

# 링보강 축대칭 셸 구조물의 동적해석

## Dynamic Analysis of Ring-Stiffened Axisymmetric Shells

황 철 성\*

Hwang, Chul Sung

### 국문요약

자오방향 및 주변방향으로 프리스트레스 하중이 작용된 축대칭 셸 구조물을 기하학적으로 축대칭인 구조물의 특성을 최대한으로 이용할 수 있도록 회전 링요소로 모델화하였다. 보강링 요소의 모델은 축대칭 셸요소를 이용하였으며, 본체 구조물과 질점에서 부착되어 있는 것으로 가정하여 이의 편심을 고려하였다. 유체-구조물의 상호관계는 접촉면에서 구조물의 가속도에 비례한 부가질량으로 표현하였으며, 부가질량은 유체를 비점성, 비압축 및 비회전으로 가정하여 유한요소법에 의해 구하였다. 이에 대한 수치해석을 통하여 고유진동해석 및 지진하중을 주하중으로 한 동적해석을 실시하였다.

프로그램을 통하여 해석한 결과를 프리스트레스하중 하에서 고유진동수에 대한 정해와 비교한 결과 20개의 요소로 모델링한 경우에서도 정해와 근접한 해를 얻을 수 있었다. 또한 내부유체가 있는 경우와 링보강을 한 경우에 대한 고유진동수를 문헌과 비교한 결과 근접한 해를 얻을 수 있었다.

**주요어** : 링보강, 축대칭 셸, 프리스트레스 하중, 부가질량

### ABSTRACT

An axisymmetric shell element which includes the effects of the meridional and circumferential cable prestresses is developed as a ring element, which makes the characteristics of the axisymmetric shell to be fully utilized. The ring-stiffeners are assumed to be connected at the shell nodes. A ring-stiffener element model which includes the effect of the eccentricity between the shell and the ring-stiffener is developed by modifying the axisymmetric shell element. The fluid-structure interaction is expressed as an added mass which is in proportion to the acceleration of the structure in interface surface. The added mass is obtained by using finite element method under the assumption that the fluid is inviscid, incompressible and irrotational. It is coded for personal computer by the use of axisymmetric properties and the dynamic analysis are performed under the seismic excitations.

The eigenvalue solutions under the initial prestresses and the internal fluid are agreed well with the exact solutions and references by using under 20 elements. Also in the the ring-stiffened case, the natural frequencies are shown to be in an excellent agreement between the present method and closed-form solution.

**Key words** : ring-stiffener, axisymmetric shell, prestress load, added mass

## 1. 서 론

축대칭 셸 구조물은 주로 외부하중이 작용되기 전에 내부유체 등에 의한 초기하중이 작용되고 있다. 이에 대한 보강으로 프리스트레스를 작용하거나 링보강을 실시하여 균열의 감소와

부식의 방지뿐만 아니라 셸의 재하한계를 증가시키고 있다.

축대칭 셸에 대한 연구는 Armenakas<sup>(5)</sup>가 단순 지지된 초기 프리스트레스하중을 받는 경우의 고유진동수를 해석적으로 구하였으며, Haroun과 Housner<sup>(6)</sup>는 액체저장탱크에 대한 해석을 실시하였다. 또한 Galletly<sup>(8)</sup>는 단순지지된 링보강 축대칭 셸에 대한 고유진동수를 해석적으로 구하였다.

\* 정회원 · 경원대학교 토목환경공학과 교수  
본 논문에 대한 토의를 2000년 9월 30일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.

그러나 외부하중이 지진하중등의 축대칭 하중이 아닌 경우는 동적해석을 수치해석적 방법에 의해 구하는 것이 일반적이며, 기존의 구조해석 프로그램으로 해석할 경우 매우 많은 자유도를 요구하고, 이의 모델링 과정과 결과에 대한 분석시 많은 시간과 노력이 필요하다. 축대칭 셸의 동적해석에서는 축대칭의 특성을 이용하기 위하여 회전링 요소를 이용하는 것이 효율적이며, 황철성<sup>(2)</sup>과 황철성과 백인열<sup>(4)</sup>은 이를 이용하여 각각 초기 프리스트레스트하중을 받는 경우와 내부유체가 존재할 경우 축대칭 셸 구조물의 고유진동수 및 지진하중에 의한 구조물의 거동을 구하였다.

본 연구에서는 유체 동역학적인 부가질량 효과를 포함한 프리스트레스트 셸 구조물과 보강링에 대한 수학적 모델을 제시하였으며, 이에 대한 지진하중을 주하중으로 한 축대칭 셸구조물의 동적거동을 구하였다. 이때 셸 및 보강링을 회전링 요소로 모델화하였으며, Sanders<sup>(1)</sup>에 의해 제안된 비선형 셸 이론을 사용하여 기하학적 비선형성을 고려하였다.

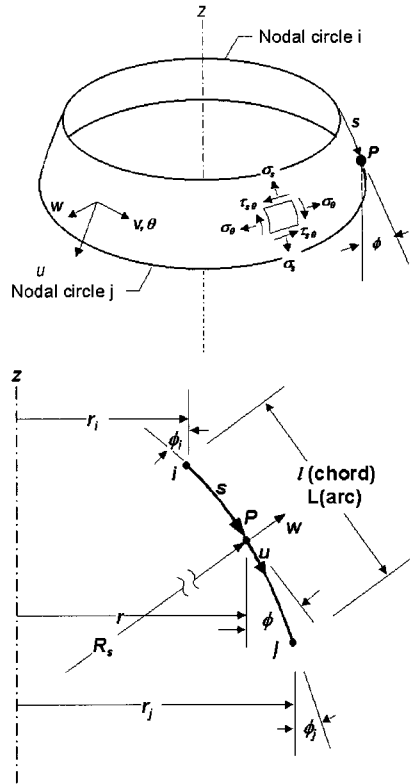


그림 1 축대칭 셸요소의 기하학적 형상

## 2. 축대칭 프리스트레스트 셸 요소

축대칭 프리스트레스트 셸 요소에 대한 정식화는 참고문헌(2)에 상세히 언급되어 있으며, 이를 정리하면 다음과 같다.

### 2.1 셸 요소의 정의

축대칭 셸 요소는 축대칭의 회전링 요소를 사용하였으며, 그림 1과 같은 8 자유도의 셸 요소를 사용하였으며 이를  $\{u_i, v_i, w_i, \beta_{s,i}, u_j, v_j, w_j, \beta_{s,j}\}$ 로 나타낸다. 또한, 중립면상의 임의의 점에 대한 회전축으로부터 수직거리를  $r$ 로 표시하며, 같은 점에서의 접선과 회전축사이의 각을  $\phi$ 로 나타낸다.

### 2.2 셸 요소의 매트릭스

#### 2.2.1 셸 요소의 변형 에너지

셸 요소에 축적되는 변형 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$U_s = (1/2) \int_{V_s} (\bar{\sigma}_s \bar{\epsilon}_s + \bar{\sigma}_\theta \bar{\epsilon}_\theta + \bar{\sigma}_z \bar{\epsilon}_z + \bar{\sigma}_{s\theta} \bar{\epsilon}_{s\theta} + \bar{\sigma}_{\theta z} \bar{\epsilon}_{\theta z} + \bar{\sigma}_{zs} \bar{\epsilon}_{zs}) dV \quad (1)$$

횡단응력과 전단응력은 무시되는 것으로 가정하며, 두께에 따라 선형의 변형도 변화를 가정하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_s &= \epsilon_s + \xi \chi_s \\ \bar{\epsilon}_\theta &= \epsilon_\theta + \xi \chi_\theta \\ \bar{\epsilon}_{s\theta} &= \epsilon_{s\theta} + \xi \chi_{s\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

이 때,  $\epsilon_s, \epsilon_\theta$  및  $\epsilon_{s\theta}$ 는 중립축에서의 변형도 및 전단변형도를 뜻하고,  $\chi_s, \chi_\theta$  및  $\chi_{s\theta}$ 는 중립축의 곡률변화량과 비틀변화량을 뜻하며,  $\xi$ 는 중립면상의 임의의 점으로부터 수직거리를 의미한다.

또한, Sanders<sup>(1)</sup>에 의해 제안된 비선형 셸 이

론에 의해 변형도는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{s(NL)} &= \epsilon_{s(L)} + (1/2)(\beta_{s(L)}^2 + \beta_{\theta(L)}^2) \\ \epsilon_{\theta(NL)} &= \epsilon_{\theta(L)} + (1/2)(\beta_{\theta(L)}^2 + \beta_{s(L)}^2) \quad (3) \\ \epsilon_{s\theta(NL)} &= \epsilon_{s\theta(L)} + (\beta_{s(L)} + \beta_{\theta(L)}) \end{aligned}$$

이 때, (L)은 선형이론에 의한 값이고, (NL)은 비선형이론에 의한 값을 뜻하며,  $\beta_s$ ,  $\beta_\theta$  및  $\beta$  는 각각 자오방향, 주변방향 및 법선방향의 회전각을 뜻한다.

부가변형도, 곡률변화 및 회전각을 주변각  $\theta$ 에 관한 Fourier series로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \sum_n e_s^n(s) \cos n\theta \\ \epsilon_\theta &= \sum_n e_\theta^n(s) \cos n\theta \\ \epsilon_{s\theta} &= \sum_n e_{s\theta}^n(s) \sin n\theta \\ \chi_s &= \sum_n k_s^n(s) \cos n\theta \\ \chi_\theta &= \sum_n k_\theta^n(s) \cos n\theta \quad (4) \\ \chi_{s\theta} &= \sum_n k_{s\theta}^n \sin n\theta \\ \beta_s &= \sum_n b_s^n(s) \cos n\theta \\ \beta_\theta &= \sum_n b_\theta^n(s) \sin n\theta \\ \beta &= \sum_n b^n(s) \sin n\theta \end{aligned}$$

식 (2)와 식 (3)을 식 (1)에 대입하고 Tillerson 과 Haisler<sup>(3)</sup>이 사용한 형태와 같은 회전링 요소의 변위에 대한 가정과 식 (4)을 이용하여 정리하면 변형에너지는 초기변형에너지와 부가변형에너지의 합으로 나눌 수 있다.

$$U_s = U_s^i + U_s^a \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} U_s^a &= (\pi/2) \int_0^L \{ C_1(e_s^n)^2 + C_2(e_\theta^n)^2 \\ &+ 2\nu_{s\theta} C_1 e_s^n e_\theta^n + G_1(e_{s\theta}^n)^2 + D_1(k_s^n)^2 \\ &+ D_2(k_\theta^n)^2 + 2\nu_{s\theta} D_1 k_s^n k_\theta^n \\ &+ G_2(k_{s\theta}^n)^2 \} r \, ds \quad (5b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_s^i &= (\pi/2) \int_0^L [ C_1 \epsilon_s^i ((b_s^n)^2 + (b^n)^2) \\ &+ C_2 \epsilon_\theta^i ((b_\theta^n)^2 + (b^n)^2) + \nu_{s\theta} C_1 \{ \epsilon_s^i ((b_\theta^n)^2 \\ &+ (b^n)^2) + \epsilon_\theta^i ((b_s^n)^2 + (b^n)^2) \} ] r \, ds \quad (5c) \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} C_1 &= E_s h / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s}) \\ C_2 &= E_\theta h / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s}) \\ D_1 &= E_s h^3 / 12 (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s}) \\ D_2 &= E_s h^3 / 12 (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s}) \\ G_1 &= G h \\ G_2 &= G h^3 / 12 \end{aligned}$$

### 2.2.2 프리스트레스트 케이블의 변형에너지

프리스트레스트 케이블에 의한 자오방향 케이블의 변형에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} U_m &= (\pi N_m^i / 2) \int_0^L ((b_s^n)^2 + (b^n)^2) r \, ds \\ &+ (E_m A_m / 4) \int_0^L (e_s^n)^2 \, ds \quad (6) \end{aligned}$$

이때,  $N_m^i$  는 자오방향의 단위길이 당 초기 케이블 하중이다.

또한,  $N_c^i$ 를 주변방향의 단위길이 당 초기케이블 하중이라 할 때, 주변방향 케이블의 변형에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_c &= (\pi N_c^i / 2) \int_0^L ((b_\theta^n)^2 + (b^n)^2) r \, ds \\ &+ \frac{1}{2} E_c (A_c / L) \pi \int_0^L (e_\theta^n)^2 r \, ds \quad (7) \end{aligned}$$

### 2.2.3 셸 요소의 운동에너지

셸 요소의 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T &= (\pi h / 2) \int_0^L \rho [ (\dot{u}^n)^2 + (\dot{v}^n)^2 + (\dot{w}^n)^2 \\ &+ (h^2 / 12) \{ (\dot{b}_s^n)^2 + (\dot{b}_\theta^n)^2 \} ] r \, ds \quad (8) \end{aligned}$$

이때,  $\rho$ 는 쉘 요소의 밀도이다.

### 2.2.4 쉘 요소의 매트릭스 구성

Hamilton's Principle에 따라 운동에너지(T)와 변형에너지 및 비보존력에 의해 한 일(W)의 합을 변분하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} \Pi dt = 0$$

$$\Pi = U_s^i + U_s^a + U_m + U_c - W - T \quad (9)$$

식 (9)를 일반좌표계에 대해 각각 편미분하면 다음과 같은 매트릭스식으로 정리된다.

$$[K]\{a\} + [M]\{\ddot{a}\} = \{F\} \quad (10)$$

$$[K] = [K_s^i] + [K_s^a] + [K_m] + [K_c]$$

일반좌표  $a$ 로 표현된 식을 절점좌표계로 표현하기 위한 변환매트릭스를 [B]라하고, 국지좌표계를 전체좌표계로 표시하기 위한 변환매트릭스를 [T]로 표시하면 일반좌표계와 전체좌표계와의 관계는 다음과 같다.

$$\{a\} = [A]\{q\} \quad (11)$$

$$[A] = [B]^{-1}[T]$$

따라서 구조물의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[K]\{q\} + [M]\{\ddot{q}\} = \{F\}$$

$$[K] = [A]^T [K][A] \quad (12)$$

$$[M] = [A]^T [M][A]$$

### 3. 유체의 부가질량 매트릭스

축대칭 프리스트레스트 쉘 요소에 대한 정식화는 참고문헌(4)에 상세히 언급되어 있으며, 이를 정리하면 다음과 같다.

#### 3.1 유체의 기본방정식

유체를 비점성, 비회전 및 비압축성 재질로 가

정하고, 유체-구조물계가  $\omega$ 의 각속도를 가진 주기하중의 외력을 받고 있는 것으로 가정한다. Laplace방정식과 유체의 경계면에 대한 경계조건을 Galerkin's weighted residual 방법을 적용하고, 부분적분을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \left[ \delta \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \delta \left( \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right) \left( \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right) \right. \\ \left. + \delta \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta p (\rho a_n) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_3} \delta p \left( \frac{\omega^2}{g} p \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta p \left( \frac{1}{r} p \right) d\Gamma \quad (13)$$

이때,  $\Omega$ 는 유체요소영역,  $\Gamma_1$ 는 구조물-유체의 접촉부,  $\Gamma_2$ 는 바닥부,  $\Gamma_3$ 는 자유수면부,  $\Gamma_4$ 는 발산경계영역을 각각 뜻한다.

식 (13)에 stationary condition을 적용시키면, 다음과 같은 매트릭스 방정식을 얻을 수 있다.

$$([G] + [D])\{p\} = \{B\} \quad (14)$$

$\{p\}$ 는 요소내의 압력을 뜻하고, 절점에서의 압력  $\{p\}^e$ 와의 관계를  $p = [N_i]\{p\}^e$ 라 하면, [G], [D] 및 [B]는 다음과 같이 표현된다.

$$[G] = \sum_e \int_{\Omega} \left( \frac{\partial [N_i]^T}{\partial r} \frac{\partial [N_i]}{\partial r} + \frac{m^2 [N_i][N_i]^T}{r^2} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial [N_i]^T}{\partial z} \frac{\partial [N_i]}{\partial z} \right) \right) \pi r d\bar{\Omega}$$

$$[D] = \sum_e \int_{\Gamma_3} ([N_i]^T [N_i]) \pi r d\bar{\Gamma}$$

$$\{B\} = \sum_e \int_{\Gamma_1} ([N_i]^T \frac{\partial p}{\partial n}) \pi r d\bar{\Gamma} \quad (15)$$

윗 식에서  $\bar{\Omega}$  및  $\bar{\Gamma}$ 는 각각 요소 내 및 요소의 경계면을 나타낸다.

유체와 구조물의 접촉면에서 구조물의 절점 가속도를  $\{\ddot{U}\}$ 라 하면  $\{B\}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\{B\} = -\rho[S]\{\ddot{U}\} \quad (16)$$

이때,

$$[S] = \sum_e \int_{\bar{T}_1} ([N_f]^T [R] [N_s]) \pi r d\bar{T}$$

윗식에서 [R]은 구조물-유체의 접촉면에서의 전체좌표계와 수직방향과의 관계를 의미하며, [N<sub>s</sub>]는 절점가속도와 접촉면에서의 가속도의 관계를 뜻한다.

### 3.2 구조물-유체간의 운동방정식

일반적인 구조물의 운동방정식에 따라 다음과 같은 기본 매트릭스방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F_p\} + \{F_s\} \quad (17)$$

[M] 및 [K]는 각각 구조물의 질량 및 강도 매트릭스이고, {F<sub>p</sub>}는 구조물의 거동에 따라 유체가 구조물에 미치는 하중이며 {F<sub>s</sub>}는 기타 외부하중을 뜻한다.

유체에 의한 하중 {F<sub>p</sub>}는 접촉면에서의 압력과 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\{F_p\} = [S]^T \{p\} \quad (18)$$

따라서, 식 (17)은 다음과 같이 표현된다.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = [S]^T \{p\} + \{F_s\} \quad (19)$$

식 (14), 식 (16)을 식 (19)에 대입하면 유체에 의한 하중항은 질량매트릭스(부가질량매트릭스; added mass matrix)로 환산되어 다음과 같이 표현된다.

$$([M] + [M_p])\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F_s\} \quad (20)$$

이 때,

$$[M_p] = \rho[S]^T [G]^{-1} [S]$$

### 4. 보강링 요소의 매트릭스

보강링 요소의 좌표계는 그림 2에 나타난 바

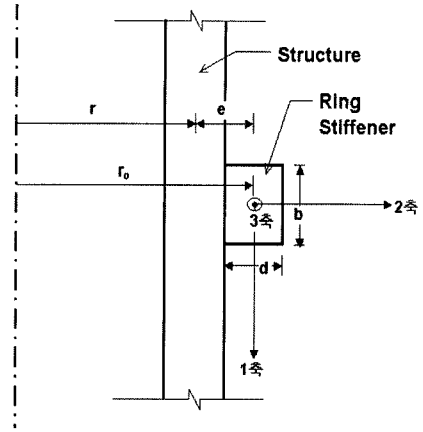


그림 2 보강링 요소의 좌표계

와 같다. 보강링은 셸과 절점에서 연결되어 있는 것으로 간주되며, 그림 2에서는 직사각형 단면으로 한정하였으나, 기타의 단면 형태에 대해서도 쉽게 적용할 수 있다. 보강링은 미소변위를 가지는 원형보로 근사화하고 다음과 같은 가정을 따른다.

- ① 보강링의 두께는 반경에 비해 매우 작다.
- ② 보강링의 단면은 변형 후에도 계속 같은 평면을 유지한다.

가정 ① ②에 따라 1, 2 방향의 응력 ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  등)은 항상 영이다.

보강링의 두께 d를 따라 변형도가 선형으로 변한다고 가정하면, 보강링의 중심에서의 변위 및 회전각과 보강링이 연결되어 있는 셸의 중립면에서의 변위와의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_r &= u - e\beta_s \\ v_r &= \frac{r_0}{r} v - \frac{e}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ w_r &= w \\ \beta_r &= \beta_s \end{aligned} \quad (21)$$

이 때 첨자 r은 보강링 요소값을 뜻한다.

식 (21)에서의 보강링의 중심 변위에 의해 보강링 요소내의 변형도를 표시하면 다음과 같다.

비선형 주변방향 변형도 :

$$\epsilon_{r\theta(NL)} = \frac{1}{r_o} \left( w_r + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2r_o^2} \left( \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - v_r \right)^2 + \frac{1}{8r_o^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)^2 \quad (22a)$$

3-2 평면의 곡률변화 :

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_o} = -\frac{W_r}{r_o^2} - \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial^2 w_r}{\partial \theta^2} \quad (22b)$$

3-1 평면의 곡률변화 :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\beta_r}{r_o} - \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \quad (22c)$$

주변방향 단위길이당 비틀각 :

$$\theta = \frac{1}{r_o} \frac{\partial \beta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (22d)$$

식 (22)에 식 (21)을 대입하여 중립면에서의 셸의 변위와 보강링 요소의 변형도 및 곡률변화의 관계식을 얻으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{r\theta} &= \epsilon_{r\theta(L)} + \epsilon_{r\theta(NL)} \\ &= \frac{1}{r_o} \left( w + \frac{r_o}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{e}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2r_o^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{r_o}{r} v + \frac{e}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{8r_o^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - e \frac{\partial \beta_s}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_o} = -\frac{w}{r_o^2} - \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (23b)$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\beta_s}{r_o} - \frac{1}{r_o^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - e \frac{\partial^2 \beta_s}{\partial \theta^2} \right) \quad (23c)$$

$$\theta = \frac{1}{r_o} \frac{\partial \beta_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (23d)$$

#### 4.1 보강링 요소의 변형에너지

$\epsilon_{r\theta}$ 는  $\epsilon_{r\theta}^i + \epsilon_{r\theta}^a + \epsilon_{r\theta(NL)}$ 로 표현되며, 보강링 요소의 변형에너지를 주변방향의 인장, 비틀 및 1,2 축에 대한 휨의 값으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_r &= (E_r A_r / 2) \int_0^{2\pi} (\epsilon_{r\theta}^i + \epsilon_{r\theta}^a + \epsilon_{r\theta(NL)})^2 r_o d\theta \\ &\quad + (G_r C_r / 2) \int_0^{2\pi} \theta^2 r_o d\theta \\ &\quad + (E_r I_1 / 2) \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_o} \right)^2 r_o d\theta \\ &\quad + (E_r I_2 / 2) \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{R_1} \right)^2 r_o d\theta \end{aligned} \quad (24)$$

식 (23)을 식 (24)에 대입하고 초기하중의 영향을 받는 부분과 부가하중을 받는 부분으로 나누어 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_r^i &= (E_r A_r \epsilon_r^i / 2r_o) \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{r_o}{r} v + \frac{e}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - e \frac{\partial \beta_s}{\partial \theta} \right)^2 \right\} d\theta \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} U_r^a &= (1/2) \int_0^{2\pi} \left\{ (E_r A_r / r_o) \left( w + \frac{r_o}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{e}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 \right. \\ &\quad + (G_r C_r / r_o) \left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \theta} + \frac{1}{r_o} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{e}{r_o} \frac{\partial \beta_s}{\partial \theta} \right)^2 \\ &\quad + (E_r I_r / r_o^3) \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 \\ &\quad \left. + (E_r I_2 / r_o) \left( \beta_s - \frac{1}{r_o} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{e}{r_o} \frac{\partial^2 \beta_s}{\partial \theta^2} \right)^2 \right\} d\theta \end{aligned} \quad (25b)$$

#### 4.2 보강링 요소의 운동에너지

셸 요소에서 중립면의 변위에 대한 값으로 표현된 보강링 요소의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_r = (\rho_r/2) \int_0^{2\pi} \left[ A_r \{ (\dot{u} - e \dot{\beta}_s)^2 + \left( \frac{r_o}{r} \dot{v} - \frac{e}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right)^2 + \dot{w}^2 \} + I_\theta \dot{\beta}_s^2 + I_1 \frac{1}{r_o^2} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} - \frac{r_o}{r} \dot{v} + \frac{e}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right)^2 \right] r_o d\theta \quad (26)$$

### 4.3 보강링 요소내의 주변방향 케이블에 의한 변형에너지와 운동에너지

보강링 요소내의 케이블의 부가변형도  $\epsilon_{rc}^a + \epsilon_{rc(NL)}$ 는 구조물내에서 같이 거동하는 값이므로  $\epsilon_{r\theta}^a + \epsilon_{r\theta(NL)}$ 과 동일하다. 따라서, 다음의 식과 같이 표현된다.

$$U_{rc} = U_{rc}^i + U_{rc}^a$$

$$U_{rc}^i = \epsilon_{rc}^i E_{rc} \int_0^{2\pi} \int_{A_{rc}} \epsilon_{r\theta(NL)} r_o dA_{rc} d\theta$$

$$= \epsilon_{rc}^i E_{rc} A_{rc} r_o \int_0^{2\pi} \epsilon_{r\theta(NL)} d\theta$$

$$= (\epsilon_{rc}^i E_{rc} A_{rc} / 2r_o) \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{r_o}{r} v + \frac{e}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - e \frac{\partial \beta_s}{\partial \theta} \right)^2 \right\} d\theta \quad (27a)$$

$$U_{rc}^a = (1/2) E_{rc} \int_0^{2\pi} \int_{A_{rc}} (\epsilon_{rc}^a)^2 r_o dA_{rc} d\theta$$

$$= (E_{rc} r_o A_{rc} / 2) \int_0^{2\pi} (\epsilon_{rc}^a) d\theta$$

$$= (E_{rc} A_{rc} / 2r_o) \int_0^{2\pi} \left( w + \frac{r_o}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{e}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta \quad (27b)$$

또한, 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_{rc} = (\rho_{rc}/2) \int_0^{2\pi} \{ A_{rc} (\dot{u}_r^2 + \dot{v}_r^2 + \dot{w}_r^2) \} r_o d\theta$$

$$= (\rho_{rc}/2) \int_0^{2\pi} \left[ A_{rc} \{ (\dot{u} - e \dot{\beta}_s)^2 + \left( \frac{r_o}{r} \dot{v} - \frac{e}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right)^2 + \dot{w}^2 \} \right] r_o d\theta \quad (28)$$

### 4.4 보강링 요소의 매트릭스 구성

보강링 요소의 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$u = \sum_n x_1^n \cos n\theta$$

$$v = \sum_n x_2^n \sin n\theta \quad (29)$$

$$w = \sum_n x_3^n \cos n\theta$$

$$\beta_s = \sum_n x_4^n \cos n\theta$$

보강링 요소에 대한 Lagrangian은 다음과 같다.

$$II_r = U_r^i + U_r^a - T_r \quad (30)$$

식 (29)를 식 (30)에 대입하고, Lagrangian의 변분값이 Stationary 조건을 만족시키므로 다음과 같은 매트릭스식을 얻을 수 있다.

$$[[K_r^i] + [K_r^a]](X^n) + [M_r]\{\ddot{X}^n\} = 0 \quad (31)$$

이 때,  $[K_r^i]$ ,  $[K_r^a]$  및  $[M_r]$ 은  $4 \times 4$  매트릭스이고, 부록 1에 정리되어 있다. 보강링 요소내의 주변방향 케이블의 매트릭스도 같은 방법으로 구할 수 있으며 부록 2에 정리되어 있다.

## 5. 해석 예

### 5.1 자유진동해석 예

본 연구를 통해 개발된 프로그램을 검증하기 위하여 참고문헌<sup>(5),(6)</sup>의 정해 및 이론해와 동일 치수의 구조물에 대한 해석을 통하여 고유진동수를 비교하였다.

#### 5.1.1 적용 예 1

하단이 회전단이고, 상단은 이동단인 원통 셸의 고유진동수에 대한 Armenakas<sup>(6)</sup>의 정해와의 비교를 실시하였으며, 해석에 사용된 구조물의 제원은 셸의 높이가 25.4m(1000in), 반경이 25.4m(1000in), 두께가 0.0254m(1in)인 원통 셸구조물을 대상으로 하였으며 탄성계수는  $20.67 \times 10^7 \text{kPa} (3.0 \times 10^7 \text{psi})$ ,

포아송비는 0.3, 구조물의 밀도는  $7.84 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  ( $7.33 \times 10^4 \text{lb s}^2/\text{in}$ )을 사용하였다. 프리스트레스 하중을 사용한 경우는 하중이 작용되는 방향의 변형도가 약 0.001정도가 되는  $57.815 \text{kN/m}$  ( $33000 \text{lb/in}$ )의 인장력이 작용될 경우에 대하여 해석하였다.

본 해석에서는 20개의 요소를 사용하였으며, 프리스트레스가 없을 때 및 자오방향의 프리스트레스가 작용될 때에 대한 값을 각각 wave number에 대한 mode별로 비교하였다. 이의 결과는 표 1과 표 2에 정리되어 있으며, 프리스트레스 하중이 작용되지 않았을 경우 8번째 wave number의 2차 모드에서 최대 2.3%의 오차가 발생되었으며, 기타의 경우는 1%이내의 오차범위를 나타냄으로써 정해와 거의 일치함을 알 수 있다. 주변방향의 프리스트레스하중이 작용될 경우도 8번째 wave number의 4차 모드에서 최대 2.6%의 오차가 발생되었으며, 기타는 1.6~0.2%의 오차를 나타냄으로써 정해에 근사한 값을 나타내었다.

5.1.2 적용 예 2

하단이 고정이고, 상단은 자유단인 원통 셸의 유체가 없을 경우와 유체가 가득 찼을 경우 에 대하여 실시하였으며, 높이/반경의 비가 작은 경우와 큰 경우에 대한 Haroun<sup>(6),(7)</sup>의 해석 값을 각 wave number에 대한 mode별로 비교하였다. 해석에 사용된 구조물의 제원은 각각 셸의 높이가 12.2m 및 21.96m, 반경이 18.3m 및 7.32m, 두께가 0.0254m인 원통 셸구조물을 대상으로 하였으며 탄성계수는  $20.67 \times 10^7 \text{kPa}$ , 포아송비는 0.3, 구조물의 밀도는  $7.84 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 을 사용하였으며, 유체의 밀도는  $1000 \text{kg/m}^3$ 를 사용하였다.

본 해석에서는 20개의 요소를 사용하였으며, 유체가 없을 때 및 가득차 있을 때에 대하여 각각 wave number에 대한 mode별로 Haroun<sup>(6),(7)</sup>의 해석 값과 비교하였다. 이의 결과는 표 3 및 표 4에 정리되어 있으며, 유사한 결과를 나타내고 있음을 보여준다.

표 1 프리스트레스 하중이 가해지지 않았을 경우에 대한 비교 (단위 : Hz)

Mode No. Wave No.	2	4	6	8	10
1 This study	31.28	32.01	32.29	32.73	33.58
Exact <sup>(5)</sup>	31.37	31.89	32.41	32.93	33.46
3 This study	26.01	30.49	31.60	32.36	33.36
Exact <sup>(5)</sup>	-	-	-	-	-
5 This study	19.60	27.82	30.31	31.63	32.93
Exact <sup>(5)</sup>	19.63	27.92	30.30	31.87	33.06
8 This study	12.62	22.97	27.57	30.01	31.94
Exact <sup>(5)</sup>	12.92	23.21	27.60	30.11	31.87

표 2 축방향 프리스트레스 하중이 가해졌을 경우에 대한 비교 (단위 : Hz)

Mode No. Wave No.	2	4	6	8	10
1 This study	31.99	34.70	38.04	42.32	47.46
Exact <sup>(5)</sup>	32.61	35.13	37.83	42.34	47.67
3 This study	26.85	33.31	37.47	42.04	47.32
Exact <sup>(5)</sup>	-	-	-	-	-
5 This study	20.70	30.88	36.38	41.48	47.01
Exact <sup>(5)</sup>	21.01	31.36	36.57	42.03	47.04
8 This study	14.28	26.59	34.14	40.27	46.33
Exact <sup>(5)</sup>	14.11	27.28	34.49	40.58	46.41



표 3 유체가 가득 담긴 경우의 고유진동수  
(단위 : Hz) (높이/반경=12.2/18.3)

Wave No.	Present analysis		Haroun <sup>(6)</sup> analysis	
	Mode 1	Mode 2	Mode 1	Mode 2
1	6.18	11.35	6.18	11.28
2	5.19	10.61	5.19	10.60
3	4.15	10.03	4.14	9.98
4	3.32	9.26	3.31	9.22
5	2.69	8.35	2.69	8.32
6	2.22	7.46	2.21	7.43

표 5 보강링이 있을 경우와 없을 경우에 대한 기본고유진동수(단위 : Hz)

Wave No.	Present analysis		Galletly <sup>(8)</sup> analysis	
	w/o Ring-stiffener	w/ Ring-stiffener	w/o Ring-stiffener	w/ Ring-stiffener
1	1775.9	1639.7	-	-
2	750.3	704.6	743.3	711.4
3	435.6	588.7	435.1	581.7
4	467.5	949.6	467.1	947.0
5	674.6	1493.3	673.2	1513.6

표 4 유체가 있을 경우와 없을 경우에 대한 고유진동수(Wave number : 1, 단위 : Hz)  
(높이/반경=21.96/7.32)

Mode No.	Present analysis		Haroun <sup>(7)</sup> analysis	
	Empty	Full	Empty	Full
1	19.17	5.31	19.26	5.31
2	56.01	15.58	56.42	15.64
3	85.81	23.06	-	23.24
4	96.13	29.76	-	29.85
5	102.47	34.99	-	34.85

## 5.2 지진하중에 대한 해석

지진하중에 대한 해석은 앞의 자유진동해석 예2의 높이/반경=12.2/18.3인 구조물을 대상으로 실시하였으며, 구조물의 감쇠비는 5%를 사용하였다. 시간이력 지진기록은 그림 3과 같은 시간간격이 0.01초, 지속시간이 24초이며 최대지반가속도가 0.2g인 인공지진을 사용하여 시간이력해석을 실시하였다.

하중의 경우는 보강링과 프리스트레스트 하중이 없는 경우(case 1), 정수압에 의한 주변방향의 초기응력을 상쇄할 수 있는 크기의 프리스트레스트 하중이 작용된 경우(case 2), 셀 높이의 1/5, 1/2 및 4/5의 위치에 각각 보강링(높이 0.1m, 폭 0.15m)이 설치되고 주변방향 프리스트레스트하중이 작용된 경우(case 3) 및 축방향으로 압축방향의 프리스트레스트하중(-500kN/m)이 추가된 경우(case 4)에 대하여 각각 해석하였다. 각 경우에 대한 해석은 내부에 유체가 가득 찬 경우에 대해 수행하였으며, 이에 대한 고유진동수는 다음의 표 6과 같다.

지진하중에 대한 셀 중앙부의 대한 시간이력 해석 결과가 각 경우별로 그림 4 ~ 그림 7에 나타나 있으며, 그림 8 ~ 그림 11은 최대처짐이 발생하는 시각의 각 절점변위를 도시한 그림이다. 표 6에 나타난 바와 같이 프리스트레스트에 의한 고유진동수의 변화량은 크지 않으나, 주변방향의 프리스트레스트보다 축방향의 프리스트레스트가 고유진동수에 큰 영향을 미치는 것으로 판단된다. 또한, 링보강에 의해 모우드수에 관계없이 고유진동수가 다소 증가하는 것으로 나타났다. 이는 적용 예 3에서의 1,2차 모우드에서는 고유

### 5.1.3 적용 예 3

Galletly<sup>(8)</sup>는 하단이 회전단이고, 상단은 이동단인 링보강 원통 셀에 14개의 보강링을 등간격으로 배치하여 고유진동수에 대한 해석을 실시하였다. 해석에 사용된 구조물의 제원은 셀의 높이가 0.470916m(18.54in), 반경이 0.1036828m(4.082in), 두께가  $1.1938 \times 10^{-3}$ m(0.047in), 보강링의 높이가  $2.1844 \times 10^{-3}$ m(0.086in), 보강링의 폭이  $2.9083 \times 10^{-3}$ m(0.1145in)인 원통 셀구조물을 대상으로 하였으며 탄성계수는  $20.67 \times 10^7$ kPa ( $3.0 \times 10^7$ psi), 포아송비는 0.3, 구조물의 밀도는  $7.84 \times 10^3$ kg/m<sup>3</sup>( $7.33 \times 10^4$ lbs<sup>2</sup>/in)을 사용하였다.

본 해석에서는 15개의 요소를 사용하여 각 wave number에 대한 기본고유진동수를 Galletly<sup>(8)</sup>의 이론값과 비교하였으며, 이의 결과는 표 5에 정리되어 있다. 보강링이 설치되지 않은 경우는 오차가 0.9% 이내로서 이론값과 거의 차이가 없는 것으로 나타났으며, 보강링이 설치된 경우는 최대 1.3%의 오차가 발생되어 이론값에 근사한 값을 나타내었다.

표 6 각 하중 경우별 고유진동수(Wave number : 1, 단위: Hz)

Mode No.	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
	No prestressed	Prestressed(C)	Prestressed (C) + ring-stiffener	Prestressed (C+A)+ ring-stiffener
1	6.19	6.18	6.45	6.42
2	11.35	11.35	11.88	11.81
3	15.40	15.40	16.23	16.06
4	18.45	18.44	18.70	18.44
5	21.38	21.38	22.11	21.64
6	24.37	24.37	25.03	24.28
7	27.72	27.72	29.44	28.55
8	31.49	31.49	32.27	31.01
9	35.87	35.86	36.23	34.43
10	41.00	40.99	41.04	38.69

C : 주변방향 프리스트레스(circumferential prestress)

A : 축방향 프리스트레스(meridional prestress)

C+A : 주변방향 및 축방향 프리스트레스(circumferential and meridional prestress)

진동수가 감소하는 결과와 상이하며, 이는 유체에 의한 부가질량효과에 의해 1,2차모우드에서 발생할 수 있는 보강링의 강제 거동에 의한 질량의 영향비가 적어졌기 때문인 것으로 판단된다.

셸의 중앙부에서 초기처짐을 제외한 동적처짐은 링보강을 설치하였을 경우(case 3, case 4)가 없을 경우(case 1, case 2)에 비해 70%정도의 값으로 작게 나타났으나, 반경방향의 최대처짐을 나타내는 절점 8에서의 처짐은 오히려 10%정도로 크게 나타났다. 이는 그림 10과 그림 11에 나타난 바와 같이 보강링의 질량이 절점에 집중됨에 따라 고차모우드에 의한 변위가 크게 발생되었기 때문인 것으로 판단된다.

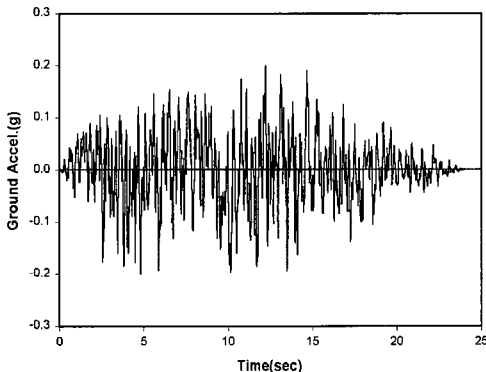


그림 3 인공지진이력

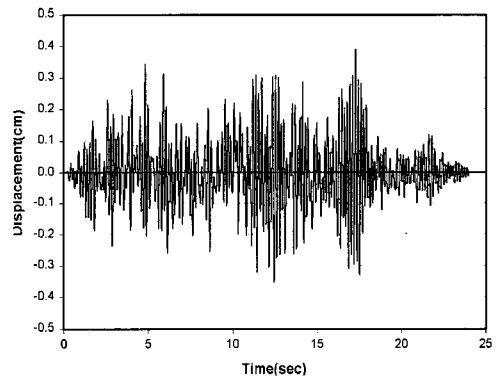


그림 4 셸 중앙의 반경방향 변위이력 : case 1 (t=17.29sec, d<sub>max</sub>=3.890mm)

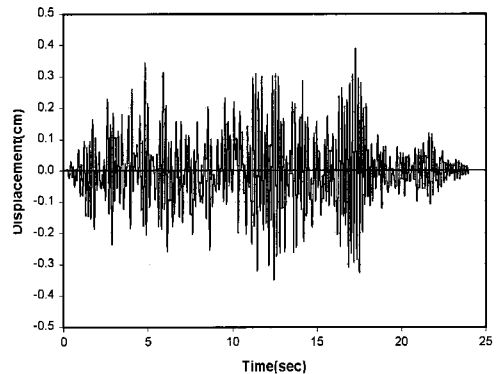


그림 5 셸 중앙의 반경방향 변위이력 : case 2 (t=17.29sec, d<sub>max</sub>=3.891mm)

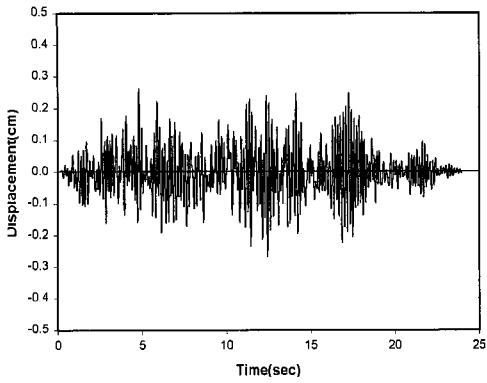


그림 6 셸 중앙의 반경방향 변위이력 : case 3  
( $t=12.45\text{sec}$ ,  $d_{\text{max}}=2.687\text{mm}$ )

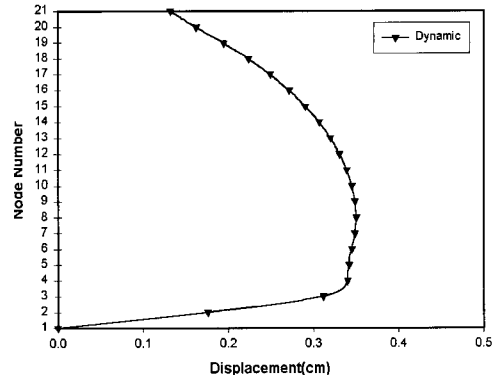


그림 9 반경방향 최대변위 : case 2( $t=17.29\text{sec}$ )

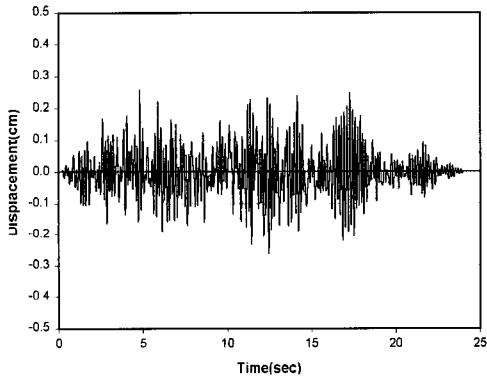


그림 7 셸 중앙의 반경방향 변위이력 : case 4  
( $t=12.45\text{sec}$ ,  $d_{\text{max}}=2.625\text{mm}$ )

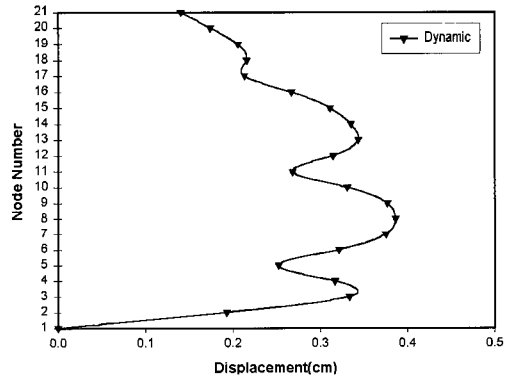


그림 10 반경방향 최대변위 : case 3( $t=12.45\text{sec}$ )

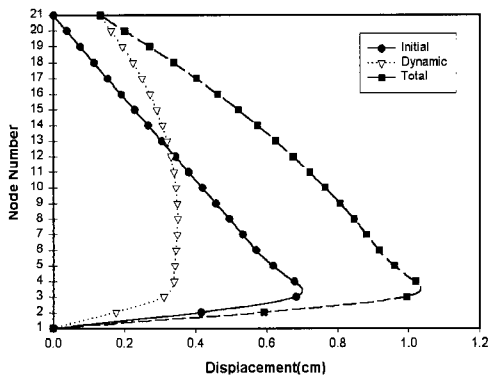


그림 8 반경방향 최대변위 : case 1( $t=17.29\text{sec}$ )

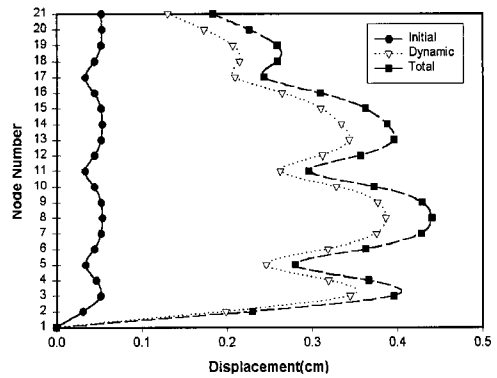


그림 11 반경방향 최대변위 : case 4( $t=12.45\text{sec}$ )

## 6. 결 론

보강링 요소의 모델은 축대칭 셸요소를 이용하였으며, 본체 구조물과 절점에서 부착되어 있는

것으로 가정하여 이의 편심을 고려하였으며, 프로그램을 통하여 해석하여 고유진동수를 문헌과 비교한 결과 20개의 요소에서도 정해에 근접한 값을 얻을 수 있었다.

이를 통하여 지진하중에 대한 액체저장탱크의 거동을 시간이력해석한 결과, 프리스트레스에 의한 고유진동수의 변화량은 크지 않으나, 주변방향의 프리스트레스보다 축방향의 프리스트레스가 고유진동수에 큰 영향을 미치는 것으로 나타났으며, 유체가 가득찬 경우 링보강에 의해 모우드수에 관계없이 고유진동수가 다소 증가하는 것으로 나타났다. 비어 있는 액체저장탱크의 경우는 1,2차 모우드에서는 보강링의 강제 거동에 의해 고유진동수가 감소하는 현상을 나타내나, 유체가 가득찬 경우는 유체에 의한 부가질량이 상대적으로 크기 때문에 보강링의 질량에 의한 영향이 적기 때문인 것으로 판단된다.

쉘의 중앙부에서 동적처짐은 링보강을 설치하였을 경우가 없을 경우에 비해 70%정도의 값으로 작게 나타났으나, 반경방향의 최대처짐은 오히려 10%정도 크게 나타났다. 이는 보강링의 질량이 절점에 집중됨에 따라 고차모우드에 의한 변위가 크게 발생되었기 때문인 것으로 판단된다.

### 감사의 글

본 연구는 1999년도 경원대학교 학술연구비의 지원을 받아 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

1. Sanders, J. L., "Nonlinear theories for thin shells," *Quarterly Appl. Math.*, Vol. 21, 1963, pp. 21-36.
2. 황철성, "지진하중을 받는 축대칭 프리스트레스 쉘 구조물의 동적해석", 한국지진공학회 논문집, 제2권 제4호, 1998, pp. 11-22.
3. Tillerson, J. R. and Haisler, W. E., "SAMMSOR-II, a finite element program to determine stiffness and mass matrices of shells of revolution," TEES-RPT-70-18, Texas A & M University, 1970.
4. 황철성, 백인열, "유체의 영향을 고려한 프리스트레스 액체저장 탱크의 동적해석", 한국지진공학회 논문집, 제3권 제4호, 1999, pp. 71-82.
5. Menakas, A. E., "Influence of initial stress on the vibrations of simply supported circular cylindrical shells," *AIAA J.*, Vol. 2, 1964, pp. 1607-1612.
6. Haroun, M. A. and Housner, G. W., "Complication in free vibration analysis of tanks," *ASCE*, Vol. 108, No. EMS, Oct., 1982, pp. 801-818.
7. Haroun, M. A. and Housner, G. W., "Dynamic characteristics of liquid storage tanks," *ASCE*, Vol. 108, No. EMS, Oct., 1982, pp. 783-800.
8. Galletly, G. D., "On the in-vacuo vibrations of simply-supported ring-stiffened cylindrical shells," *Proceedings of 2nd U.S. National Congress, Applied Mechanics*, 1954, pp. 225-231.
9. Cook, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 2nd Ed*, John Wiley and Sons, 1981, pp. 537.
10. Clough, R. W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw Hill, 1989, pp. 634.

부 록 1. 보강링 요소 매트릭스

$[K_r^i]$  :

[wave number(n)=0 일 때]

$$[K_r^i] = [0]$$

[wave number(n)≠0 일 때 ]

$[K_r^i] =$

$$\frac{\pi E_r A_r \epsilon_r^i}{r_o} \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}\right)^2 & 0 & 0 & -e\left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 & \left(\frac{nr_o}{r}\right)\left(1+\frac{e}{r}\right) & 0 & 0 \\ \text{symm.} & \left(n+\frac{ne}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ & & & \left(\frac{ne}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$[K_r^a]$  :

[wave number(n)=0 일 때]

$[K_r^a] =$

$$\frac{2\pi E_r}{r_o} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_r + \frac{I_1}{r_o^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

[wave number(n)≠0 일 때]

$[K_r^a] =$

$$\frac{\pi E_r}{r_o} \begin{bmatrix} I_2\left(\frac{n^4}{r_o^2}\right) & & & I_2\left(\frac{n^2}{r_o} - \frac{n^4 e}{r_o^2}\right) \\ + \frac{G_r C_r}{E_r} \left(\frac{n^2}{r_o^2}\right) & 0 & 0 & + \frac{G_r C_r}{E_r} \left(\frac{n^2}{r_o} - \frac{n^2 e}{r_o^2}\right) \\ & A_r \left(\frac{nr_o}{r}\right)^2 & A_r \left(\frac{nr_o}{r}\right) \left(1 + \frac{n^2 e}{r}\right) & 0 \\ & & A_r \left(1 + \frac{n^2 e}{r}\right)^2 + I_1 \left(\frac{1-n^2}{r_o}\right)^2 & 0 \\ \text{symm.} & & & I_2 \left(1 - \frac{n^2 e}{r_o}\right)^2 \\ & & & + \frac{G_r C_r}{E_r} \left(\frac{ne}{r_o} - n\right)^2 \end{bmatrix}$$

$[M_r]$  :

[wave number(n)=0 일 때]

$[M_r]=$

$$2\pi r_o \rho_r \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 & -e A_r \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & A_r & 0 \\ \text{symm.} & & & A_r e^2 + I_3 \end{bmatrix}$$

[wave number(n)≠0 일 때]

$[M_r]=$

$$\pi r_o \rho_r \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 & -e A_r \\ & A_r \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 + \frac{I_1}{r^2} & A_r \left(\frac{n e r_o}{r^2}\right) + \frac{I_1}{r r_o} \left(n + \frac{n e}{r}\right) & 0 \\ & & A_r \left(1 + \frac{n^2 e^2}{r^2}\right) + I_1 \left(\frac{n}{r_o} + \frac{n e}{r r_o}\right)^2 & 0 \\ \text{Symm.} & & & A_r e^2 + I_3 \end{bmatrix}$$

## 부 록 2. 보강링 요소내의 주변방향 케이블의 매트릭스

$[K_{rc}^i]$  :

[wave number(n)=0 일 때]

$[K_{rc}^i] = [0]$

[wave number(n)≠0 일 때]

$[K_{rc}^i]=$

$$\frac{\pi P_{rc}}{r_o} \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}\right)^2 & 0 & 0 & -e \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ & \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 & \left(\frac{n r_o}{r}\right) \left(1 + \frac{e}{r}\right) & 0 \\ & & \left(n + \frac{n e}{r}\right)^2 & 0 \\ \text{Symm.} & & & \left(\frac{n e}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$[K_{rc}^a]$  :

[wave number(n)=0 일 때]

$[K_{rc}^a]=$

$$\frac{2\pi E_{rc} A_{rc}}{r_o} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[wave number(n) ≠ 0 일 때]

[K<sub>rc</sub><sup>a</sup>]=

$$\frac{\pi E_{rc} A_{rc}}{r_o} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{nr_o}{r}\right)^2 & \left(\frac{nr_o}{r}\right)\left(1 + \frac{n^2 e}{r}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{n^2 e}{r}\right) & 0 \\ \text{Symm.} & & & 0 \end{bmatrix}$$

[M<sub>rc</sub>] :

[wave number(n)=0 일 때]

[M<sub>rc</sub>]=

$$2\pi r_o \rho_{rc} A_{rc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{Symm.} & & & e^2 \end{bmatrix}$$

[wave number(n) ≠ 0 일 때]

[M<sub>rc</sub>]=

$$\pi r_o \rho_{rc} A_{rc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e \\ 0 & \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 & \left(\frac{ner_o}{r^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{n^2 e^2}{r^2}\right) & 0 \\ \text{Symm.} & & & e^2 \end{bmatrix}$$