The Korean Communications
in Statistics Vol. 7, No. 2, 2000
pp. 489-497

# The Analysis of the M/M/1 Queue with Impatient Customers[1]

**Eui Yong Lee[2] , Kyung Eun Lim[3]**

## Abstract

The M/M/1 queue with impatient customers is studied. Impatient customers wait for service only for limited time $K>0$ and leave the system if their services do not start during that time. Notice that in the analysis of virtual waiting time, the impatient customer can be considered as the customer who enters the system only when his/her waiting time does not exceed $K$. In this paper, we apply martingale methods to the virtual waiting time and obtain the expected period from origin to the point where the virtual waiting time crosses over $K$ or reaches 0, and the variance of this period. With this results, we obtain the expected busy period of the queue, the distribution, expectation and variance of the number of times the virtual waiting time exceeding level $K$ during a busy period, and the probability of there being no impatient customers in a busy period.

*Keywords* : M/M/1 queue, Impatient customer, Busy period, Martingale

## 1. 서론

우체국, 은행 단말기, 인터넷 사이트와 같이 손님들이 들어와서 기다리다가 서비스를 받고 나가는 시스템을 통틀어서 대기모형이라 한다. 정보통신이 발달하면서 대기모형의 연구는 더욱 더 활발해지고 있다. 손님이 시스템에 들어오는 형태, 서비스 받는 시간, 서버의 수 등에 따라 여러 종류의 대기모형이 연구되고 있으며, 시스템에 대기하는 손님의 수, 손님이 기다리는 시간, 서버가 바쁜기간 등이 확률적으로 분석되고 있다. 본 연구에서는 손님들이 주어진 시간 이상 기다리게 되면은 서비스를 받지 않고 시스템을 빠져나가는 대기모형이 연구되는데, 이는 인터넷이 상용화 되고, 손님들에 대한 서비스의 속도가 빨라지고 있는 요즈음 그 필요성이 점차 강조되고 있다.

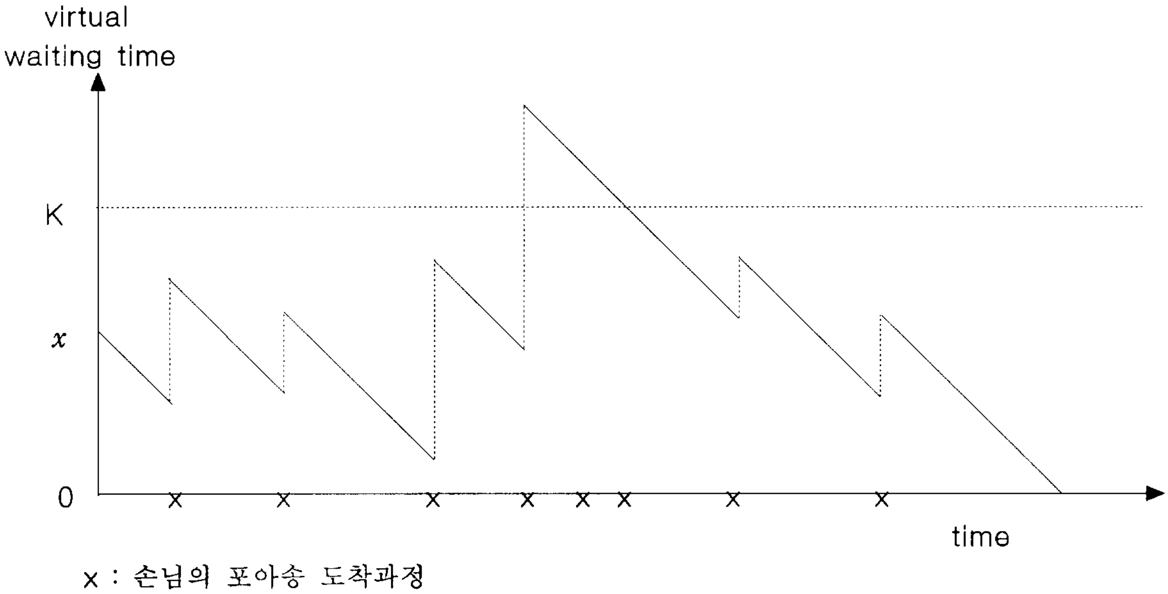
본 논문에서는 조급한 손님이 있는 M/M/1 대기모형이 연구된다. 이 모형에서의 손님은 도착률 $\lambda>0$ 인 포아송 과정에 따라 시스템에 도착하며, 손님이 도착한 후 $K>0$시간 이후에도 서비스가 시작되지 않으면 손님은 시스템을 떠나게 된다. 이러한 손님을 가상대기시간 (virtual waiting t

---

1) This paper was supported by Sookmyung Women's University Research Fund, 1999
2) Associate Prof., Department of Statistics, Sookmyung Women's University, seoul 140-742
E-mail : eylee@sookmyung.ac.kr
3) Graduate, Department of Statistics, Sookmyung Women's University
E-mail : smslke@intizen.com

ime)의 분석에서는 자신의 대기 시간이 $K$를 넘어서면 시스템에 들어오지 않는 손님이라고 간주할 수 있다. 또한 각 손님의 서비스 시간은 평균이 $\mu$인 지수분포를 따르고, 서버의 수는 1인 모형이다. 본 연구에서는 조급한 손님이 있는 M/M/1 대기모형을 $x(0<x\leq K)$에서 시작하는 가상대기시간과정에 대해 고려하여, 서버가 일을 시작하는 시점부터 손님이 기다려야 하는 시간이 주어진 $K$를 넘어서거나 0이 될 때까지의 기간, 서버가 일을 시작하는 시점부터 일이 없어질 때까지의 기간(busy period)과, 이와 관련된 연구가 이루어진다. 여기서 가상대기시간이란 주어진 시점에서 손님이 들어왔을 때 그 손님이 서비스를 받기까지 기다려야하는 시간이다. 이는 그 시점에서 서버가 해야 할 일(workload)라고 부르기도 한다.

조급한 손님이 있는 M/M/1 대기모형의 가상대기시간 과정은 아래의 그림과 같이 나타낼 수 있다.




<그림1> 조급한 손님이 있는 가상대기시간과정

위 그림은 $x$를 출발하여 서버가 일을 끝낼 때까지의 가상대기시간을 나타내며, 단위 시간당 서비스율은 1이고, 두 명의 조급한 손님이 있음을 알 수 있다.

Daley(1965)는 조급한 손님이 있는 대기모형에서, $K>0$를 넘어서지 않는 부분에 대한 가상대기시간의 극한분포를 얻었다. De Kok 과 Tijms(1985)는 조급한 손님이 있는 M/G/1 대기모형에서 $K>0$를 넘어서지 않는 부분에 대한 가상대기시간의 극한분포를 조급한 손님이 없는 대기모형에서의 가상대기시간의 극한분포를 이용하여 간단한 형태로 얻었다. 최근 Bae, Kim 과 Lee(1999)는 조급한 손님이 있는 M/G/1 대기모형에서 가상대기시간의 극한분포를 모든 영역에서 완전히 구했다. 그리고 Rosenkrantz(1983)는 마팅게일 기법을 이용하여 조급한 손님이 없는 일반적인 M/G/1 대기모형에서 서버가 바쁜기간의 라플라스 변환을 구했다.

본 논문의 2장에서는 서버가 $x$에서 일을 시작한 후 손님의 대기시간이 $K$를 넘거나 0에 도착하는데까지 걸리는 시간, $T_x$의 기대값과 분산을 마팅게일 기법을 이용하여 구하며, 3장에서는 서버의 바쁜기간(busy period)의 기대값이 구해진다. 4장에서는 바쁜기간 동안 가상대기시간이 $K$를 넘어서게 되는 회수의 확률분포 및 기대값과 분산, 이 기간 동안 조급한 손님이 없을 확률 등을 구한다.

## 2. $T_x$의 기대값과 분산

이 장에서는 조급한 손님이 있는 M/M/1 대기모형에서, 서버가 일을 시작한 후 가상대기시간이 $K$를 넘거나 0에 도착하는데까지 걸리는 시간의 기대값과 분산을 구하고자 한다.

$\{X(t), t\geq 0\}$ 를 $(0, K]$내의 $x$점에서 시작된 가상대기시간 과정, $N(t)$를 손님의 포아송 도착과정, $Y_1, Y_2, \cdots$ 를 도착한 손님들의 서비스 시간으로 정의하면, $X(t)$가 $K$를 넘거나 0에 도착하기 이전까지는

$$X(t) = x + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - t$$

가 된다. 여기서 $T_x = inf\{t>0 | X(t) \notin (0, K]\}$ 로 정의하자.

위에서 정의된 $T_x$의 기대값과 분산을 구하기 위하여 마팅게일 기법을 이용한다. $X(t)$로 부터 다음 3종류의 마팅게일을 만들어내고, 각각의 마팅게일을 통해 $P\{X(T_x) = 0\}, P\{X(T_x) > K\}$와 $T_x$의 기대값, 분산을 구한다.

마팅게일 :

i) $W(t) = \dfrac{e^{-sx - sX(t)}}{E[e^{-sX(t)}]}$ 는 $X(t)$의 라플라스 변환(Laplace transform)을 이용하여 만들며, 기대값이 $e^{-sx}$인 마팅게일이다. 여기서

$$
\begin{aligned}
E[e^{-sX(t)}] &= E[e^{-s(x+\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - t)}] \\
&= e^{-sx+st} E[e^{-s\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i}] \\
&= e^{-sx+t(s+\lambda b^*(s)-\lambda)}
\end{aligned}
$$

이다. 따라서 $W(t) = e^{-sX(t)-t(s+\lambda b^*(s)-\lambda)}$ 로 정의 되며, $b^*(s)$는 손님의 서비스 시간 $Y_i$의 라플라스 변환을 나타낸다.

ii) $U(t) = X(t) - (\lambda\mu - 1)t$ 는 $X(t)$의 기대값을 이용하여 만들며, 기대값이 $x$인 마팅게일이다. 여기서

$$E[X(t)] = x + \lambda\mu t - t$$

이다.

iii) $V(t) = X^2(t) - E[X^2(t)]$ 는 $X(t)$의 이차적률을 이용하여 만들며 기대값이 0인 마팅게일이다. 여기서

$$E[X^2(t)] = x^2 + E(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i)^2 + t^2 + 2x\lambda\mu t - 2xt - 2\lambda\mu t^2$$

이고,

$$
\begin{aligned}
E(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i)^2 &= Var(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i) + [E(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i)]^2 \\
&= E(N(t))Var(Y) + (E(Y))^2 Var(N(t)) + (\lambda t\mu)^2 \\
&= 2\lambda t\mu^2 + (\lambda t\mu)^2
\end{aligned}
$$

이다.

위에서 만들어진 마팅게일 중 i)은 Wald에 의해 만들어진 마팅게일로 Wald's martingale이라고도 하며, 본 연구에서는 Wald's martingale의 특별한 경우로 $s = \frac{\lambda\mu - 1}{\mu}$ 인 경우만을 고려하기로 한다. 즉, 고려되는 마팅게일은 $W(t) = e^{-sX(t)}$ 가 된다.

다음은 Karlin and Taylor(1975)의 Optional Stopping Theorem을 요약한 것이다.

**Theorem** (Optional Stopping Theorem)

$T$ 가 확률과정 $\{X(t), t \geq 0\}$의 Stopping time이고,

i) $P\{T < \infty\} = 1$
ii) $E[sup_{0<t<\infty}|X(t \wedge T)|] < \infty$ 이면,

$E[X(T)] = E[X(0)]$

이다. 여기서 $(t \wedge T) = \min(t, T)$이다.

$T_x = inf\{t > 0 | X(t) \notin (0, K]\}$이 Stopping time이므로, 위에서 만들어낸 Wald의 마팅게일에 O.S.T.(Optional Stopping Theorem)을 적용하고, $X(T_x) > K$인 경우, 지수분포의 망각특성 때문에 $X(T_x) = K + Y$ ( $Y$는 평균이 $\mu$인 지수확률변수)이 되는 사실을 이용하면,

$$\begin{aligned} e^{-sx} &= E[W(0)] = E[W(T_x)] = E[e^{-sX(T_x)}] \\ &= P\{X(T_x) = 0\} + \frac{e^{-sK}}{s\mu + 1} \cdot P\{X(T_x) > K\} \end{aligned}$$

이 된다. 이를

$$1 = P\{X(T_x) = 0\} + P\{X(T_x) > K\}$$

과 함께 풀면, 우리는

$$\begin{aligned} P\{X(T_x) = 0\} &= \frac{e^{-sK} - (s\mu + 1)e^{-sx}}{e^{-sK} - s\mu - 1} \\ P\{X(T_x) > K\} &= \frac{(e^{-sx} - 1)(s\mu + 1)}{e^{-sK} - s\mu - 1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

를 얻을 수 있다.

$T_x$의 기대값은 마팅게일 $U(t) = X(t) - (\lambda\mu - 1)t$를 이용하여 구할 수 있다. 즉, O.S.T.를 $U(t)$에 적용하면,

$$x = E[U(0)] = E[U(T_x)] = E[X(T_x)] - (\lambda\mu - 1)E(T_x) \tag{2.2}$$

이 된다. 여기서 다시 $X(T_x) > K$인 경우에 $X(T_x) = K + Y$인 사실을 이용하면,

$$E[X(T_x)] = \mu\left[\frac{(e^{-sx}-1)(s\mu+1)}{e^{-sK}-s\mu-1}\right]$$

이 된다. 이를 (2.2)에 대입하면,

$$E(T_x) = \frac{\mu}{\lambda\mu-1}\left[\frac{(e^{-sx}-1)(s\mu+1)}{e^{-sK}-s\mu-1}\right] - \frac{x}{\lambda\mu-1} \tag{2.3}$$

이 구해진다.

위와 같은 방법으로 마팅게일 $V(t) = X^2(t) - E[X^2(t)]$를 이용하면 $T_x$의 이차적률을 유도할 수 있다. 즉, O.S.T를 $V(t)$에 적용하면,

$$\begin{aligned} 0 = E[V(0)] = E[V(T_x)] &= E[X^2(T_x) - E(X^2(T_x))] \\ &= E[X^2(T_x)] - x^2 - 2E(T_x)[x(\lambda\mu-1) + \lambda\mu^2] \qquad (2.4) \\ &\quad + E(T_x^2)[(\lambda\mu-2)\lambda\mu+1] \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $X(T_x) > K$인 경우에 $X^2(T_x) = (K+Y)^2$인 사실을 이용하면,

$$E[X^2(T_x)] = (K^2 + 2K\mu + 2\mu^2)\frac{(e^{-sx}-1)(s\mu+1)}{e^{-sK}-s\mu-1}$$

이 된다. 이를 (2.4)에 대입하면,

$$E(T_x^2) = \frac{\left[\frac{(e^{-sx}-1)(s\mu+1)}{e^{-sK}-s\mu-1}\right]\left\{2\mu\left[x-K+\frac{\mu}{\lambda\mu-1}\right]-K^2\right\} - x\left\{x+\frac{2\lambda\mu^2}{\lambda\mu-1}\right\}}{(\lambda\mu-2)\lambda\mu+1} \tag{2.5}$$

이 된다.

## 3. 서버의 바쁜 기간

이 장에서는 조급한 손님이 있는 M/M/1 대기모형에서 바쁜기간의 기대값을 구하고자 한다.

가상대기시간과정 $X(t)$가 강한 마르코프 성질(Strong Markov property)을 가지고 있으므로,

바쁜기간, $B_x$는 확률 1로(almost surely)

$$B_x = \begin{cases} T_x , & X(T_x) = 0 \text{인 경우} \\ T_x + Y + B_K , & X(T_x) > K \text{인 경우} \end{cases}$$

이 된다. 여기서 $B_K$는 $K$에서 시작하는 바쁜기간이다.

$X(t)$가 강한 마르코프 성질을 만족함을 이용하여 바쁜기간의 기대값을 구하면,

$$\begin{aligned} E(B_x) &= E(B_x | X(T_x) = 0) \cdot P\{X(T_x) = 0\} + E(B_x | X(T_x) > K) \cdot P\{X(T_x) > K\} \\ &= E(T_x | X(T_x) = 0) \cdot P_0^x + E(T_x + Y + B_K | X(T_x) > K) \cdot P_K^x \\ &= E(T_x | X(T_x) = 0) \cdot P_0^x + E(T_x | X(T_x) > K) \cdot P_K^x \\ &\quad + E(Y | X(T_x) > K) \cdot P_K^x + E(B_K | X(T_x) > K) \cdot P_K^x \\ &= E(T_x) + \mu P_K^x + E(B_K) P_K^x \end{aligned} \tag{3.1}$$

이 된다. 여기서 $P_0^x = P\{X(T_x) = 0\}$이고, $P_K^x = P\{X(T_x) > K\}$이다.

$E(B_K)$를 구하기 위해 (3.1)에서 $x = K$로 놓으면,

$$E(B_K) = E(T_K) + \mu P_K^K + E(B_K) \cdot P_K^K$$

이 되고, 이를 $E(B_K)$에 관하여 풀면,

$$E(B_K) = -\frac{[\lambda\mu^2(e^{-sK} - 1)(s\mu + 1) - K(e^{-sK} - s\mu - 1)]}{(\lambda\mu - 1)s\mu e^{-sK}} \tag{3.2}$$

이 된다. 이를 (3.1)에 대입하면,

$$E(B_x) = \frac{Z(x, s, \mu, \lambda, K)}{(\lambda\mu - 1)(e^{-sK} - s\mu - 1)s\mu e^{-sK}}$$

이 된다. 여기서

$$Z(x,s,\mu,\lambda,K)= \lambda\mu^2[(s\mu+1)s\mu e^{-sx}+s\mu(e^{-sK}-s\mu-2)-1]$$

$$-(e^{-sK}-s\mu-1)[xs\mu e^{-sK}-K(e^{-sx}-1)(s\mu+1)]$$

이다.

## 4. 바쁜기간 동안 조급한 손님이 없을 확률

이 장에서는 서버가 바쁜기간 동안 가상대기시간이 주어진 $K>0$를 넘어서게 되는 회수에 관한 확률분포 및 기대값과 분산, 그리고 이 기간 동안 조급한 손님이 한 명도 없을 확률 등이 구해진다.

$N$을 바쁜기간 동안 가상대기시간이 주어진 $K$를 넘어서게 되는 회수라고 하자, $X(t)$가 강한 마르코프 성질을 만족함을 이용하면 회수 $N$의 확률분포는

$$P\{N=0\}=P_0^x$$

$$P\{N=n\}=P_K^x\, {P_K^K}^{n-1} P_0^K \qquad , \ n=1,2,3,4,\cdots$$

이 되고, 기대값은

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P\{N=n\}$$

$$=\frac{P_K^x P_0^K}{(1-P_K^K)^2}$$

임을 알 수 있다.

위와 같은 방법을 이용하여 $N$에 대한 이차 적률을 구해보면,

$$E(N^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\cdot P\{N=n\}$$

$$=\frac{P_K^x P_0^K(1+P_K^K)}{(1-P_K^K)^3}$$

임을 알 수 있다.

위에서 구한 $N$의 확률분포를 이용하면, 서버가 바쁜기간 동안 조급한 손님이 한명도 없을 확률을 구할 수 있다. $E_\lambda$를 평균이 $1/\lambda$인 지수확률변수라 하고, $S_n$을 가상대기시간이 $n$번째로 $K$를 넘어가 있는 기간(평균이 $\mu$인 지수분포), $A_n$을 $S_n$ 동안에 조급한 손님이 없는 사상이라고 하면,

$$
\begin{aligned}
&P\,\{\text{바쁜 기간 동안 조급한 손님이 한명도 없슴}\}\\
&= P_0^x + P\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N\}\\
&= P_0^x + \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \cdot P\{N=n\}\\
&= P_0^x + \sum_{n=1}^{\infty} [P\{A_1\}]^n \cdot P\{N=n\}
\end{aligned}
$$

이다. 여기서 $P\{A_1\} = P\{E_\lambda > S_1\} = \dfrac{1}{\lambda\mu+1}$임을 이용하면, 위 확률은

$$
P_0^x + \frac{P_K^x P_0^K}{\lambda\mu+1-P_K^K}
$$

이 됨을 알 수 있다.

## 참고문헌

[1] Daley, D. J. (1965) General customer impatience in the queue GI/G/1. *Journal of Applied Probability,* Vol. 2, 186-205.

[2] De Kok, A. G. and Tijms, H. C. (1985) A queueing system with impatient customers. *Journal of Applied Probability*, Vol. 22, 688-696.

[3] Bae. J. H., Kim. S. G. and Lee. E. Y. (1999) The virtual waiting time of the M/G/1 queue with impatient customers. *Submitted to Queueing Systems.*

[4] Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975) *A first coure in stochastic processes,* Academic Press, New York.

[5] Rosenkrantz W.A. (1983) Calculation of the Laplace transform of the length of the busy period for the M/G/1 queue via martingales. *Annals of Probability,* Vol. 11, 817-818.