The Korean Communications
in Statistics Vol. 7, No. 2, 2000
pp. 533-540

Bayesian Method for Combining Results from Different Poisson Experiments

Jang Sik Cho[1], Dal Ho Kim[2]

Abstract

The problem of information related to I poisson experiments, each having a distinct failure rate θ_i, $i=1,2,\cdots,I$, is considered. Instead of using a standard exchangeable prior for $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_I)$, we consider a partition of the experiments and take the θ_i's belonging to the same partition subgroup to be exchangeable and the θ_i's belonging to distinct subgroups to be independent. And we perform Gibbs sampling approach for Bayesian inference on $\boldsymbol{\theta}$ conditional on a partition. Numerical study using real data is provided.

Keywords : Borrowing Strength, Gibbs Sampler, Model Averaging, Partial Exchangeability

1. 서 론

흔히 통계적인 실제 적용 문제에서 여러 관련된 실험이나 관측연구로부터 결과들을 병합시키는 것은 각 실험이나 관측연구에 대한 신뢰성있는 추론을 위해서 유용할 경우가 많다. 이것은 다른 관련된 실험들이나 관측연구들로부터 정보를 "borrow strength"할 수 있기 때문이다. 한편 위의 문제와 관련된 것으로 여러 연구들로부터 통계적 요약(statistical summaries)을 결합시켜 하나의 분석으로 만드는 메타분석이 있으며, Hedges와 Olkin(1985) 그리고 DuMouchel (1990)은 각 각 frequentist와 베이지안 관점에서의 메타분석을 연구하였다.

위의 문제에 대한 하나의 간단한 베이지안 접근은 각 실험이나 관측연구에 교환가능(exchangeable) 모형의 사전분포를 사용함으로서 실험자에게 "borrow strength"를 가능하게 할 수 있으며, DuMouchel(1990)은 여기에 대해 예제를 사용한 흥미로운 토의를 하였다. 한편 Malec과 Sedransk(1992)는 교환가능모형의 가정에만 기초한 베이지안 모형의 단점을 지적하였다. 즉, 정규 모집단의 평균들이 하나의 군이 아니라 둘 혹은 그 이상의 부분군(subgroup)의 형태로 몰려 있는 경우가 흔히 있게 되는데, 이 경우 모든 평균들이 공통의 가중 평균으로 축소(shrink)되는 것은 부적절하며, 따라서 다른 축소점(shrinkage points)을 허용하는 수정된 분석이 필요하다는 것을 지

1) Assistant Processor, Department of Statistical Information Science, Kyungsung University, Pusan, 608-736, Korea.
E-mail : jscho@star.kyungsung.ac.kr

2) Assistant Processor, Department of Statistics, Kyungpook National University, Taegu, 702-701, Korea.

적하였다.

위의 주어진 상황하에서 교환가능모형에 대한 대안으로서 부분교환가능(partial exchangeability) 모형을 생각할 수 있다. 즉, 유사성을 지닌 평균값으로 구성된 부분군 내에서는 교환가능이나 다른 부분군들 끼리는 교환가능이 아닌 부분교환가능을 생각할 수 있다. 여기서 흔히 부분교환가능은 주어진 문제에 의해서 결정된다.

Malec과 Sedransk(1992)는 정규분포의 평균 추정 문제에 대해 부분교환가능 모형을 사용한 분석을 처음으로 시도하였다. 그들의 방법은 다른 가능한 부분 군들로 모수들의 분할을 허용하여 각각의 부분군에 다른 사전분포를 부여하였다. 주어진 분할에 대해 각 부분군내에서 정규-정규 계층적 모형(normal-normal hierarchical model)을 사용하여 모수들 간에 교환가능을 만들고, 다른 부분군에 있는 모수들에게는 독립적인 사전분포를 부여한다. 이 개념이 후에 Consonni와 Veronese(1995)에 의해서 여러 이항 실험들로부터 결과들을 병합하는 문제에 적용되었다. 그들은 수치적 계산이 힘든 beta-binomial들의 곱의 형태를 근사적 접근방법을 사용하여 베이즈 추론을 하였다.

공학 등 많은 응용분야에서 서로 다른 포아송 실험이 행해지고 있고 그 중요성도 날로 증가하고 있다. Albert(1985)는 여기에 대한 교환가능모형 및 독립모형을 가정한 베이지안 추론을 연구하였다.

본 연구에서는 포아송 분포를 따르는 여러 실험으로부터 결과들을 병합하는 문제를 연구하고자 한다. 유한개의 관심있는 모집단에서 가능한 몇가지 모형들 예컨대, 교환가능모형, 부분교환가능모형, 독립모형 등을 생각한다. 그리고 베이즈 이론을 바탕으로 각 모형하에서 베이즈 추정량과 사후주변분포(posterior marginal distribution)를 구하고, 그 추정량들과 사후주변분포를 모형평균(model averaging)의 입장에서 병합(가중평균)하여 베이즈 추정량을 구한다. 본 논문에서는 이러한 베이지안 추론을 위해서 Malec과 Sedransk(1992) 그리고 Consonni와 Veronese(1995)와 같이 근사적 접근방법을 사용하지 않고, 깁스 표본자(Gibbs sampler)를 이용한 베이지안 추론을 시도한다.

2. 기호 및 계층적 베이즈 모형

본 논문에서는 편의상 다음과 같은 기호를 약속하자:

$[X, Y]$, $[X \mid Y]$, $[X]$: 결합, 조건부 및 주변확률밀도함수;

G : 모형의 총수;

$d(g)$: 모형 g에서 분할된 부분군의 수, 여기서 $g=1,2,\cdots,G$;

$S_k(g)$: 모형 g에서 k번째 부분군, 여기서 $k=1,2,\cdots,d(g)$;

$p(g)$: 모형 g에 따라 모수들이 분할될 확률;

예를들어, 모집단의 수가 5일 때 다음과 같은 4개의 가능한 모형을 생각하자. 즉, g_1={ {1, 3}, {2, 4, 5}}, g_2= { {1, 3}, {2}, {4, 5} }, g_3={1, 2, 3, 4, 5} 그리고 g_4={ {1}, {2}, {3}, {4}, {5} }와 같이 생각할 수 있다. 그러면, g_1과 g_2는 부분교환가능모형이고, g_3는 교환가능모형이며, g_4는 독립모형이 된다. 이 경우 모형의 총수 $G=4$가 되며 $d(g_1)=2$: $S_1(g_1)=\{1,3\}$, $S_2(g_1)=\{2,4,5\}$,

$d(g_2)=3: S_1(g_2)=\{1,3\}$, $S_2(g_2)=\{2\}$, $S_3(g_2)=\{4,5\}$, $d(g_3)=1: S_1(g_3)=\{1,2,3,4,5\}$이며 $d(g_4)=5: S_1(g_4)=\{1\}$, $S_2(g_4)=\{2\}$, $S_3(g_4)=\{3\}$, $S_4(g_4)=\{4\}$, $S_5(g_4)=\{5\}$이다.

한편, 본 논문의 전개상 각 모형에 속하는 같은 부분군내의 실험에 관계되는 모수들은 교환가능으로 가정한다. 또한, 각 모형의 서로 다른 부분군에 속하는 실험에 관계되는 모수들은 독립으로 가정한다. 이와 같은 가정하에서 주어진 모형 g에서 i번째 포아송 실험의 고장률 θ_i들의 사전분포는 같은 부분군내의 고장률 θ_i, $i=1,2,\cdots,I$, 에 대해서 동일한 사전분포를 그리고 서로 다른 부분군간의 고장률 θ_i에 대해서는 다른 사전분포를 가정한다.

따라서 다음과 같은 계층적 베이즈(Hierarchical Bayes) 모형을 생각한다.

(I) $[x_i \mid \theta_i] \sim Poisson(\theta_i t_i)$, $i \in \{1,2,\cdots,I\}$.

(II) $[\theta_i \mid \alpha_k(g), \beta_k(g)] \sim \mathrm{Gamma}(\alpha_k(g), \beta_k(g))$, $k=1,2,\cdots,d(g)$.
여기서 $\alpha_k(g)$와 $\beta_k(g)$는 모형 g에서 k번째 부분군의 감마분포에 대한 모수이며, $\mathrm{Gamma}(\alpha_k(g), \beta_k(g))$의 확률변수, 가령 Z라 하면 확률밀도함수를 다음과 같이 정의한다. 즉, $f(z \mid \alpha_k(g), \beta_k(g)) \propto z^{\alpha_k(g)-1} e^{-z/\beta_k(g)}$.

(III) $[\beta_k(g) \mid g] \sim IG(c,d)$, $k=1,2,\cdots,d(g)$.
여기서 역감마분포 $IG(c,d)$의 확률변수, 가령 T라 하면 확률밀도함수를 다음과 같이 정의한다. 즉, $h(t \mid c,d) \propto t^{-(c+1)} e^{-1/dt}$.

(IV) $[g] \sim 1/G$, $g=1,2,\cdots,G$. 여기서 $\alpha_k(g)$, c, d는 알려진 값이다.

위의 모형은 George, Markov 및 Smith(1993) 그리고 Natarajan, Ghosh 및 Maiti(1998)의 교환가능모형을 부분교환가능모형화한 것이다.

3. 베이지안 추론

이 절에서는 가능한 부분가능모형들 하에서 결과들의 병합을 통하여 각 실험에서의 고장률 θ_i들에 대한 베이즈 추정량들을 계산하고자 한다. 2 절에 주어진 계층적 베이즈 모형에서 모든 모수들에 대한 결합확률밀도함수를 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
[\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{\beta}, g] &\propto \left[\prod_{k=1}^{d(g)} \left\{ \prod_{i \in S_k(g)} [x_i \mid \theta_i] \cdot [\theta_i \mid \beta_k(g)] \right\} \cdot [\beta_k(g) \mid g] \right] \cdot [g] \\
&\propto \prod_{k=1}^{d(g)} \left[\prod_{i \in S_k(g)} \theta_i^{x_i + \alpha_k(i) - 1} \exp(-\theta_i(t_i + 1/\beta_k(g))) \right] \cdot \\
&\quad \beta_k(g)^{-\alpha_k(g) \mid S_k(g) \mid - c - 1} \cdot \exp(-1/\beta_k(g) d),
\end{aligned}
$$

여기서 $\underset{\sim}{x}=(x_1,\cdots,x_I)$, $\underset{\sim}{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_I)$, $\underset{\sim}{\beta}=(\beta_1(g),\cdots,\beta_{d(g)}(g))$를 나타내고, $\mid S_k(g) \mid$는 $S_k(g)$내에 있는 원소의 개수를 의미한다. 그러면 다음과 같은 완전 조건부 확률밀도함수를 계산할 수 있다.

(i) $[\theta_i \mid \underset{\sim}{x}, \beta_k(g), g] \sim \text{Gamma}(x_i+\alpha_k(g),\ \beta_k(g)/(\beta_k(g)t_i+1)),\ i\in S_k(g).$

(ii) $[\beta_k(g) \mid \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\theta}, g] \sim IG\left(\alpha_k(g) \mid S_k(g) \mid +c\ ,\ \dfrac{d}{d\sum_{i\in S_k(g)}\theta_i+1}\right),\ k=1,2,\cdots,d(g).$

(iii) $p(g \mid \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{\beta})$

$$\propto \prod_{k=1}^{d(g)} \prod_{i\in S_k(g)} \theta_i^{\alpha_k(g)} \beta_k(g)^{-(\alpha_k(g)\mid S_k(g)\mid +c+1)} \cdot \exp\left[-(\theta_i+\frac{1}{d})/\beta_k(g)\right]\cdot \frac{1}{G},\ g=1,2,\cdots,G.$$

여기서 θ_i들에 대한 베이즈 추정량과 그 추정량에 대한 표준오차를 계산하기 위해서 깁스표본방법을 사용하고자 한다.

깁스표본은 Geman 과 Geman(1984)에 의해서 처음으로 소개되었고, Gelfand 과 Smith(1990, 1991)에 의해 통계분야에서 널리 사용되었다. 그 후 Gelman 과 Rubin(1992)은 수렴성 진단을 위해 다중 수열을 이용한 반복적 시뮬레이션 방법을 제안하였다. 본 논문에서는 Gelman과 Rubin의 알고리즘에 따라 주변사후분포를 추정하고 모수들에 대한 베이즈 추정량과 그 추정량에 대한 표준오차를 계산한다.

과대산포(overdispersed)를 가진 분포로부터 생성된 초기 값 $U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, \cdots, U_p^{(0)}$를 사용하여, $U_1^{(1)} \sim [U_1 \mid U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, \cdots, U_p^{(0)}]$, $U_2^{(1)} \sim [U_2 \mid U_1^{(1)}, U_3^{(0)}, \cdots, U_p^{(0)}]$, $\cdots$, $U_p^{(1)} \sim [U_p \mid U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \cdots, U_{p-1}^{(1)}]$와 같이 각 각 표본을 생성한다. 각 각의 표본은 순서대로 생성되며, 한 주기에 p개의 표본이 생성된다. 이런 반복을 $2n$번 수행하면 $(U_1^{(2n)}, U_2^{(2n)}, \cdots, U_p^{(2n)})$의 표본이 생성된다. 이런 연쇄(chain)를 독립적으로 m개 병행하여 수행하면, 총 $2mn$개의 표본이 생성되나 수렴성을 확보하기 위해서 각 연쇄에서 처음 생성한 n개의 표본을 버리고 나면, 나머지 mn개의 표본 $(U_{1j}^{(l)}, \cdots, U_{pj}^{(l)})$ $(j=1,2,\cdots,m,\ l=n+1,\cdots,2n)$이 베이지안 추론에 사용된다. 따라서 사후 확률밀도함수는 다음과 같이 추정된다.

$$\widehat{[U_s]} \simeq (mn)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{2n}[U_s \mid U_{rj}^{(l)},\ r\neq s].$$

사후주변분포의 적률을 추정하기 위해서 흔히 Rao-Blackwell화된 추정을 사용한다. (참조Gelfand 과 Smith(1991)).

깁스 표본을 이용한 각 실험에서의 고장률 θ_i에 대한 사후평균은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} E[\theta_i \mid \underset{\sim}{x}, g] &= E[E(\theta_i \mid \beta_k(g), g, \underset{\sim}{x}) \mid \underset{\sim}{x}]. \\ &= E\left[\frac{\beta_k(g)(x_i+\alpha_k(g))}{\beta_k(g)t_i+1} \mid \underset{\sim}{x}\right] \\ &\simeq (mn)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{2n}\left[\frac{\beta_{kj}(g)^{(l)}(x_i+\alpha_k(g))}{\beta_{kj}(g)^{(l)}t_i+1}\right]. \end{aligned}$$

한편, θ_i에 대한 사후 분산은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} Var[\theta_i \mid \underset{\sim}{x}, g] &= E[Var(\theta_i \mid \underset{\sim}{x}, \beta_k(g), g) \mid \underset{\sim}{x}] + Var[E(\theta_i \mid \underset{\sim}{x}, \beta_k(g), g) \mid \underset{\sim}{x}] \\ &= E\left[\frac{\beta_k(g)^2(x_i+\alpha_k(g))}{(\beta_k(g)t_i+1)^2} \mid \underset{\sim}{x}\right] + Var\left[\frac{\beta_k(g)(x_i+\alpha_k(g))}{\beta_k(g)t_i+1} \mid \underset{\sim}{x}\right] \end{aligned}$$

$$\simeq (mn)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{2n}\left[\frac{\beta_{kj}(g)^{(l)^2}(x_i+\alpha_k(g))}{(\beta_{kj}(g)^{(l)}t_i+1)^2}\right]$$
$$+(mn)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{2n}\left[\frac{\beta_{kj}(g)(x_i+\alpha_k(g))}{\beta_{kj}(g)t_i+1}\right]^2$$
$$-\left[(mn)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{2n}\left(\frac{\beta_{kj}(g)(x_i+\alpha_k)}{\beta_{kj}(g)t_i+1}\right)\right]^2.$$

따라서 θ_i에 대한 베이즈 추정량과 분산은 모든 모형들로부터 결과들의 병합을 통해서 다음과 같이 계산된다.

$$E(\theta_i \mid \underline{x}) = \sum_{g=1}^{G} p(g \mid \underline{x}) \cdot E(\theta_i \mid \underline{x}, g)$$
$$Var(\theta_i \mid \underline{x}) = E[Var(\theta_i \mid \underline{x}, \beta_k(g))] + Var[E(\theta_i \mid \underline{x}, \beta_k(g))]$$
$$= \sum_{g=1}^{G} Var(\theta_i \mid \underline{x}, g) p(g \mid \underline{x}) + \sum_{g=1}^{G} E(\theta_i \mid \underline{x}, g)^2 p(g \mid \underline{x})$$
$$-\left(\sum_{g=1}^{G} E(\theta_i \mid \underline{x}, g) p(g \mid \underline{x})\right)^2.$$

여기서

$$p(g \mid \underline{x}) \simeq p(g \mid \underline{x}) / \sum_{g=1}^{G} p(g \mid \underline{x})$$
$$\simeq \frac{A}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{2n}\prod_{k=1}^{d(g)}\prod_{i\in S_k(g)} \theta_{ij}^{(l)^{\alpha_k(g)}} \ \beta_{kj}(g)^{(l)^{(\alpha_k(g)|S_k(g)|+c+1)}}$$
$$\cdot \exp[-(\theta_{ij}^{(l)}+1/d)/\beta_{kj}(g)^{(l)}]$$

이며 A는 상수이다.

4. 예제 및 결론

이 절에서는 1982년 전력연구원(Electric power research institute)보고서에 제출된 pump failure 자료 <표 1>을 사용하여 3절에서 제시한 부분교환가능한 포아송 실험에서 결과들의 병합에 대한 계층적 베이즈 추정량을 계산하고자 한다. 여기서 x_i는 i번째 실험에서 고장수이고 t_i는 작동한 시간(1000시간)이며, ρ_i는 관찰된 고장률, 즉 최우추정치를 나타내며 $\rho_i = x_i/t_i$이다.

여기서 편의상 서로 다른 10개의 포아송 실험에서 <표 2>와 같은 6개의 가능한 모형을 생각한다. 그리고 계층적 베이즈 모형의 마지막 단계에서 가능한 모든 모형에 대해 $\beta_k(g)$에 대한 초사전 분포의 모수 값은 초사전 분포를 확산화(diffuse)시키기 위해서 $c=d=0.00001$로 선택하였다. 그리고 $\alpha_k(g)$, $k=1,2,\cdots,d(g)$의 값은 (0.05, 0.5)의 구간의 값에서 임의로 선택하였다. 또한 Gelman, Rubin(1992)의 알고리즘에서 $m=10$과 $2n=20,000$을 사용하였으며, 100,000개의 깁스 표본을 사용하여 각 실험의 고장률에 대한 베이즈 추정량과 표준오차를 계산하였다.

<표 2>는 각 모형에 대한 사후확률을 나타낸다.

<표 1> Pump Failure 자료

실험	x_i	t_i	ρ_i
1	5	94.32	0.053
2	1	15.72	0.064
3	5	62.88	0.080
4	14	125.76	0.111
5	3	5.24	0.573
6	19	31.44	0.604
7	1	1.048	0.954
8	1	1.048	0.954
9	4	2.096	1.910
10	22	10.480	2.099

<표 2> 부분교환가능모형들의 사후확률분포

모형(g)	분 할	사후확률
1	$\{\{1\},\{2\},\cdots,\{10\}\}$	0.000
2	$\{\{1,2,\cdots,10\}\}$	0.005
3	$\{\{1,2,3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}$	0.120
4	$\{\{1,2,3,4\},\{5,6\cdots,10\}\}$	0.841
5	$\{\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,8\},\{9,10\}\}$	0.014
6	$\{\{1,6\},\{2,8\},\{3,10\},\{4,5\},\{7,9\}\}$	0.018

먼저 모형1(독립모형)에 대한 사후확률은 거의 0에 가까우며, 따라서 pump failure 자료는 독립모형일 가능성이 거의 없음을 알 수 있다. 그리고 모형2(교환가능모형)에 대한 사후확률 또한 0.005로서 교환가능모형일 가능성도 거의 없음을 알 수 있다. 그러나 부분교환가능모형 중에서 모형4 $\{\{1,2,3,4\},\{5,6\cdots,10\}\}$에 대한 사후확률이 0.841로서 가장 높음을 알 수 있으며, 결과들의 병합에서 모형4의 가중치가 가장 높게 나타남을 알 수 있다.

이것은 <표 1>에서 서로 다른 10개의 포아송 실험에서, 실험 {1,2,3,4}와 실험 {5,6,7,8,9,10}이 각각 유사성이 있는 부분군으로 분할될 확률이 가장 높음을 알 수 있다. 즉, 실험 {1,2,3,4}가 다른 실험들에 비해 실질적으로 유사성을 나타내며, 이것은 θ_i, $(i=5,6,\cdots,10)$에 대한 베이즈 추정치가 실험 {1,2,3,4}의 결과에 작게 영향을 받게 됨을 알 수 있다. 같은 방법으로 θ_j, $(j=1,2,3,4)$에 대한 베이즈 추정치는 실험 $\{5,6,\cdots,10\}$의 결과에 작은 영향을 받게 된다. 따라서 θ_j, $(j=1,2,3,4)$의 추정치는 실질적인 borrow strength 효과 때문에 k $(k\neq j,\ k=1,2,3,4)$번째

실험의 데이터에 의해 더 강하게 영향을 받는다. 그리고 θ_i, $(i=5,6,\cdots,10)$의 추정치는 l $(l \neq i,\ i=5,6,\cdots,10)$번째 실험의 데이터에 의해 더 강하게 영향을 받는다. 여기에 대한 결과는 <표 3>에 나타나 있다. 즉 <표 3>은 각 실험에서 고장률에 대한 베이즈 추정치와 표준오차를 나타내며, <표 3>에서 나타난 바와 같이 실험1과 실험10에서 고장률에 대한 베이즈 추정치가 큰값이나 작은값에 크게 축소되지(shrinking) 않음을 알 수 있다.

<표 3> 고장률에 대한 베이즈 추정치와 표준오차

실 험	베이즈추정치	표준오차
1	0.054	0.023
2	0.067	0.065
3	0.081	0.035
4	0.111	0.029
5	0.586	0.334
6	0.607	0.334
7	1.010	0.980
8	1.008	0.979
9	1.943	0.961
10	2.102	0.447

위에서 살펴본 바와 같이 본 논문에서는 서로 다른 포아송 실험에서 결과들의 병합에 대한 베이즈 추정량을 제안하였다. 서로 다른 실험에 대한 결과들의 병합에 대한 선행 연구(Malec과 Sedransk(1992), Consonni와 Veronese(1995))에서는 근사적 접근법을 사용한 것에 비해, 본 논문에서는 깁스표본 접근법을 사용하여 베이즈 추정량을 제안한 것에 의미가 있다. 그리고 사전분포에 대한 선택과 수명실험 등 다른 종류의 실험에 대한 결과들의 병합에 대해서는 향후과제로 남겨두고자 한다.

참고문헌

[1] Albert, J.H. (1985). Simultaneous Estimation of Poisson Means Under Exchangeable and Independent Models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 23, 1-14.

[2] Consonni, G. and Veronese, P. (1995). A Bayesian Method for Combining Results From Several Binomial Experiments. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 935-944.

[3] DuMouchel, W. and Harris, J. (1983). Bayes Methods for Combining the Results of Cancer Studies in Humans and Other Species, *Journal of the American Statistical Association*, 78, 293-307.

[4] Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M. (1990). Sampling-Based Approaches to Calculating

Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85, 398-409.

[5] Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M. (1991). Gibbs Sampling for Marginal Posterior Expectations. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 20, 1747-1766.

[6] Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic Relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 721-741.

[7] Gelman, A. and Rubin, D.B. (1992). Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences. *Statistical Sciences*, 7, 457-511.

[8] George, E.I., Markov, U.E. and Smith, A.F.M. (1993). Conjugate Likelihood Distribution. *Scandinavian Journal of Statistics*, 20, 147-156.

[9] Hedges, J.V. and Olkin, I. (1985). *Statistical Methods for Metaanalysis*. Orlando: Academic Press.

[10] Maleck, D. and Sedransk, J. (1992). Bayesian Methodology for Combining the Results From Different Experiments When the Specifications for Pooling are Uncertain. *Biometrika*, 79, 593-601.

[11] Natarajan, K., Ghosh, M. and Maiti, T. (1998). Hierarchical Bayes Quality Measurement Plan. *Communication in Statistics - Simulation and Computation*, 27, 199-214.