쉽게 보일 수가 있다. 즉, 귀무가설($H_0$)하에서

$$S_N^* = S_N \cdot \left[ \frac{mn}{N^5(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (L_i - \bar{L}\ )^2 \right]^{-1/2} \xrightarrow[N\to\infty]{d} N(0,1) \tag{2.2}$$

이다. 위 식에서 $L_i$는 자료로부터 관측된 제2사분면 층계순위이고 $\bar{L} = \sum L_i/N$을 의미한다. 따라서 식(2.2)의 결과를 이용하여 층계순위 검정통계량 $S_N$을 이용한 대표본 검정을 실시할 수 있다.

## 2.2. 검정통계량

이변량 혼합표본 $\{X_1, \cdots, X_m; Y_1, \cdots, Y_n\}$에서 첫번째와 두번째 변량에 대해 일차원의 대립가설 $K : \theta_i \geq 0 (i = 1,2)$에 대응하는 임의의 비모수적 검정통계량을 각각 $T_1$ 과 $T_2$라 하자. 통계량 $T_1$과 $T_2$는 서로 같거나 다른 형태의 통계량으로 가정하자. (예를들어, $T_1$: 윌콕슨 통계량, $T_2$:메디안 통계량.) 귀무가설하에서 통계량 $T_1$과 $T_2$의 평균과 분산을 각각 $E_{H_0}(T_i)$와 $V_{H_0}(T_i)$ $(i = 1,2)$이라 하자. 귀무가설 $H_0 : F = G$와 식 (1.1)의 대립가설 $H_1 : \theta_1 \geq 0, \theta_2 \leq 0$ $(\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0})$에 대한 검정통계량을 다음과 같이 제안하자.

$$Q_N = \left( \frac{T_1 - E_{H_0}(T_1)}{V_{H_0}^{1/2}(T_1)} \right) - \left( \frac{T_2 - E_{H_0}(T_2)}{V_{H_0}^{1/2}(T_2)} \right) . \tag{2.3}$$

위 식에서 $T_1$과 $T_2$는 결합 표본 $\{X's, Y's\}$에서 $Y$표본들에 대응하는 임의의 비모수적 검정통계량으로 $Q_N$의 값이 클 때 귀무가설을 기각할 수 있다. 적당한 크기의 표본에 대하여 $Q_N$ 통계량의 귀무가설하에서의 분포는 순열원리에 의해 유도될 수 있다. 일반적인 다차원 자료에 대한 순열원리는 Puri와 Sen(1971), Bell과 Smith(1969)를 참고하면 좋을 것이다.

또한 대표본의 경우에 대한 검정법은 다음과 같이 수행할 수 있다. 먼저 통계량 $Q_N$의 분포함수를 생각하자.

$$P\{Q_N \leq r\} = P\left\{ \frac{T_1 - E_{H_0}(T_1)}{V_{H_0}^{1/2}(T_1)} - \frac{T_2 - E_{H_0}(T_2)}{V_{H_0}^{1/2}(T_2)} \leq r \right\} . \tag{2.4}$$

귀무가설하에서 $\frac{T_i - E_{H_0}(T_i)}{V_{H_0}^{1/2}(T_i)}$ $(i = 1,2)$는 각각 표준정규분포로 수렴한다. 따라서 검정통계량 $Q_N$의 분포는 평균이 0이고 분산이 다음의 식으로 주어지는 정규분포로 수렴한다.

$$V_{H_0}(Q_N) = 2\left(1 - \frac{Cov_{H_0}(T_1, T_2)}{V_{H_0}^{1/2}(T_1) \cdot V_{H_0}^{1/2}(T_2)}\right) = 2(1 - \rho_{T_1,T_2}) .$$

위 식에서 $\rho_{T_1,T_2}$는 귀무가설하에서의 통계량 $T_1$과 $T_2$의 상관계수를 의미한다. 따라서 통계량 $Q_N$의 꼬리확률 (tail probability)은 정규근사를 이용하여 쉽게 계산될 수 있다.

## 3. 예제

다음의 자료는 Draper와 Stoneman(1966)자료의 일부분이다. 이변량 자료의 각 구성요소는 습기함량(moisture content)과 나무대들보(wood beams)의 강도를 나타낸다. (단위는 알려져 있지 않음.)

$$X = \begin{pmatrix} 8.9, & 11.1, & 9.9 \\ 12.74, & 11.14, & 12.60 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 10.5, & 10.7 \\ 11.02, & 11.41 \end{pmatrix}.$$

위 자료의 혼합표본으로부터 구한 순위행렬(rank matrix)은 다음과 같다.

$$R_5 = \begin{pmatrix} 1, & 5, & 2, & 3, & 4 \\ 5, & 2, & 4, & 1, & 3 \end{pmatrix}.$$

먼저 통계량 $T_1$과 $T_2$가 모두 윌콕슨의 순위합(rank sum)검정통계량으로 주어지는 경우를 생각하자. 이 경우 $T_1$과 $T_2$의 관측값은 $T_1 = 3 + 4 = 7$, $T_2 = 1 + 3 = 4$이고 $i = 1, 2$에 대해 $E_{H_0}(T_i) = n(m + n + 1)/2 = 6$, $V_{H_0}(T_i) = mn(m + n + 1)/12 = 3$이다. 따라서 검정통계량의 관측값은 다음과 같다.

$$Q_N = \left(\frac{T_1 - E_{H_0}(T_1)}{V_{H_0}^{1/2}(T_1)}\right) - \left(\frac{T_2 - E_{H_0}(T_2)}{V_{H_0}^{1/2}(T_2)}\right) = \sqrt{3}\,.$$

이제 귀무가설하에서 검정통계량 $Q_N$의 분포를 구하기 위해 $T_1$과 $T_2$의 결합확률을 순열원리로부터 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &P\{T_1 = 3,\ T_2 = 9\} = 1/10,\ P\{T_1 = 4,\ T_2 = 6\} = 1/10, \\ &P\{T_1 = 5,\ T_2 = 5\} = 1/10,\ P\{T_1 = 5,\ T_2 = 8\} = 1/10, \\ &P\{T_1 = 6,\ T_2 = 7\} = 2/10,\ P\{T_1 = 7,\ T_2 = 4\} = 1/10, \\ &P\{T_1 = 7,\ T_2 = 6\} = 1/10,\ P\{T_1 = 8,\ T_2 = 3\} = 1/10, \\ &P\{T_1 = 9,\ T_2 = 5\} = 1/10\,. \end{aligned}$$

따라서 귀무가설하에서 통계량 $Q_N$의 분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &P\left\{Q_N = -6/\sqrt{3}\right\} = 1/10,\ P\left\{Q_N = -3/\sqrt{3}\right\} = 1/10,\ P\left\{Q_N = -2/\sqrt{3}\right\} = 1/10, \\ &P\left\{Q_N = -1/\sqrt{3}\right\} = 2/10,\ P\{Q_N = 0\} = 1/10,\ P\left\{Q_N = 1/\sqrt{3}\right\} = 1/10, \\ &P\left\{Q_N = 3/\sqrt{3}\right\} = 1/10,\ P\left\{Q_N = 4/\sqrt{3}\right\} = 1/10,\ P\left\{Q_N = 5/\sqrt{3}\right\} = 1/10\,. \end{aligned}$$

위의 결과로부터 가설 $H_0$와 $H_1$에 대한 W-W(Wilcoxon-Wilcoxon)통계량에 기초한 검정결과는 다음과 같다.

$$p - 값 = P\left\{Q_N \geq \sqrt{3}\right\} = 3/10\,.$$

이제 주어진 자료에 대해 대표본 이론에 기초한 검정을 실시하자. 3절의 결과에서 귀무가설하에서 통계량 $Q_N$은 평균이 0 이고 분산이 $V_{H_0}(Q_N) = 2(1-\rho_{T_1,T_2})$인 정규분포로 수렴한다. 소표본 검정에서와 달리 통계량 $T_1$과 $T_2$의 공분산에 대한 계산이 요구된다. 주어진 자료에 대한 통계량 $T_1$과 $T_2$의 귀무가설하에서의 분포로부터 다음의 공분산 및 상관 계수에 대한 결과를 얻을 수 있다. 즉,

$$E_{H_0}(T_1T_2) = (27+24+25+40+84+28+42+24+45)/10 = 33.9,$$
$$Cov_{H_0}(T_1,T_2) = E_{H_0}(T_1T_2) - E_{H_0}(T_1)E_{H_0}(T_2) = 33.9 - 36 = -2.1$$

로부터

$$\rho_{T_1,T_2} = \frac{Cov_{H_0}(T_1,T_2)}{V_{H_0}^{1/2}(T_1)V_{H_0}^{1/2}(T_2)} = -0.7\ .$$

따라서, 귀무가설하에서 통계량 $Q_N$은 $N(0,34/10)$의 분포로 수렴하므로 대표본이론에 기초한 검정을 실시하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$p-\text{값} = P\left\{Q_N \geq \sqrt{3}\right\} = 1-\Phi(\sqrt{15/17}) \approx 0.174\ .$$

한편 이변량 Wilcoxon통계량의 상관계수는 Chatterjee와 Sen(1964)(p.24)의 다음의 결과로부터 직접 구할 수도 있다. 즉 $N = m+n$이라 할 때

$$Cov_{H_0}(T_1,T_2) = \frac{mn}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(i-\frac{N+1}{2})(l_i-\frac{N+1}{2}) \tag{3.1}$$

이다. 위식에서 $l_i$는 순위 $i$에 동반되는 순위(concomitant ranks)를 의미한다. 예를 들어 순위벡터가 $\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$인 경우 $i=5$이고 $l_i=9$이다. 따라서 주어진 자료로부터 $Cov_{H_0}(T_1,T_2)$및 $\rho_{T_1,T_2}$를 구하면 다음과 같다.

$$Cov_{H_0}(T_1,T_2) = \frac{6}{5\times 4}\sum_{i=1}^{5}(i-3)(l_i-3) = -2.1,\ \ \rho_{T_1,T_2} = -0.7\ .$$

이 결과는 앞에서 구한 순열원리를 이용한 결과와 일치한다.

다음으로 통계량 $T_1$은 메디안 통계량(median statistics)이고 $T_2$는 윌콕슨의 순위합 통계량인 경우를 생각하자. 메디안 통계량은 다음의 절차에 의해 구해진다. 먼저 $a = [(m+n)/2]+1$이라 하자. 메디안 통계량 $T_1$은 혼합표본 $\{X's, Y's\}$ 에서 $a$보다 크거나 같은 $Y$표본의 개수이다. 주어진 자료에 대해 $a=3$,이고 $T_1 = 2,\ T_2 = 4$이다. 통계량 $T_1$(메디안 통계량)과 $T_2$(윌콕슨 통계량)에 대한 귀무가설하에서의 분포는 순열원리에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$P\{T_1=0,\ T_2=9\}=1/10,\ P\{T_1=1,\ T_2=5\}=1/10,$$
$$P\{T_1=1,\ T_2=6\}=2/10,\ P\{T_1=1,\ T_2=7\}=2/10,$$
$$P\{T_1=1,\ T_2=8\}=1/10,\ P\{T_1=2,\ T_2=3\}=1/10,$$
$$P\{T_1=2,\ T_2=4\}=1/10,\ P\{T_1=2,\ T_2=5\}=1/10\ .$$

따라서 $E_{H_0}(T_1)=1.2$이고 $V_{H_0}(T_1)=0.36$이다. 또한 검정통계량 $Q_N$은 $T_i$가 미디안 통계량 $(M)$의 경우 다음의 사실을 이용할 수 있다. 즉,

$$E_{H_0}(M)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & N: 짝수\\[2ex] \dfrac{n(N+1)}{2N}, & N: 홀수\end{cases} \tag{3.2}$$

이고

$$V_{H_0}(M)=\begin{cases}\dfrac{mn}{4(N-1)}, & N: 짝수\\[2ex] \dfrac{mn(N+1)}{4N^2}, & N: 홀수\end{cases} \tag{3.3}$$

이므로 검정통계량의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_N &= \left(\frac{T_1-E_{H_0}(T_1)}{V_{H_0}^{1/2}(T_1)}\right)-\left(\frac{T_2-E_{H_0}(T_2)}{V_{H_0}^{1/2}(T_2)}\right)\\ &= (4+2\sqrt{3})/3\approx 2.488\ . \end{aligned}$$

동일한 방법으로 귀무가설하의 $Q_N$의 분포로부터 유의확률을 구하면 $p-$값 $\approx P\{Q_N>2.488\}$ $=2/10$이다. 대표본 검정의 결과도 동일한 방법으로 실시할 수 있다. 즉,

$$E_{H_0}(T_1T_2)=6.3,\ Cov_{H_0}(T_1,T_2)=-0.5,\ \rho_{T_1,T_2}=-10\sqrt{3}/36$$

이고 검정통계량 $Q_N$의 극한분포는

$$Q_N \mathrel{\dot\sim} N(0,2(1-\rho_{T_1,T_2}))$$

이므로 대표본 검정의 유의확률은 다음과 같이 주어진다.

$$p-값\approx P\{Q_N>2.488\}\approx 1-\Phi(1.446)=0.074\ .$$

동일한 방법을 적용하여 W-M(Wilcoxon-Median)통계량과 M-M(Median-Median)통계량에 기초한 두 종류의 검정(소표본, 대표본의 경우)도 실시할 수 있다. 이상의 결과를 요약하면 표 3.1과 같다.

표 3.1: Draper, et. al.(1966) 자료에 대한 $Q_N$검정과 층계순위 검정

| 검정법의 종류 | | | p-값 | |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | $T_2$ | | 정확한 검정 | 근사적 검정 |
| Wilcoxon | Wilcoxon | (W-W) | 0.3 | 0.174 |
| Wilcoxon | Median | (W-M) | 0.4 | 0.304 |
| Median | Wilcoxon | (M-W) | 0.2 | 0.074 |
| Median | Median | (M-M) | 0.3 | 0.004 |
| 층계순위(Layer Rank)검정 | | | 0.4 | 0.261 |

표 3.1의 결과에서 층계순위에 기초한 검정은 다음과 같이 구해진다. 먼저 소표본의 경우 검정통계량의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_N &= N^{-2}\left[w\sum_{i=m+1}^{N} L_i - (1-w)\sum_{i=1}^{m} L_i\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{3}{5}(3+3) - \frac{2}{5}(1+4+2)\right] = \frac{4}{125}\,. \end{aligned}$$

귀무가설하의 검정통계량의 분포 역시 순열원리로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} &P\{S_N = -11/125\} = 1/10,\ P\{S_N = -6/125\} = 2/10, \\ &P\{S_N = -1/125\} = 3/10,\ P\{S_N = 4/125\} = 2/10, \\ &P\{S_N = 9/125\} = 2/10\,. \end{aligned}$$

따라서 순열원리에 기초한 정확한 검정결과는 $p-$값 $= P\{S_N \geq 4/125\} = 4/10$이다. 한편, 대표본 근사에 기초한 검정은 다음과 같다. 즉, 검정통계량은

$$\begin{aligned} S_N^* &= S_N \cdot \left[\frac{mn}{N^5(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(L_i - \bar{L})^2\right]^{-1/2} \\ &= \frac{4}{125}\left\{\frac{6}{5^5\cdot 4}[(1+4+16+9+9) - \frac{13^2}{5}]\right\}^{-1/2} \\ &\approx 0.6405 \end{aligned}$$

이고 $p-$값 $\approx P\{S_N^* \geq 0.6405\} = 1 - \Phi(0.6405) = 0.261$이 된다.

## 4. 모의실험

이 절에서는 2절에서 소개된 $Q_N$통계량과 수정된 층계순위검정간의 검정력을 모의실험을 통해 비교하였다. 모의실험은 이변량 정규(bivariate normal) 분포, 로지스틱(logistic) 분

포 및 코쉬(Cauchy) 분포에 대해 실시하였다. 편의상 비교에 사용될 $Q_N$통계량은 $T_1$과 $T_2$를 모두 윌콕슨(W-W) 통계량인 경우를 고려하였다. 표본의 크기는 $m = 15$, $n = 20$으로 하고, 1000회의 모의실험을 수행한 결과를 표 4.1~표 4.3에 수록하였다. 각 표에서 $(\theta_1, \theta_2)$는 이변량 $Y$표본의 위치이동 모수를 의미한다.

먼저 이변량 정규분포의 경우 평균은 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$이고 공분산 행렬은 $\sum = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$이며 $\rho = 0$, 0.2, 0.5인 경우에 대해 모의실험을 수행하였다. 또한 로지스틱과 코쉬 분포의 경우는 각 변량에 대해 서로 독립인 표준 로지스틱과 표준 코쉬 분포를 고려하였다.

모의실험 과정에서 W-W통계량에 기초한 $Q_N$ 통계량은 $E_{H_0}(T_i) = n(N+1)/2$, $V_{H_0}(T_i) = mn(N+1)/12$ $(i = 1, 2)$을 이용하여 쉽게 구해지며, 검정통계량의 극한 분포 역시 3절에서 소개된 Chatterjee와 Sen(1964)의 결과를 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

표 4.1: 이변량 정규분포

| 검정법 | $\rho$ | $(\theta_1,\ \theta_2)$ (0,0) | (0.3,-0.3) | (0.6,-0.6) | (0.9,-0.9) | (1.2,-1.2) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_N$검정 | 0 | 0.049 | 0.309 | 0.776 | 0.979 | 1 |
| 층계순위 검정 | 0 | 0.041 | 0.278 | 0.699 | 0.943 | 0.996 |
| $Q_N$검정 | 0.2 | 0.050 | 0.368 | 0.838 | 0.990 | 1 |
| 층계순위 검정 | 0.2 | 0.045 | 0.316 | 0.772 | 0.979 | 0.999 |
| $Q_N$검정 | 0.5 | 0.047 | 0.487 | 0.943 | 0.999 | 1 |
| 층계순위 검정 | 0.5 | 0.044 | 0.418 | 0.884 | 0.997 | 1 |

표 4.2: 독립인 로지스틱 분포

| 검정법 | $(\theta_1,\ \theta_2)$ (0,0) | (0.3,-0.3) | (0.6,-0.6) | (0.9,-0.9) | (1.2,-1.2) | (1.5,-1.5) | (1.8,-1.8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_N$검정 | 0.047 | 0.184 | 0.420 | 0.671 | 0.856 | 0.964 | 0.994 |
| 층계순위 검정 | 0.052 | 0.171 | 0.386 | 0.585 | 0.806 | 0.942 | 0.983 |

표 4.3: 독립인 코오쉬 분포

| 검정법 | $(\theta_1,\ \theta_2)$ (0,0) | (0.3,-0.3) | (0.6,-0.6) | (0.9,-0.9) | (1.2,-1.2) | (1.5,-1.5) | (1.8,-1.8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_N$검정 | 0.051 | 0.170 | 0.372 | 0.598 | 0.805 | 0.892 | 0.951 |
| 층계순위 검정 | 0.051 | 0.149 | 0.372 | 0.544 | 0.709 | 0.850 | 0.918 |

표 4.1~표 4.3의 검정결과를 살펴보면 이변량 정규모집단의 경우를 비롯하여 꼬리가 두터운 로지스틱이나 코쉬 분포에 대해서도 본 논문에서 제안한 $Q_N$통계량에 기초한 검정법이 Bhattacharyya 와 Johnson(1970)의 층계순위에 기초한 검정법보다 검정력의 측면에서 우수한 방법임을 확인할 수 있다. 본 연구의 모의실험에서는 편의상 독립인 로지스틱과 코쉬 분포에 대해 실시하였으나, 독립이 아닌 경우에 대한 결과도 이변량 정규분포의 경우와 비슷한 경향을 보일 것이다. 또한 본 논문에서 제시한 근사적 검정법은 여러가지 다른 종류의 검정통계량(예를들어, $T_1$:메디안 통계량, $T_2$:윌콕슨 통계량.)들에 기초한 $Q_N$통계량에 대해서도 동일한 방법을 적용할 수 있을 것이다. 이 경우 대표본 검정과정에 요구되는 통계량의 점근분산은 Johnson과 Mehrotra(1972)(p.222)를 참고하라.

## 참고문헌


[1] Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R.A. (1970). A layer rank test for ordered bivariate alternatives, The Annals of Mathematical Statistics, 41, 1296-1310.

[2] Bell, C.B. and Smith, P.J. (1969). Some nonparametric tests for the multivariate goodness-of-fit, multisample, incomplete and symmetry problems, In P. R. Krishinaiah. Ed., *Multivariate Analysis-II*, Academic Press, New York, 3-23.

[3] Boyett, J.M. and Shuster, J.J. (1977). Nonparametric one-sided tests in multivariate analysis with medical applications, Journal of American Statistical Association, 72, 665-668.

[4] Chatterjee, S.K. and Sen, P.K. (1964). Nonparametric tests for the bivariate two-sample location problem, Calcutta Statistical Association Bulletin, 13, 18-58.

[5] Draper, N.R. and Stoneman, D.M. (1966). Testing of the inclusion of variables in linear regression by a randomization technique, Technometrics, 8, 695-669.

[6] Johnson, R.A. and Mehrotra, K.G. (1972). Nonparametric tests for ordered alternatives in bivariate case, Journal of Multivariate Analysis, 2, 219-229.

[7] Park, H.I., Na, J.H. and Desu, M.M. (1999). Nonparametric one sided test for multivariate data, Submitted.

[8] Puri, M.I. and Sen, P.K. (1971). *Nonparametric Methods in Multivariate Analysis*, Wiley, New York.

[9] Wei, L.J. and Knuiman, M.W. (1987). A one-sided rank test for multivariate censored data. Australian Journal of Statistics, 29, 214-219.


[ 1999년 5월 접수, 1999년 8월 채택 ]

# Nonparametric Test for Bivariate Alternating Location Translation Alternatives

Jong-Hwa Na[1) Hyo-Il Park[2)

ABSTRACT

We propose a nonparametric test for alternating translation alternatives of bivariate location parameters. The asymptotic null distribution of the suggested statistics is also derived and we compare the test with Battacharyya and Johnson's(1970) layer rank test through simulation studies.

*Keywords:* Layer rank; Permutation principle; Alternating location translation; Nonparametric test.

1) Assistant Professor, Department of Statistics, Chungbuk National University.
E-mail: cherin@cbucc.chungbuk.ac.kr
2) Associate Professor, Department of Applied Statistics, Chongju University.
E-mail: hipark@choungju.ac.kr