The Korean Communications
in Statistics Vol. 7, No. 1, 2000
pp. 107-117

A Studies on Symmetric Type Multiple Unit Roots Test

Yil-Yong Park[1] and Key-Il Shin[2]

Abstract

Due to the close relation between cointegration test and multiple unit roots test, multiple unit roots test are greatly studied by many researchers. In this paper we suggest the symmetric type unit roots test which is an adjusted method of Shin (1999). Also we have a small Monte-Carlo simulation study to compare the power of the statistic developed in this paper with those of Shin (1999) and adjusted Fuller statistic (1996).

1. 서론

최근 경제 시계열 분석에 있어서 단위근 검정법(unit root test) 또는 공적분 검정법(cointegration test)의 사용이 증가되고 있다. 이러한 추세에 맞추어 공적분 검정은 Engle과 Granger (1987)의 연구를 포함하여 많은 논문이 발표되고 있다. 일반적으로 공적분 검정은 다변량 AR(p) 모형에서 변량들의 선형 결합이 정상 시계열을 이룰 때 선형 결합의 수를 검정하는 것으로 다중 단위근 검정법과 같은 것으로 알려져 있다.

다음의 k 차원 다변량 AR(1) 모형을 고려하자.

$$Y_t - \nu = A(Y_{t-1} - \nu) + \eta_t, \quad t \geq 1 \tag{1}$$

여기서 η_t는 평균이 "0" 이고 분산이 Ω인 다변량 정규분포를 따르며 $Y_0 = \nu$ 이다. 이제 (1)의 특성방정식을 다음과 같이 정의하자.

$$C(m) = det(A - mI) \tag{2}$$

식 (2)에서 얻어진 근들의 절대값이 모두 "1" 보다 작으면 (1)에서 정의한 시계열은 정상 시계열이 된다. 그러나 근의 절대값 중에 "1"이 있는 경우는 비정상 시계열이 된다. 결국 특성방정식의 근에 "1"이 포함되어 있는지의 검정은 분석에 있어서 중요하다. 또한 절대값이 "1"보다 작은 근의 개수가 공적분 벡터의 개수가 되므로 근 중에서 "1"의 값을 갖는 근의 수를 알아내어 공적분 벡터의 개수를 알아내는 것도 분석에 있어 중요하다.

이제 Shin(1999) 또는 Fountis 와 Dickey(1989)에서처럼 다음을 만족하는 행렬 R이 존재한다고 가정하자.

1) (449-791) (449-791) Graduate Department of Statistics, Hahkuk University of Foreign Studies, Yongin, Kyunggi, Korea
2) (449-791) Associate Professor, Hahkuk University of Foreign Studies, Yongin, Kyunggi, Korea

$$\Phi = R^{-1}AR = \begin{pmatrix} I_r & O' \\ O & \Phi_{22}^{*} \end{pmatrix} \tag{3}$$

여기서 O는 적당한 영행렬이고 Φ_{22}^{*}는 “1” 보다 작은 고유치(eigenvalue)를 갖는 행렬이다. 그러면 (1)의 R^{-1}에 의해 변환된 식은

$$X_t - \mu = \Phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t, \quad t \rangle = 1 \tag{4}$$

이 된다. 여기서 ε_t는 평균이 “0”이고 분산이 $\Sigma = R^{-1}\Omega R^{-1'}$인 정규분포를 따른다. 이제 Φ의 최소제곱 추정량을 $\Phi_{\mu,ols}$라 하자. Phillips 과 Durlauf(1986)은 H_0 : $\Phi = I_k$의 검정을 위한 여러 통계량을 제안하였으며 $\Phi_{\mu,ols}$의 극한 분포를 유도하였다. Shin(1999)은 “ H_0 : Φ가 r, $r \leq k$, 개의 단위근을 갖고 있다.”를 검정하기 위하여 $n(det(\Phi_{\mu,ols}) - 1)$, $n(trace(\Phi_{\mu,ols}) - r)$ 을 제안하였다. 두 통계량의 검정력 비교에서는 $n(trace(\Phi_{\mu,ols}) - r)$이 우수한 것으로 나타났다. Shin(1999)에 의하면 이 통계량들과 현재 다중 단위근 검정 통계량으로 널리 사용되고 있는 Johansen (1988)을 비교해 보았을 때 오차의 분산 행렬이 대각 행렬에 가까운 경우는 Shin(1999)이 제안한 검정방법이 우수하고 그 외의 경우에는 Johansen이 제안한 방법이 우수한 것으로 나타났다.

일반적으로 R 행렬은 알려져 있지 않기 때문에 (4)식을 이용한 검정 통계량은 의미가 없는 것처럼 보일 수 있다. 그러나 행렬 A의 고유치(eigenvalue)를 기초로 한 검정통계량은 R 행렬에 영향을 받지 않기 때문에 (4)식을 사용하여 이론을 전개하여도 일반성을 잃지 않게 된다. 이에 관한 내용은 Shin(1999)를 참조하기 바란다.

본 논문의 2 절에서 Shin(1999)에서 제안한 방법을 개선한 대칭 다중 단위근 검정법을 제안하였으며 3 절에서는 모의 실험을 통하여 제안한 검정법과 Johansen (1988)이 제안한 방법을 개선한 수정된 Fuller 통계량, 그리고 Shin(1999)이 제안한 방법을 비교하여 보았다. 4 절에 결어가 있다.

2. 대칭형 다중 단위근 검정법

(4)에서 정의한 AR(1) 모형을 고려하자. 그리고 다중 단위근 검정 통계량으로 다음을 정의하자.

$$n(trace(\Phi_{\mu,sym}) - r) \tag{5}$$

여기서

$$\Phi_{\mu,sym} = 1/2 \sum_{t=1}^{n} (X_{t-1}^{*}{}' X_t^{*} + X_t^{*}{}' X_{t-1}^{*}) [\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{*}{}' X_{t-1}^{*}]^{-1} \tag{6}$$

이고, $X_t^{*} = X_t - \overline{X}$, $\overline{X} = 1/n \sum_{t=1}^{n} X_t$이다. 이제

$$W_1=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{1t}X_{1t-1}^{*}{}',\quad W_2=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{1t}X_{2t-1}^{*}{}',\quad W_3=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{2t}X_{1t-1}^{*}{}',\quad W_4=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{2t}X_{2t-1}^{*}{}',$$
$$W_5=\sum_{t=1}^{n}X_{1t-1}^{*}X_{1t-1}^{*}{}',\quad W_6=\sum_{t=1}^{n}X_{2t-1}^{*}X_{1t-1}^{*}{}',\ W_7=\sum_{t=1}^{n}X_{2t-1}^{*}X_{2t-1}^{*}{}'$$

이라 하자. 여기서 X_{1t}^{*}, ε_{1t}^{*}는 r차원 비정상 시계열과 이에 해당하는 오차를 나타내고 X_{2t}^{*}, ε_{2t}^{*} 는 $k-r$차원 비정상 시계열과 이에 해당하는 오차를 나타낸다. (7) 식의 차수는 Shin(1994)에 의해

$$W_1=O_p(n),\quad W_2=O_p(n^{1/2}),\quad W_3=O_p(n),\quad W_4=O_p(n^{1/2}),\quad W_5=O_p(n^2),$$
$$W_6=O_p(n)\ \text{그리고}\ W_7=O_p(n) \tag{7}$$

이 된다.

그러면 (6)은

$$\Phi_{\mu,sym}-\Phi=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n}(\varepsilon_{1t}X_{1t-1}^{*}{}'+X_{1t-1}^{*}\varepsilon_{1t}{}') & \sum_{t=1}^{n}(\varepsilon_{1t}X_{2t-1}^{*}{}'+X_{1t-1}^{*}\varepsilon_{2t}{}')\\ \sum_{t=1}^{n}(\varepsilon_{2t}X_{1t-1}^{*}{}'+X_{2t-1}^{*}\varepsilon_{1t}{}') & \sum_{t=1}^{n}(\varepsilon_{2t}X_{2t-1}^{*}{}'+X_{2t-1}^{*}\varepsilon_{2t}{}')\end{bmatrix}$$
$$\cdot\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n}X_{1t-1}^{*}X_{1t-1}^{*}{}' & \sum_{t=1}^{n}X_{1t-1}^{*}X_{2t-1}^{*}{}'\\ \sum_{t=1}^{n}X_{2t-1}^{*}X_{1t-1}^{*}{}' & \sum_{t=1}^{n}X_{2t-1}^{*}X_{2t-1}^{*}{}'\end{bmatrix}^{-1}$$

이 된다. 표현을 간단히 하기 위하여 $\Phi_{\mu,sym}-\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_{sym,11} & \Phi_{sym,12}\\ \Phi_{sym,21} & \Phi_{sym,22}\end{bmatrix}$라 하자. 여기서 $\Phi_{sym,11}$은 $r\times r$ 행렬로 r개의 단위근에 대응되는 행렬이다. 그러면 (7)에 의해서 $\Phi_{sym,11}$, $\Phi_{sym,21}$ 그리고 $\Phi_{sym,22}$는 일치 추정량이 됨을 알 수 있다. 그러나 $\Phi_{sym,21}$은 최소 제곱 추정량을 사용할 경우와 달리 일치 추정량이 아니다.

(6)에 관한 연구는 Phillips 과 Durlauf(1986)과 Shi(1994)을 참조하기 바란다. 이제 $\Phi_{\mu,sym}$의 고유치(eigenavlue)를 λ_i라 하자. 그러면 λ_i는 일치 추정량(consistent estimator)이 됨을 알 수 있고 이때의 수렴속도는 정리 1 과 같다.

정리 1 : k 차원 AR(1) 모형이 r, $r\leq k$, 개의 단위근을 갖는다고 하자. 이때 $\Phi_{\mu,sym}$의 고유치(eigenavlue), λ_i 는 다음을 만족한다.

$$n(\lambda_i-1)=O_p(1),\ \ 1\leq i\leq r,\ \ \sqrt{n}(\lambda_i-\lambda_i^{*})=O_p(1),\ \ r<i \tag{8}$$

여기서 λ_i^*는 (3)에서 정의된 Φ_{22}^*의 고유치이다.

증명 : $\Phi_{\mu,sym} = \begin{bmatrix} \Phi_{sym,11} & \Phi_{sym,12} \\ \Phi_{sym,21} & \Phi_{sym,22} \end{bmatrix}$에서 $\Phi_{sym,11}$, $\Phi_{sym,21}$ 그리고 $\Phi_{sym,22}$는 일치 추정량이므로 n이 커질 때 $\lambda_i \to 1$, $1 \le i \le r$, 이고 $\lambda_i \to \lambda_i^*$, $r < i \le k$가 된다.

먼저 $1 \le i \le r$인 i의 경우를 살펴보자.

$|\Phi_{\mu,sym} - \lambda_i I| = |\Phi_{sym,22} - \lambda_i I||\Phi_{sym,11} - \lambda_i I + \Phi_{sym,12}(\Phi_{sym,22} - \lambda_i I)^{-1}\Phi_{sym,21}| = 0$에서

$\Phi_{sym,22}$는 (3)을 만족하는 Φ_{22}^*에 수렴하므로 $|\Phi_{sym,22} - \lambda_i I| \to |\Phi_{22}^* - I| \neq 0$이다.

따라서

$$|\Phi_{sym,11} - \lambda_i I + \Phi_{sym,12}(\Phi_{sym,22} - \lambda_i I)^{-1}\Phi_{sym,21}| = 0 \tag{9}$$

을 만족해야 한다.

$\Phi_{sym,12} = O_p(1)$, $(\Phi_{sym,22} - \lambda_i I)^{-1} = O_p(1)$, $\Phi_{sym,21} = O_p(n^{-1/2})$ 이므로

$\Phi_{sym,12}(\Phi_{sym,22} - \lambda_i I)^{-1}\Phi_{sym,21} = \Psi$ 라 하면 $\Psi = O_p(n^{-1})$이다.

따라서 (9)에 의해 $|n(\Phi_{sym,11} - I) + n(\lambda_i - 1)I + n\Psi| = 0$ 이므로 Searl(1982)의 두 행렬 합의 행렬식의 확장 공식에 의해 $n(\lambda_i - 1) = O_p(1)$이 된다.

같은 방법을 이용하면 $\sqrt{n}(\lambda_i - \lambda_i^*) = O_p(1)$, $r < i$ 가 됨을 보일 수 있다.

위의 증명에서 알 수 있듯이 대칭형 다중 단위근 검정통계량에서 정상 시계열의 존재는 비정상 시계열의 고유치의 극한 분포에 영향을 주는 것으로 나타났으며 이는 최소제곱 추정량을 사용하는 경우와는 다른 결과이다. 그러나 최소 제곱 추정량을 사용할 경우에도 자료의 수가 매우 크지 않는 한 정상 시계열의 존재가 경험적 분포에 영향을 주게된다. 이러한 경우 단위근 검정을 위하여 정상 시계열이 존재하지 않는 경우에서 얻어진 임계값을 사용하는 것이 일반적이다. 따라서 대칭형 단위근 검정법에서도 검정 통계량의 임계값으로 정상 시계열이 없을 경우의 경험적 분포를 사용한다.

이제 정상 시계열이 없는 경우를 살펴보자. 즉 $X_t - \mu = \Phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$, $t >= 1$ 에서 H_0 : $\Phi = I_k$의 검정에 대하여 고려해보자.

$$\Phi_{\mu,sym} = 1/2 \sum_{t=1}^{n}(X_{t-1}^{*\prime} X_t^* + X_t^{*\prime} X_{t-1}^*)[\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^{*\prime} X_{t-1}^*]^{-1}$$

이고 이 때의 고유화(trace)를 구하면 다음과 같다.

$trace(\Phi_{\mu,sym})$

$= 1/2 trace(\sum_{t=1}^{n}(X_{t-1}^{*\prime} X_t^*)[\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{*\prime} X_{t-1}^*]^{-1}) + 1/2 trace(\sum_{t=1}^{n}(X_t^{*\prime} X_{t-1}^*)[\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{*\prime} X_{t-1}^*]^{-1})$

$= trace(\sum_{t=1}^{n}(X_{t-1}^{*\prime} X_t^*)[\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{*\prime} X_{t-1}^*]^{-1}) = trace(\Phi_{\mu,ols})$

따라서 H_0 : $\Phi = I_k$ 를 검정하기 위한 통계량은 최소 제곱 추정량을 사용할 때와 같은 결과를 주고 있으며 결과적으로 같은 경험적 분포와 같은 검정력을 갖게 된다. 그러나 Φ 가 k 보다 작은 r개의 단위근을 갖

는지에 관한 검정에서는 다음절의 모의 실험 결과 대칭형 단위근 검정법이 더 우수한 것으로 나타났다.

3. 모의 실험

이 절에서는 대칭형 단위근 검정법과 Shin(1999) 그리고 Johansen(1988)이 제안한 방법을 개선한 수정된 Fuller(1996)의 검정법을 모의 실험을 통하여 비교하였다. 전 절에서도 언급하였듯이 대칭형 단위근 검정법의 경험적 분포가 Shin(1999)이 제안한 방법과 동일하기 때문에 본 논문에는 실지 않았다. 또한 Fuller (1996)는 Johansen의 통계량에 기초를 둔 다음의 통계량을 제안하였으며 이 통계량의 검정력이 우수함을 보였다.

$$\lambda_{jo}^{*} = (1 + d_f^{-1}\widehat{\lambda_{jo}}\ )^{-1}\widehat{\lambda_{jo}} \tag{10}$$

여기서 $\widehat{\lambda_{jo}}$는 Johansen 이 제안한 통계량이고 d_f는 자유도이다. 이에 관한 내용은 Fuller(1996)을 참조하기 바란다. 따라서 검정력 비교에 사용된 통계량으로 (10)을 이용하였다.

실험에서는 평균이 "0"이 아닌 다음의 2 차원 AR(1) 모형을 고려하였다.

$$Y_t - \nu = A(Y_{t-1} - \nu) + \eta_t, \quad 1 \le t \le 100$$

백색잡음과정 η_t는 FORTRAN/RANNOR를 이용하여 평균 "0", 분산 $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}$인 정규분포에서 추출하였으며 평균 ν는 "0"을 사용하였다. 또한 여러 형태의 A 행렬에 관한 검정력을 살펴보기 위하여 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$에서 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$에 여러 값을 대입하였다. 또한 η_t의 분산인 Ω의 영향을 살펴보기 위하여 β값도 변화시켰다. 먼저 두 개의 단위근의 존재를 검정하기 위하여 다음의 세 가지 경우를 살펴보았다. 전 절에서도 살펴보았듯이 Shin(1999)이 제안한 방법과 대칭형 검정 통계량이 같은 값을 갖기 때문에 이 경우는 대칭형 검정법과 Johansen 통계량만을 비교하였다. 이 중에서 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$이고 $\beta = 0,\ 1$ 인 경우의 검정력은 Shin(1999)을 살펴보기 바란다.

경우 (1) : 두 개의 단위근 검정

1. $\beta = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0.1,\ 0.2,\ 0.3$
2. $\beta = 0,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0.05,\ 0.1$
3. $\beta = 1,\ 2,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0.1$

각 경우에서 $\alpha_1,\ \alpha_2$는 $0.7,\ 0.8,\ 0.85,\ 0.9,\ 0.95$를 사용하였다.

다음으로 2 차원 AR(1) 모형에서 하나의 단위근이 있는지를 검정하기 위한 통계량들의 검정력을 비교하기 위하여 다음의 경우(2)를 살펴보았다.

경우 (2) : 한 개의 단위근 검정

4. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \alpha_1 = 1$

이 때 $\alpha_2 = 0.8,\ 0.85,\ 0.9,\ 0.95,\ \beta = 0,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.7,\ 1,\ 2,\ 5$를 사용하였다.

경우 (2)는 경우 (1)과 달리 대칭형 검정법과 Shin 이 제안한 검정 통계량이 차이가 나므로 각각의 검정력을 구하여 비교하였다.

모든 검정력은 50,000번 반복한 결과이며 이때 사용한 5% 임계값은 다음과 같다.

< 표 1 : 5% 임계값 >

검정 통계량	두 개의 단위근 검정	한 개의 단위근 검정
Johansen 통계량	17.78	14.45
대칭형 단위근 통계량	-26.28	-21.74
Shin 통계량	-26.28	-22.17

본 모의 실험에서 얻어진 임계값과 Fuller(1996) 그리고 Shin(1999)을 비교해 보면 위의 표에 나타난 값이 약간 작은 값으로 나타났다. 결과는 < 표 2 >에서 < 표 9 >에 나와있다.

경우 (1) : 두 개의 단위근 검정

< 표 2 : $\beta=0$, $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0.1$>

			α_1				
			0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
α_2	0.7	trace	100.00	100.00	99.96	99.69	98.52
		Fuller	99.99	99.85	99.40	97.59	93.32
	0.8	trace		99.57	98.27	93.22	81.83
		Fuller		97.70	93.29	84.76	71.86
	0.85	trace			93.27	80.39	59.78
		Fuller			84.74	71.72	57.12
	0.9	trace				58.89	34.61
		Fuller				57.04	44.25
	0.95	trace					16.11
		Fuller					37.22

< 표 3 $\beta=0$, $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0.2$ >

			α_1				
			0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
α_2	0.7	trace	100.00	99.99	99.94	99.57	97.93
		Fuller	100.00	99.96	99.87	99.40	98.26
	0.8	trace		99.64	97.50	90.35	74.71
		Fuller		99.51	98.55	96.12	92.53
	0.85	trace			90.09	73.08	48.94
		Fuller			96.17	92.93	88.78
	0.9	trace				47.78	23.74
		Fuller				88.87	86.41
	0.95	trace					8.75
		Fuller					87.35

< 표 4 $\beta=0$, $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0.3$ >

			α_1				
			0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
α_2	0.7	trace	100.00	99.99	99.89	99.46	96.92
		Fuller	100.00	100.00	99.98	99.97	99.84
	0.8	trace		99.49	96.56	87.38	68.53
		Fuller		99.96	99.88	99.69	99.47
	0.85	trace			87.05	66.97	41.13
		Fuller			99.75	99.46	99.10
	0.9	trace				39.74	18.39
		Fuller				99.26	99.11
	0.95	trace					6.29
		Fuller					99.29

< 표 5 $\beta=0$, $\gamma_1=\gamma_2=0.05$ >

			α_1				
			0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
α_2	0.7	trace	100.00	99.99	99.97	99.77	98.85
		Fuller	99.99	99.79	99.02	96.26	89.53
	0.8	trace		99.78	98.78	94.71	85.45
		Fuller		96.32	89.51	76.49	59.71
	0.85	trace			94.63	82.73	67.67
		Fuller			76.49	58.63	40.76
	0.9	trace				66.76	45.59
		Fuller				39.56	25.29
	0.95	trace					25.01
		Fuller					14.08

< 표 6 $\beta=0$, $\gamma_1=\gamma_2=0.1$ >

			α_1				
			0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
α_2	0.7	trace	100.00	100.00	99.97	99.84	99.05
		Fuller	99.99	99.81	98.91	96.23	90.98
	0.8	trace		99.79	98.77	95.22	86.36
		Fuller		96.18	89.46	77.37	62.58
	0.85	trace			95.04	86.14	63.33
		Fuller			76.85	60.66	38.03
	0.9	trace				68.20	29.13
		Fuller				43.13	63.73
	0.95	trace					8.95
		Fuller					95.81

< 표 7 $\beta=1$, $\gamma_1=\gamma_2=0.1$ >

			α_1				
			0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
α_2	0.7	trace	100.00	99.99	99.95	99.57	97.14
		Fuller	100.00	99.96	99.95	99.94	99.96
	0.8	trace		99.76	98.26	91.25	77.81
		Fuller		97.57	96.25	95.94	97.12
	0.85	trace			93.73	79.92	56.50
		Fuller			84.43	83.67	84.37
	0.9	trace				63.84	27.44
		Fuller				58.52	84.13
	0.95	trace					
		Fuller					

< 표 8 $\beta=2$, $\gamma_1=\gamma_2=0.1$ >

			α_1				
			0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
α_2	0.7	trace	100.00	99.99	99.89	98.95	95.45
		Fuller	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	0.8	trace		99.28	95.58	83.37	68.05
		Fuller		99.99	100.00	100.00	100.00
	0.85	trace			85.64	64.24	47.83
		Fuller			99.98	100.00	100.00
	0.9	trace				46.27	23.97
		Fuller				99.96	100.00
	0.95	trace					
		Fuller					

경우 (2) : 한 개의 단위근 검정

< 표 9 $\alpha_1=1$, $\gamma_1=\gamma_2=0$ >

			β						
			0	0.3	0.5	0.7	1	2	5
α_2	0.8	sym	66.99	66.73	65.17	64.36	62.32	60.05	58.72
		shin	65.75	63.33	59.18	55.37	49.73	40.96	35.89
		jo	44.14	51.36	62.21	76.40	92.19	99.99	100.00
	0.85	sym	41.26	40.34	39.13	38.26	36.71	33.55	31.97
		shin	40.37	38.43	35.73	33.32	29.97	23.18	19.71
		jo	23.05	28.21	36.11	47.73	70.35	99.57	100.00
	0.9	sym	20.56	19.98	19.17	18.37	17.03	14.92	13.39
		shin	20.09	19.19	17.95	16.80	14.82	11.29	9.14
		jo	11.85	13.40	16.23	21.72	34.42	88.41	100.00
	0.95	sym	9.25	9.12	8.90	8.31	7.83	6.14	4.94
		shin	9.07	8.82	8.59	7.97	7.35	5.44	4.06
		jo	6.47	6.72	7.45	8.12	10.50	34.47	98.46

위의 표에서 얻어진 결과를 정리하면 다음과 같다.

경우 (1) : 두 개의 단위근 검정

1. <표 2>에서 α_1, $\alpha_2 \le 0.9$인 경우 대칭형 단위근 검정법의 검정력이 더 우수하나 그 외의 부분에서는 수정된 Fuller 통계량의 검정력이 더 우수한 것으로 나타났다.
2. <표 3> - <표 4>에서 $\beta=0$, $\gamma_1=0$에서 γ_2가 증가하면 수정된 Fuller 통계량의 검정력은 증가하는 반면에 대칭형 단위근 검정법의 검정력은 감소하는 것으로 나타났다.
3. <표 5>에서 $\beta_0=0$, $\gamma_1=\gamma_2=0.05$인 경우에는 대칭형 단위근 검정법이 우수한 것으로 나타났다.
4. <표 6>에서는 $\alpha_1, \alpha_2 < 0.95$에서 대칭형 단위근 검정법이 우수한 것으로 나타났다.
5. <표 6>, <표 7>, <표 8>을 비교하면 β가 증가하면서 수정된 Fuller 통계량의 검정력은 증가하는 반면 대칭형 검정법의 검정력은 감소하는 것으로 나타났다.

경우 (2) : 한 개의 단위근 검정

한 개의 단위근이 있을 때 $\beta < 0.7$인 경우 대칭형 단위근 검정법과 Shin(199)가 제안한 통계량이 수정된 Fuller 통계량보다 우수한 것으로 나타났으며 특히 Shin(1999)이 제안한 방법보다 대칭형 단위근 검정법이 모든 β에서 우수한 것으로 나타났다. 그러나 두 개의 단위근이 있는 경우와 마찬가지로 β가 증가하면서 수정된 Fuller 통계량의 검정력은 증가하는 반면에 다른 두 통계량의 검정법은 감소하는 것으로 나타났다.

4. 결 론

다중 단위근 검정법 또는 공적분 검정법은 일치하는 것으로 알려져 있으며 경제 시계열 분석에서는 Johansen 검정법이 주로 사용되고있다. 본 논문은 Shin(1999)이 제안한 방법을 개선하여 하나의 단위근이 있는지를 검정할 경우 더 높은 검정력을 주는 대칭형 단위근 검정법을 제안하였다. 또한 계수 행렬이 대칭 행렬에 가깝고 오차의 분산이 대각 행렬에 가까운 경우 본 논문에서 제안한 방법이 수정된 Fuller 통계량보다 더 우수한 것으로 나왔다. 그리고 Shin(1999)이 제안한 방법에 비하여 대칭형 단위근 검정법은 β의 크기에 영향을 덜 받는 것으로 나타나 더 좋은 검정법이라 하겠다.

5. 참 고 문 헌

[1] Engle, N. G. and Granger, C. W. I. (1987), " Cointegration and Error Correction : Representation, Estimation, and Testing", *Econometrics*, 55, No. 2, 251-275.

[2] Fountis, N. G. and Dickey, D. A, (1989) "Testing for a Unit Root Nonstationarity in Multivariate Time Series", *The Annals of Statistics*, 17, 419-428.

[3] Fuller, W. A. (1996) Introduction to Statistical Time Series, John Wiley and Sons, Inc.

[4] Johansen, S. (1988)," Statistical Analysis of Cointegration Vectors", *Journal of Economic Dynamics and Control* , 12, 231-254.

[5] Phillips, P. C. B, and Durlauf, S. N. (1986), "Multiple Time Series Regression with Integrated Processes", *Review of Economic Studies*, LII, 473-495.

[6] Searl, S. R. (1982), Matrix Algebra Useful for Statistics, John Wiley and Sons, Inc.

[7] Shin K. (1994) " Testing a Multivariate Process for Multiple Unit Roots", The Korean *Journal of Applied Statistics*, 7, 103-112.

[8] Shin K. (1999) "A Multiple Unit Root Test Based on Least Squares Estimator", *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 28, No.1, 45-55.