The Korean Communications
in Statistics Vol. 7, No. 1, 2000
pp. 97-106

A Study on the Effect of Box-Cox Power Transformation in AR(1) Model

Jin Hee Lee[1] and Key-Il Shin[2]

Abstract

In time series analysis, we generally use Box-Cox power transformation for variance stabilization. In this paper, we show that order, estimator and one step ahead forecast of transformed AR(1) model are approximately invariant to those of the original model under some assumptions. A small Monte-Carlo simulation is performed to support the results.

1. 서론

시계열 자료를 분석하는 주된 목적은 모형화이다. 모형을 만들기 위해서는 자료의 그림을 그려보는 것이고 이 그림을 통하여 자료가 가지고 있는 성질들 즉 추세(trend), 계절성(seasonality) 또는 평균, 분산이 일정한지를 살펴보는 것이다. 그런 다음 결정적 추세(deterministic trend)나 확률적 추세(stochastic trend)가 있는 경우는 차분(difference)을 하고, 분산이 일정하지 않는 경우는 변환을 이용하여 비정상 시계열을 정상 시계열로 만든다. 변환에 관한 내용은 김원경(1993), 조신섭 손영숙(1999)을 참조하기 바란다. 이후 정상 시계열을 이용하여 타당한 모형을 식별하고 모수를 추정하며 모형을 검진함으로써 모형화는 이루어지게 된다.

비정상 시계열을 정상 시계열로 바꾸는 과정은 위에서도 언급하였듯이 크게 차분과 변환으로 나누어진다. 차분에 관하여는 많은 이론이 개발되었으며 현재에도 많은 연구가 진행되고 있다. 이에 반하여 변환에 관한 연구는 상대적으로 미미한 상태이다.

주어진 시계열에서 최적의 변환을 찾는 것은 그리 쉬운 일은 아니며 일반적으로 여러 변환을 시도하여 가장 분산이 안정된 것을 찾거나 Wei(1994)에서 제안한 방법을 이용하여 최적의 변환을 얻는다.

시계열 분석에서의 변환은 Box-Cox의 멱 변환(power transformation)이 주로 사용되기 때문에 본 논문에서는 Box-Cox변환에 관한 내용을 다룬다. 일반적인 Box-Cox 멱 변환은 분산이 평균의 함수로 나타났을 경우에 사용을 하나 평균이 일정한 경우에도 사용되고 있다. 먼저 평균의 변화에 따라 변환 방법이 달라지게 되는 경우를 살펴보자. 예를 들어 분산이 평균 수준의 제곱에 비례해서 증가하면 로그변환을, 분산이 평균수준에 비례해서 증가하면 제곱근 변환 등이 사용된다. 그러나 Wei(1994)의 예제 6.3에서와 같이 평균이 일정한 경우에도 멱 변환은 사용될 수 있다.

1) (449-791) Graduate Department of Statistics, Hahkuk University of Foreign Studies, Yongin, Kyunggi, Korea
2) (449-791) Associate Professor, Hahkuk University of Foreign Studies, Yongin, Kyunggi, Korea

본 논문에서는 평균이 일정할 경우 일차 테일러 전개를 이용한 AR(1)모형에서의 분산 안정화 변환이 시계열 분석에 어떠한 영향을 미치는지에 대해서 살펴보고자 한다. 제 2절에서는 변환이 필요함에도 불구하고 변환을 하지 않은 원 자료에서 모형의 식별, 모수 추정 그리고 1시차 후 예측을 하였을 경우, 1차의 테일러 전개로 변환이 근사 될 수 있다는 조건하에서는 근사적으로 모형의 차수와 모수 추정 그리고 1시차 후 예측이 같음을 보였다. 3절에서는 Wei(1994)의 예제 6.3을 이용하여 2절에서 얻은 결론의 타당성을 보였으며 4절에서는 2절에서 얻은 결론을 뒷받침하기 위하여 모의 실험을 실시하였다. 끝으로 최종적인 결론은 5절에 있다.

2. 변환된 모형의 차수 및 예측의 불변성

먼저 Box-Cox 멱 변환 $Y_t = X_t^{\lambda}$을 고려하자. 여기서 λ는 변환 모수이다. 일반적인 Box-Cox 변환은 분산이 평균의 함수 일 경우에 사용된다. 그러나 서론에서도 언급하였듯이 평균이 일정한 경우에도 Box-Cox 멱 변환은 사용되고 있으며 본 논문에서는 평균이 일정한 경우만 다룬다.

또한 Box-Cox 멱 변환을 이용한 분산 안정화 변환 방법에서는 1차식을 이용한 테일러 전개가 사용되고 있으므로 본 절에서도 테일러 전개에서 1차 근사로 충분한 경우만을 다루기로 한다. 이에 관한 내용은 Wei(1994), Neter(1990), Wasserman and Kutner(1992)등 을 참조하기 바란다.

보통 Box-Cox 변환 전에 자료가 음수인 경우는 자료에 충분히 큰 양의 상수를 더함으로써 모든 자료를 양수로 바꾸어 줄 수 있다. 이 경우 시계열 분석에는 전혀 지장을 주지 않는다. 이에 관한 내용도 Wei(1994)를 살펴보기 바란다. 따라서 일반성을 잃지 않고 본 논문에서는 모든 자료가 양수인 경우만을 다루기로 한다.

2.1 자기상관함수의 근사적 불변성

평균이 일정하고 1차 테일러 전개로 근사가 충분할 경우 Box-Cox 변환 $Y_t = X_t^{\lambda}$ 을 이용하여 변환하였을 경우 자기상관함수(Autocorrelation function)가 근사적으로 일정함을 살펴보도록 하자.

먼저 변환된 자료 Y_t는 다음과 같이 근사 될 수 있다.

$$Y_t = X_t^{\lambda} \approx \mu_{X,t}^{\lambda} + \lambda \mu_{X,t}^{\lambda-1}(X_t - \mu_{X,t}) \tag{1}$$

여기서 $\mu_{X,t} = E(X_t)$이다.

다음으로 분산과 자기 공분산은

$$Var(Y_t) \approx (\lambda \mu_{X,t}^{\lambda-1})^2 Var(X_t) \ , \ Cov(Y_t, Y_{t-i}) \approx (\lambda \mu_{X,t}^{\lambda-1})(\lambda \mu_{X,t-i}^{\lambda-1}) Cov(X_t, X_{t-i})$$

이 된다. 따라서 평균이 일정하다는 조건, 즉 $\mu_{X,t} = E(X_t) = \mu_X$ 인 조건하에서 자기상관함수는 다음과 같다.

$$\rho_{Y_t, Y_{t-i}} = Corr(Y_t, Y_{t-i}) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-i})}{\sqrt{Var(Y_t)}\sqrt{Var(Y_{t-i})}} \approx \frac{Cov(X_t, X_{t-i})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t-i})}} = \rho_{X_t, X_{t-i}} \quad (2)$$

따라서 자기상관함수는 근사적으로 변환에 영향을 받지 않게 됨을 알 수 있다. 이에 관한 적용 예는 Fukunaga(1990)를 살펴보기 바란다.

2.2 모형 및 예측의 근사적 불변성

이 절에서는 모형과 1시차 후 예측의 근사적 불변성에 관하여 살펴보기로 하자. 물론 2.1절에서 사용된 가정을 이 절에서도 사용한다. 먼저 다음의 AR(1) 모형을 살펴보자.

$$(1-\phi B)(Y_t - \mu_{Y,t}) = a_t, \quad t \geq 1 \quad (3)$$

여기서 $Y_t = X_t^{\lambda}$, $E(Y_t) = \mu_{Y,t}$ 이고 $a_t \sim (0, \sigma^2)$는 백색잡음 과정이다. 즉 변환을 한 시계열이 AR(1) 모형을 따른다고 하자. 이제 (1)을 (3)에 대입하자. 그러면 $\mu_{Y,t} \approx \mu_{X,t}^{\lambda}$ 이 되고 따라서 근사적으로 다음의 식을 얻는다.

$$(1-\phi B)[\lambda \mu_{X,t}^{\lambda-1}(X_t - \mu_{X,t})] = a_t, \quad t \geq 1 \quad (4)$$

이제 $a_t^* = \frac{a_t}{\lambda \mu_{X,t}^{\lambda-1}}$ 라 하면 (4) 식은

$$(1-\phi B)(X_t - \mu_{X,t}) = a_t^*, \quad t \geq 1 \quad (5)$$

가 되어 변환전의 모형은 근사적으로 AR(1) 모형을 따르게 된다.

여기서 $E(X_t) = \mu_{X,t} = \mu_X$로 평균이 일정하므로 a_t^* 또한 백색잡음과정이 된다.

다음으로 근사적으로 1시차 후 예측이 불변함을 살펴보도록 하자. 물론 자기상관함수와 모형이 근사적으로 불변하기 때문에 예측 또한 불변할 것이 라는 것은 쉽게 이해할 수 있으리라 생각된다.

먼저 변환된 AR(1) 모형에서 $Y_t - \mu_{Y,t} = \phi(Y_{t-1} - \mu_{Y,t}) + a_t, \quad t \geq 1$에서 1시차 후 예측을 살펴보자. 예측은 최소평균제곱오차예측을 사용하기로 하자.

$$\widehat{Y_{t+1}} = \widehat{\mu_{Y,t}} + \widehat{\phi_Y}(Y_t - \widehat{\mu_{Y,t}}) \quad (6)$$

원 자료에 관한 예측은 $\widehat{Y_{t+1}}$을 이용하여 $\widehat{Y_{t+1}}^{1/\lambda}$ 로 하게된다. 즉 원 자료에 관한 예측은 다음의 식에 의해서 구해진다.

$$\widehat{X_{t+1}} = \widehat{Y_{t+1}}^{1/\lambda} = \{\widehat{\mu_{Y,t}} + \widehat{\phi_{Y,1}}(Y_t - \widehat{\mu_{Y,t}})\}^{1/\lambda} \quad (7)$$

이제 (4) 에 의해서 $\widehat{\phi_Y} = \widehat{\rho_Y} \approx \widehat{\rho_X} = \widehat{\phi_X}$ 이 되고 (1) 에 의해, $\widehat{\mu_{Y,t}} \approx \widehat{\mu_{X,t}}^{\lambda}$,

$$Y_t - \widehat{\mu_{Y,t}} \approx \lambda \widehat{\mu_{X,t}}^{\lambda-1}(X_t - \widehat{\mu_{X,t}})$$

를 얻는다. 다음으로

$$f(X_t)=\widehat{X_{t+1}}=\widehat{Y_{t+1}}^{1/\lambda}=\{\widehat{\mu_{Y,t}}+\widehat{\phi_Y}(Y_t-\widehat{\mu_{Y,t}})\}^{1/\lambda} \tag{8}$$

라하고 위에서 얻어진 결과를 대입하면 다음과 같다.

$$f(X_t)=\{\widehat{\mu_{X,t}}^{\lambda}+\widehat{\phi_X}\cdot\lambda\,\widehat{\mu_{X,t}}^{\lambda-1}(X_t-\widehat{\mu_{X,t}})\}^{1/\lambda}$$

평균이 일정하다는 가정을 이용하면 $\widehat{\mu_{X,t}}=\widehat{\mu_X}$ 이 되므로

$$f(X_t)=\{\widehat{\mu_X}^{\lambda}+\widehat{\phi_X}\cdot\lambda\,\widehat{\mu_X}^{\lambda-1}(X_t-\widehat{\mu_X})\}^{1/\lambda} \tag{9}$$

을 얻게 된다.

테일러 전개에서 1차식 만을 이용하면

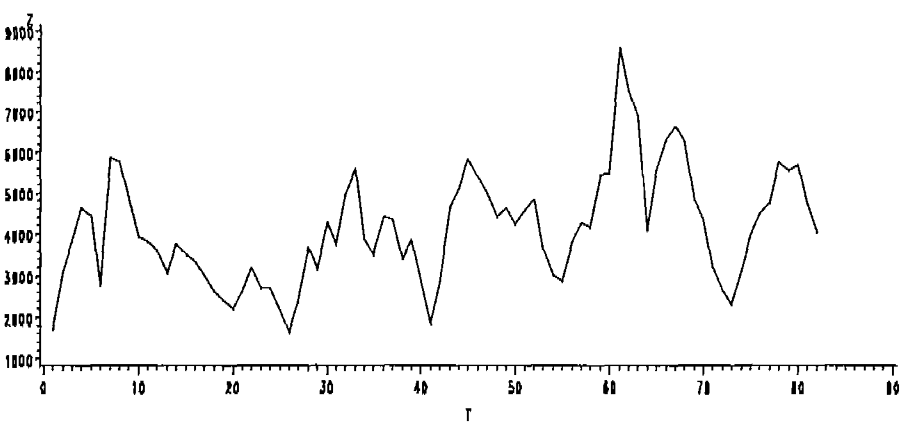
$$f(X_t)\approx f(\widehat{\mu_X})+f'(\widehat{\mu_X})(X_t-\widehat{\mu_X})$$

$$\approx\widehat{\mu_X}+\frac{1}{\lambda}(\widehat{\mu_X}^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}-1}\lambda\widehat{\phi_X}\,\widehat{\mu_X}^{\lambda-1}(X_t-\widehat{\mu_X})=\widehat{\mu_X}+\widehat{\phi_{X,1}}(X_t-\widehat{\mu_X}) \tag{10}$$

이 되고 이 식은 원 자료를 변환시키지 않고 그대로 예측한 결과와 근사적으로 같게 된다. 따라서 평균이 일정하고 테일러 전개에서 1차식 만을 이용한 근사가 가능한 경우 근사적으로 1시차 후 예측은 근사적으로 같은 값을 갖게 된다.

3. 예 제

전체 364 마리의 성숙한 검정파리를 성 비율을 같게 하여 한 장소에서 약 2년 동안 매일 같은 양의 먹이를 주면서 하루걸러 검정 파리의 수를 기록하였다. 여기서 자료는 시점 $218\le t\le 299$ 인 경우이며 이 자료를 이용하여 다음 <그림 1>을 얻었다. Wei(1994)는 예제 6.3에서 이 자료를 분석하였다. 그는 자료의 그림을 살펴보았을 때 평균이 일정하다고 판단하였으며 변환을 위하여 <표 1>를 만들었다. 이 예제에서 그는 $\lambda=0.5,\ 0.0$인 경우 즉 제곱근 변환과 로그 변환일 때 잔차 제곱합이 가장 작으므로 이 두 변환이 가장 좋은 변환이라 말하고 있으며 제곱근 변환을 이용하여 AR(1) 모형으로 결론을 지었다. 다음이 Wei(1994)가 분석한 그림과 표이다.



<그림 1 : 검정파리의 수의 변화>

<표 1 : Box-Cox 변환 결과>

λ	Residual sum of squares
1.0	55.31
0.5	50.09
0.0	50.38
-0.5	56.67
-1.0	71.50

그러나 <표 1>에서 $\lambda=-1.0$일 경우 즉 역수 변환일 경우만을 제외한 나머지 네 개의 변환들의 잔차 제곱합이 그리 큰 차이를 보이지 않고 있음에 주목하기 바란다.

이제 2절에서 얻어진 이론의 타당성을 살펴보기 위하여 각각의 변환을 취한 후 모수 추정과 1 시차 후 예측을 하기로 하자. SAS/ETS 프로시저를 통하여 모수 추정값과 예측값를 구해 본 결과가 <표 2>이다. 이 표를 살펴보면 잔차 제곱합에서와 같이 역수 변환을 제외한 나머지 4개 변환에서의 모수 추정 값과 예측 값이 거의 비슷하게 나온다. 특히 제곱근 변환과 변환을 하지 않았을 경우의 모수 추정값은 매우 가까우며 예측값 또한 매우 가깝다. 따라서 변환결과에서 얻어진 잔차 제곱합이 큰 차이를 보이지 않을 경우 모수 추정 값과 예측 값에서도 비슷한 값을 가짐을 알 수 있다. 이를 뒷받침하기 위한 모의실험은 다음절에 나와있다.

<표 2 : 모수 추정과 1시차 후 예측결과>

λ	ϕ	one step ahead forecast
1.0	0.753	4006.4
0.5	0.754	3967.6
0.0	0.742	3927.3
-0.5	0.712	3906.3
-1.0	0.665(Not Converge)	3827.8

4. 모의 실험

모의실험을 위하여 다음의 AR(1) 모형을 고려하자.

$$(1-\phi B)(Y_t-\mu_Y)=a_t,\ \ t\geq 1$$

여기서 ϕ, μ_Y는 시점에 상관없이 일정하며 $a_t \sim^{i.i.d} N(0,\sigma^2)$는 백색잡음과정이다. 100개의 Y_t가 위의 식에 의해서 생성되었고 $X_t=Y_t^{1/\lambda}$, $\lambda=0.0,\ \pm0.5,\ -1$을 이용하여 100개의 X_t 자료가 생성되었다. 이때 $\lambda=0$인 경우는 지수 변환을 실시하였다. 따라서 X_t 자료는 X_t^{λ}을 하여야

평균과 분산이 일정한 AR(1) 모형을 따르게 된다.

다음으로 변환의 영향을 보기 위하여 σ^2과 μ를 변화시켰다. σ^2과 μ를 변화시키는 방법으로는, 일반적으로 σ/μ가 "0"에 가까우면 1차의 테일러 공식을 사용하였을 경우 무리가 없기 때문에, 먼저 $\sigma^2=1$로 고정시키고 $\mu=5,7,10$으로 증가시키는 방법과 $\mu=5$로 고정시키고 $\sigma^2=0.7,\ 0.5,\ 0.3$으로 감소시키는 방법을 이용하였다.

모의실험은 SAS/ETS를 이용하였으며 반복은 5,000번 실시하였다. 1 시차 후의 예측을 비교하기 위하여 (10)식과 (12)식을 이용하여 예측을 한 후 각각의 MAPE와 MSE를 구한 다음 이를 평균한 값을 구한다. 구하여진 평균값의 비율이 각각 MAPE비율과 MSE 비율이 된다. 또한 추정량은 5000개의 추정값의 평균과 MSE를 구한 후 이를 <표 3>에서 <표 12> 에 작성하였다. 다음이 표에서 얻어진 결과이다.

경우 1 : μ를 증가시키고 $\sigma^2=1$인 경우

1 시차 후 예측 :

(1) MSPE 비율과 MSE 비율 모두 μ가 증가할수록 1 에 가까워짐을 알 수 있다. 그러나 log 변환이 필요한 경우는 μ가 증가함에도 불구하고 두 비율이 1에 가까워지지 않는다.

(2) ϕ의 절대값이 큰 경우에는 μ의 값이 상대적으로 더 커야 1에 가까워진다.

추정량 :

(1) 추정량과 MSE 모두 μ가 증가할수록 변환한 모형에서 얻어진 값으로 수렴하고 있다. 그러나 log 변환이 필요한 경우는 역시 변환한 모형에서 얻어진 값으로 수렴하지 않는다.

(2) 제곱근 변환이 필요한 경우가 변환한 모형에서 얻어진 결과와 가장 가까운 값을 갖는다.

경우 2 : μ는 5로 고정시키고 σ^2를 감소시킬 경우

1 시차 후 예측 및 추정량 모두 σ^2이 감소할수록 변환한 모형에서 얻어진 결과에 수렴함을 알 수 있다. 특히 log 변환이 필요한 경우도 σ^2이 감소할수록 변환한 모형에서 얻어진 결과에 수렴함으로써 본 실험에 사용된 모든 λ값에서 같은 결과를 얻었다.

경우 1 : μ를 증가시키고 $\sigma^2=1$인 경우

<표 3 : $\phi = -0.7$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\mu=5$		$\mu=7$		$\mu=10$		$\mu=5$		$\mu=7$		$\mu=10$	
	MSPE비율	MSE비율	MSPE비율	MSE비율	MSPE비율	MSE비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	-0.694	0.043	-0.695	0.044	-0.696	0.044
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	2071.362	6672843.03	1.459	1.402	1.208	1.231	-0.224	0.493	-0.459	0.248	-0.587	0.116
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.080	1.092	1.063	1.052	1.022	0.018	-0.653	0.054	-0.673	0.045	-0.685	0.043
$1/y$ 변환 필요	1.761	16.600	1.171	1.208	1.086	1.118	-0.407	0.314	-0.584	0.119	-0.646	0.059
$\log y$ 변환 필요	5.399	1.212	0.947	1.285	5.711	2.567	-0.202	0.503	-0.202	0.503	-0.202	0.503

<표 4 : $\phi = -0.5$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\mu=5$		$\mu=7$		$\mu=10$		$\mu=5$		$\mu=7$		$\mu=10$	
	MSPE비율	MSE비율	MSPE비율	MSE비율	MSPE비율	MSE비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	-0.497	0.053	-0.498	0.044	-0.498	0.053
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	26.069	100699.027	1.179	1.060	1.071	1.017	-0.274	0.229	-0.396	0.248	-0.451	0.062
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.058	1.012	1.029	1.010	1.015	1.005	-0.479	0.163	-0.489	0.045	-0.493	0.052
$1/y$ 변환 필요	1.183	0.947	1.061	1.024	1.025	1.013	-0.389	0.119	-0.453	0.119	-0.477	0.052
$\log y$ 변환 필요	2.551	1.041	2.520	1.067	2.544	1.059	-0.215	0.288	-0.217	0.503	-0.216	0.287

<표 5 : $\phi = -0.3$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\mu=5$		$\mu=7$		$\mu=10$		$\mu=5$		$\mu=7$		$\mu=10$	
	MSPE비율	MSE비율	MSPE비율	MSE비율	MSPE비율	MSE비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	-0.300	0.058	-0.299	0.059	-0.299	0.058
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	1.301	2.959	1.109	0.979	1.071	1.017	-0.201	0.105	-0.254	0.064	-0.279	0.056
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.045	0.971	1.024	0.999	1.014	1.005	-0.292	0.057	-0.295	0.058	-0.297	0.058
$1/y$ 변환 필요	1.089	0.995	1.038	0.986	1.025	1.013	-0.254	0.065	-0.279	0.057	-0.290	0.056
$\log y$ 변환 필요	1.932	0.953	1.899	0.974	2.545	1.059	-0.161	0.141	-0.160	0.143	-0.160	0.143

<표 6 : $\phi = 0.3$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\mu = 5$		$\mu = 7$		$\mu = 10$		$\mu = 5$		$\mu = 7$		$\mu = 10$	
	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.292	0.060	0.291	0.059	0.292	0.059
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	1.250	0.990	1.099	0.968	1.042	0.961	0.222	0.104	0.263	0.073	0.280	0.063
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.047	0.994	1.025	0.998	1.103	0.999	0.287	0.062	0.288	0.062	0.290	0.059
$1/y$ 변환 필요	1.076	0.991	1.033	0.985	1.013	0.988	0.262	0.074	0.279	0.063	0.287	0.060
$\log y$ 변환 필요	1.839	0.954	1.841	0.907	1.863	0.947	0.198	0.127	0.195	0.126	0.193	0.128

<표 7 : $\phi = 0.5$ >

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\mu = 5$		$\mu = 7$		$\mu = 10$		$\mu = 5$		$\mu = 7$		$\mu = 10$	
	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.487	0.055	0.487	0.054	0.487	0.054
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	2.206	3884.5	1.109	0.982	1.042	0.981	0.362	0.159	0.440	0.084	0.468	0.064
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.054	0.997	1.026	0.999	1.013	0.999	0.480	0.057	0.484	0.056	0.485	0.055
$1/y$ 변환 필요	1.125	14.333	1.035	0.987	1.013	1.252	0.433	0.091	0.468	0.064	0.479	0.058
$\log y$ 변환 필요	2.092	1.898	2.080	0.984	2.006	1.048	0.339	0.180	0.340	0.178	0.339	0.180

<표 8 : $\phi = 0.7$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\mu = 5$		$\mu = 7$		$\mu = 10$		$\mu = 5$		$\mu = 7$		$\mu = 10$	
	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.683	0.043	0.684	0.045	0.686	0.042
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	397.838	186368 .895	1.200	1.652	1.062	1.009	0.424	0.153	0.603	0.109	0.657	0.058
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.132	0.989	1.032	0.999	1.009	0.997	0.674	0.048	0.679	0.048	0.682	0.043
$1/y$ 변환 필요	1.374	2.723	1.045	0.989	1.024	1.005	0.545	0.157	0.652	0.065	0.674	0.048
$\log y$ 변환 필요	3.223	0.814	3.215	1.029	2.992	1.963	0.483	0.219	0.484	0.232	0.489	0.2134

경우 2 : μ는 5로 고정시키고 σ를 감소시킬 경우

<표 9 : $\phi = -0.7$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\sigma^2 = 0.7$		$\sigma^2 = 0.5$		$\sigma^2 = 0.3$		$\sigma^2 = 0.7$		$\sigma^2 = 0.5$		$\sigma^2 = 0.3$	
	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	-0.697	0.042	-0.693	0.042	-0.694	0.044
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	1.340	1.255	1.161	1.149	1.057	1.046	-0.471	0.236	-0.587	0.116	-0.658	0.052
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.065	1.053	1.038	1.044	1.013	1.015	-0.675	0.043	-0.682	0.043	-0.690	0.044
$1/y$ 변환 필요	1.122	1.130	1.060	1.063	1.020	1.017	-0.590	0.122	-0.645	0.061	-0.678	0.045
$\log y$ 변환 필요	2.609	1.404	1.768	1.374	1.239	1.198	-0.347	0.358	-0.479	0.224	-0.602	0.099

<표 10 : $\phi = -0.5$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\sigma^2 = 0.7$		$\sigma^2 = 0.5$		$\sigma^2 = 0.3$		$\sigma^2 = 0.7$		$\sigma^2 = 0.5$		$\sigma^2 = 0.3$	
	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	-0.497	0.042	-0.498	0.053	-0.498	0.053
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	1.186	1.068	1.069	1.024	1.020	1.007	-0.398	0.060	-0.452	0.061	-0.481	0.051
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.029	1.012	1.010	0.998	1.005	1.002	-0.488	0.042	-0.494	0.052	-0.497	0.053
$1/y$ 변환 필요	1.065	1.013	1.028	1.013	1.008	1.003	-0.452	0.048	-0.478	0.053	-0.491	0.051
$\log y$ 변환 필요	1.672	1.089	1.269	1.023	1.089	1.024	-0.318	0.058	-0.392	0.111	-0.458	0.058

<표 11 : $\phi = 0.5$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\sigma^2 = 0.7$		$\sigma^2 = 0.5$		$\sigma^2 = 0.3$		$\sigma^2 = 0.7$		$\sigma^2 = 0.5$		$\sigma^2 = 0.3$	
	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.487	0.056	0.490	0.054	0.486	0.055
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	1.114	0.936	1.040	0.986	1.020	0.998	0.441	0.084	0.471	0.062	0.479	0.058
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.025	0.995	1.014	1003	1.004	0.999	0.484	0.057	0.488	0.061	0.485	0.055
$1/y$ 변환 필요	1.042	0.971	1.012	1.000	1.008	1.000	0.468	0.065	0.482	0.057	0.483	0.056
$\log y$ 변환 필요	1.422	0.916	1.203	0.996	1.061	0.992	0.407	0.115	0.446	0.078	0.471	0.062

<표 12 : $\phi = 0.7$>

변 환	1시차 후 예측						추 정					
	$\sigma^2 = 0.7$		$\sigma^2 = 0.5$		$\sigma^2 = 0.3$		$\sigma^2 = 0.7$		$\sigma^2 = 0.5$		$\sigma^2 = 0.3$	
	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	MSPE 비율	MSE 비율	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE	$\hat{\phi}$	MSE
변환	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.658	0.045	0.685	0.046	0.686	0.045
$1/\sqrt{y}$ 변환필요	1.174	1.611	1.072	0.985	1.046	1.004	0.612	0.102	0.656	0.060	0.677	0.050
$\sqrt{y}$ 변환 필요	1.036	1.000	1.014	0.996	1.003	0.997	0.681	0.047	0.682	0.047	0.685	0.045
$1/y$ 변환 필요	1.040	0.976	1.028	0.992	1.009	1.004	0.656	0.065	0.673	0.050	0.682	0.047
$\log y$ 변환 필요	1.726	0.943	1.254	1.258	1.062	1.005	0.573	0.184	0.625	0.090	0.663	0.057

5. 결론

차분과 변환은 비정상 시계열을 정상 시계열로 바꾸어 주는 주요 방법들이다. 주어진 시계열이 정상 시계열인 경우 모형의 식별, 모수의 추정등의 단계로 넘어갈 수 있다. 본 논문에서는 AR(1) 모형에서Box-Cox 멱 변환이 모수의 추정 및 예측에 미치는 영향을 살펴보았다. 결론적으로 평균에 비해 분산이 작은 경우는 모수의 추정 및 예측에 변환이 크게 영향을 미치지 않는 것으로 나타났으며 이러한 결과는 최종 모형을 결정하는데 많은 도움을 줄 수 있으리라 생각된다.

참고문헌

[1] Fukunaga K. (1990). Statistical Pattern Recognition. Academic Press. Second Edition.

[2] Neter, J., Wasserman, W. and Kutner, M, H.(1992). Applied Linear Statistical Models. Irwin, third Edition.

[3] SAS (1993), SAS/ETS User's Guide, Version 6, Second Edition. SAS Institute Inc., Cary, NC, USA.

[4] Wei, W. W. S. (1994). Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Merhod. Addison and Wesley.

[5] 김원경 (1993). 시계열 분석, 경문사.

[6] 조신섭, 손영숙 (1999). 시계열분석, 율곡 출판사.