

감쇠행렬을 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사 기법

Method for Checking Missed Eigenvalues of Eigenvalue Problem Considering Damping Matrix

정 형 조* 김 병 완** 이 인 원***
Jung, Hyung Jo Kim, Byoung Wan Lee, In Won

국문요약

지반-구조물 상호작용 시스템, 구조물의 진동제어 시스템, 복합재료 구조물과 같은 비비례 감쇠 구조물의 경우, 정확한 동적응답을 얻기 위해서는 감쇠행렬을 고려한 고유치 문제를 계산하는 것이 필수적이다. 그러나, 대부분의 고유치 해법에서는 구하고자 하는 고유치 중 일부를 누락시킬 수 있기 때문에, 어떤 고유치 해법이 실제 문제에 응용 가능한 방법이 되기 위해서는 누락된 고유치의 존재 여부를 검사하는 기법을 포함하고 있어야만 한다. 비감쇠나 비례감쇠 시스템의 경우에는 널리 알려진 Sturm 수열 성질을 이용하여 누락된 고유치를 쉽게 검사할 수 있는 반면에, 비비례 감쇠 시스템의 경우에는 아직까지 검사 기법이 개발되어 있지 않다. 본 논문에서는 편각의 원리를 이용하여 감쇠행렬을 고려한 고유치 문제의 누락된 고유치의 존재 여부를 검사하는 기법을 제안하였다. 제안방법의 효용성을 검증하기 위하여, 두 가지 수치예제를 고려하였다.

주요어 : 비비례 감쇠, 감쇠를 고려한 고유치문제, 누락된 고유치, 편각의 원리

ABSTRACT

In the case of the non-proportionally damped system such as the soil-structure interaction system, the structural control system and composite structures, the eigenproblem with the damping matrix should be necessarily performed to obtain the exact dynamic response. However, most of the eigenvalue analysis methods such as the subspace iteration method and the Lanczos method may miss some eigenvalues in the required ones. Therefore, the eigenvalue analysis method must include a technique to check the missed eigenvalues to become the practical tools. In the case of the undamped or proportionally damped system the missed eigenvalues can easily be checked by using the well-known Sturm sequence property, while in the case of the non-proportionally damped system a checking technique has not been developed yet. In this paper, a technique of checking the missed eigenvalues for the eigenproblem with the damping matrix is proposed by applying the argument principle. To verify the effectiveness of the proposed method, two numerical examples are considered.

Key words : non-proportional damping, eigenproblem with damping, missed eigenvalues, argument principle

1. 서 론

부분공간 반복법과 Lanczos 방법과 같은 대부분의 고유치 해석 방법들은 구조물의 고유벡터를 모두 계산하지 않고 저차의 일부분만을

계산하기 때문에 구하고자 하는 고유치 중의 일부를 누락시킬 수 있다. 이렇게 구해진 불완전한 저차의 고유벡터 집합을 가지고 모드 중첩법을 수행한다면 정확한 동적응답을 얻을 수 없다. 따라서, 실제 문제에 적용 가능한 고유치 해법이 되기 위해서는 누락된 고유치의 존재 여부를 검사하는 기법을 반드시 포함하고 있어야만 한다.

현재까지는 Sturm 수열 성질(Sturm sequence

* 한국과학기술원 토목공학과 박사후 연구원

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

*** 정희원 · 한국과학기술원 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2000년 9월 30일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.

property)을 이용하여 누락된 고유치를 검사하는 방법이 널리 사용되어 왔다.⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾ Sturm 수열 성질을 이용한 기법은 ADINA와 같은 실제 상용 유한요소 프로그램에도 적용되고 있다. 그러나, 이 기법은 비감쇠 및 비례 감쇠 구조물과 같이 감쇠 행렬을 필요로 하지 않는 고유치 문제에만 적용이 가능하다는 문제점을 가지고 있다.⁽⁵⁾

지반-구조물 상호작용 시스템, 구조물의 진동 제어 시스템, 복합재료 구조물과 같은 비비례 감쇠 시스템의 경우에는 정확한 동적응답을 얻기 위해서 감쇠를 고려한 고유치 문제를 계산해야만 한다. 많은 연구자들⁽⁶⁾⁻⁽¹⁰⁾이 감쇠를 고려한 고유치 문제를 계산하는 방법을 개발하는 연구를 수행하였다. 반면에, 고유치 해법과 더불어 필수적으로 요구되는 누락된 고유치의 존재 여부를 검사하는 기법에 대한 연구는 거의 수행되고 있지 않은 상태이다.

감쇠를 고려한 고유치 문제에 Sturm 수열 성질을 이용한 기법이 확장되어 적용될 수 있다면, 비비례 감쇠를 갖는 구조물에 대한 누락된 고유치의 존재 여부는 이 기법으로 간단히 검사할 수 있다. 그러나, Sturm 수열 성질은 기본적으로 실수 영역에서 다항식의 근의 개수를 계산하기 위해 유도된 성질이기 때문에, 복소수 형태의 고유치를 갖는 고유치 문제에 직접적으로 적용할 수는 없다. Tsai and Chen⁽¹¹⁾은 복소수 영역에서 다항식의 근의 개수를 계산할 수 있는 확장된 Sturm 수열 성질을 제안하였다. 하지만, Tsai and Chen에 의해 제안된 기법은 다항식의 모든 계수를 알아야 하기 때문에 많은 연산회수를 필요로 하는 문제점을 가지고 있다. 따라서, 이 기법은 특성다항식이 고차가 되어 많은 계수를 가지게 되는 대형 고유치문제에는 적용이 불가능하다.

본 논문에서는, 감쇠를 고려한 고유치 문제의 누락된 고유치를 검사하기 위해서 복소수 영역에서 단순 폐곡선 내의 고유치의 개수를 계산할 수 있는 편각의 원리(argument principle)⁽¹²⁾⁻⁽¹⁶⁾를 이용하였다. 이 원리를 대형 시스템에 적용하기 위하여 반복적인 접근법(iterative approach)을

도입하였다. 즉, 단순 폐곡선을 검색점의 집합으로 이산화시키고 LDL^T 행렬분해 방법을 이용하여 각 검색점에서의 편각을 계산하는 방식으로 대형 고유치문제의 누락된 고유치의 존재 여부를 검사하는 기법을 개발하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 편각의 원리를 이용한 검사 기법을 제안하고, 제안방법의 고려사항을 검토하였다. 3장에서는 제안방법의 효용성을 검증하기 위하여 수치예제에 대한 해석을 수행하였다. 마지막으로, 4장에서는 결론 및 추후 연구과제를 기술하였다.

2. 누락된 고유치 검사 기법

2.1 이론

비비례감쇠 시스템의 고유값은 식 (1)과 같이 감쇠를 고려한 고유치문제를 계산하므로써 구할 수 있다.

$$\lambda_i^2 M \phi_i + \lambda_i C \phi_i + K \phi_i = 0 \quad (1)$$

여기서 M , C 와 K 는 각각 $(n \times n)$ 차의 질량, 감쇠, 강성행렬을, λ_i 는 i 번째 고유치를, ϕ_i 는 i 번째 고유벡터를 의미한다.

서론에서 언급한 바와 같이, 식 (1)과 같은 2차 고유치문제에 대한 누락된 고유치를 검사하는 기법은 아직까지 개발되어 있지 않다. 여기서는 편각의 원리를 이용하여 누락된 고유치를 검사하는 기법을 제안하고자 한다.

먼저, 고유치문제의 고유치와 특성다항식의 근과의 관계를 생각해보자. 즉, 식 (1)과 같은 2차 고유치문제의 고유치는 다음과 같은 특성다항식의 근과 같다.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) \\ &= a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{2n-1} \lambda^{2n-1} + a_{2n} \lambda^{2n} \quad (2) \end{aligned}$$

여기서 λ 는 복소수이고 $a_i (i=0, 1, \dots, 2n)$ 는 실수 계수이다.

그리고, 편각의 원리⁽¹²⁾⁻⁽¹⁶⁾는 다음과 같이 특성

다항식에 적용될 수 있다: 만약 다항식 $f(\lambda)$ 가 단순 폐곡선 S 의 내부와 경계에서 해석적이라면, 다음과 같은 방정식이 도입된다.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad (3)$$

여기서 N 는 다항식 $f(\lambda)$ 의 근의 개수이고 $\Delta\theta$ 는 λ 가 단순 폐곡선 S 를 한바퀴 회전할 때 다항식 $f(\lambda)$ 의 편각 θ 의 변화를 의미한다.

식 (3)의 의미는 다음과 같다. 다항식 $f(\lambda)$ 가 λ -평면에서 폐곡선 S 내에 N 개의 근을 갖는다면, $f(\lambda)$ 는 $f(\lambda)$ -평면에서 원점을 N 번 회전한다. 그림 1에서 보는 바와 같이, 다항식 $f(\lambda)$ 가 λ -평면에서 폐곡선 S 내에 4개의 근을 갖기 때문에 이동점 $f(\lambda)$ 는 $f(\lambda)$ -평면에서 원점을 네바퀴 회전한다.

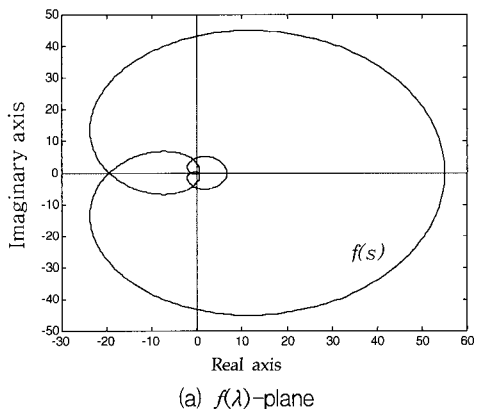
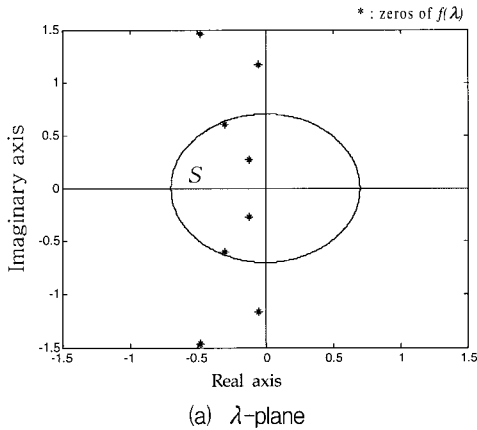


그림 1 편각의 원리

그러나, 대형 고유치 문제의 특성 다항식을 대수 연산에 의해 직접 구할 수는 없기 때문에, 수치적 또는 반복적인 접근 방법을 통해서 감쇠 행렬을 고려한 대형 고유치 문제에 편각의 원리를 적용해야 한다. 반복적인 접근법을 수행하기 위하여 다음의 2가지 절차를 이용하였다. 첫번째 절차는 단순 폐곡선 S 를 이산화하는 것이다. 두번째 절차는 특성다항식과 LDL^T 행렬 분해에 의해 행렬분해된 행렬 사이의 관계를 이용하는 것이다. 즉, 폐곡선 S 를 그림 2에서 보는 바와 같이 검색점들의 집합으로 고려하고, 각 검색점에 대해 LDL^T 행렬분해를 수행한다. 그리고 나서 각 검색점의 편각을 다음과 같이 계산한다.⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁷⁾

$$f(\lambda_j) = \det(\lambda_j^2 M + \lambda_j C + K) = \det LDL^T = \prod_{i=1}^n d_{ii} = r_j \angle \theta_j \quad (4)$$

여기서 d_{ii} 대각행렬 D 의 대각요소이고, r_j 와 θ_j 는 각각 극좌표 형태의 값 $f(\lambda_j)$ 의 크기와 편각을 의미한다. 폐곡선 S 내부에 존재하는 고유치의 개수는 각 검색점의 편각의 변화를 더함으로써 구할 수 있다.

그림 2는 편각의 원리를 이용한 누락된 고유치 검사 과정을 간략하게 보여준다. 먼저, 반원을 따라가며 상반면에 검색점을 선정한다(①). 그리고 나서 각 검색점에 대해서 LDL^T 행렬분해를 수행한다. 실수축에 대해서는 편각의 변화

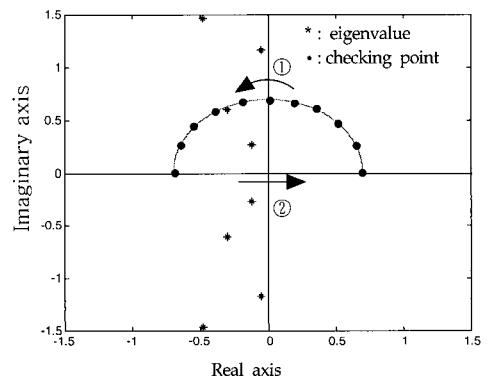


그림 2 편각의 원리를 이용한 누락된 고유치 검사 과정

가 없기 때문에 검사 과정을 수행할 필요가 없다(②). 편각의 총 변화량은 각 검색점의 변화량을 더함으로써 얻어진다. 마지막으로, 총 회전 회수(식 (3)의 N)와 고려한 고유치의 개수를 비교하여 누락된 고유치의 존재 여부를 검사한다. 단순 폐곡선 S 의 형태와 크기 및 검색점의 개수는 다음 절에서 보다 자세하게 검토하였다.

2.2 고려사항

2.2.1 단순폐곡선의 형태 및 크기

제안방법을 실제 문제에 적용하기 위해서는, 단순 폐곡선 S 의 크기와 형태를 적절하게 선정하는 것이 매우 중요하다. 먼저, 폐곡선 S 의 형태에 대해서 생각해 보자. 폐곡선의 가장 단순한 형태는 그림 3(a)와 같이 원이다. 경감쇠(under-damped) 시스템의 경우에는 고유치가 항상 공액 복소수 형태를 갖기 때문에, 폐곡선은 그림 3(b)와 같이 복소 평면에서 상반면만 고려하면 된다. 또한, 안정한(stable) 구조물의 경우에는 모든 고유치가 복소평면의 좌반면에만 존재한다. 그런 까닭에, 폐곡선은 그림 3(c)와 같이 제 2사분면 부분에서만 고려하면 된다. 그러나, 감쇠가 매우 작은 시스템의 경우에, 고유치가 허수축과 매우 근접한 위치에 존재하게 된다. 그렇다면, 그림 3(c)와 같은 폐곡선은 허수축 부분에서 고유치와 매우 근접하기 때문에, 편각의 급격한 변화가 일어나는 문제점이 존재한다.

이상의 검토를 통해서, 감쇠를 고려한 고유치 문제의 누락된 고유치를 검사하기 위한 가장 적절한 폐곡선의 형태는 그림 3(b)와 같이 상반원과 실수축의 직선으로 구성되어야 함을 알 수 있다.

폐곡선의 크기, 즉 그림 3(b)에서 반원의 반경은 고려한 고유치 중에서 가장 큰 고유치보다 아주 조금 더 커야 한다. 왜냐하면, 폐곡선이 고려한 고유치 중에서 가장 큰 고유치 다음 번의 고유치를 포함하지 않는다는 것을 증명해야 하기 때문이다. 반면에, 반원의 반경과 최대 고유치의 크기의 차이가 너무 작아 폐곡선과 고유치가 매우 근접해 있다면, 최대 고유치와 근접한 폐곡선 부분에서 편각의 급격한 변화가 발생하는 문제점이 존재 하게 된다. 그런 까닭에, 누락된 고유치를 정확하게 검사하기 위해서는, 너무 크지도 않고 너무 작지도 않는 적절한 크기의 폐곡선을 선정하는 것이 매우 중요하다. Bathe⁽¹⁾가 제안한 Sturm 수열 검사 기법에서는 감쇠를 고려하지 않은 고유치문제에 대해서 최대 고유치의 크기보다 1.01배 큰 값을 사용했다. 그러나 감쇠를 고려한 다수의 고유치문제를 해석한 결과, Bathe가 사용한 값은 그 다음 최대 고유치를 포함하지 않기에는 너무 큰 차이를 보이는 값이었다. 따라서, 제안 방법에서는 폐곡선의 크기를 최대 고유치의 크기보다 1.005배 큰 값을 사용했고, 최대 고유치 부근의 폐곡선에 대해서는 편각의 급격한 변화를 관찰하기 위해서 세분하여 검사하는 과정을 추가하였다.

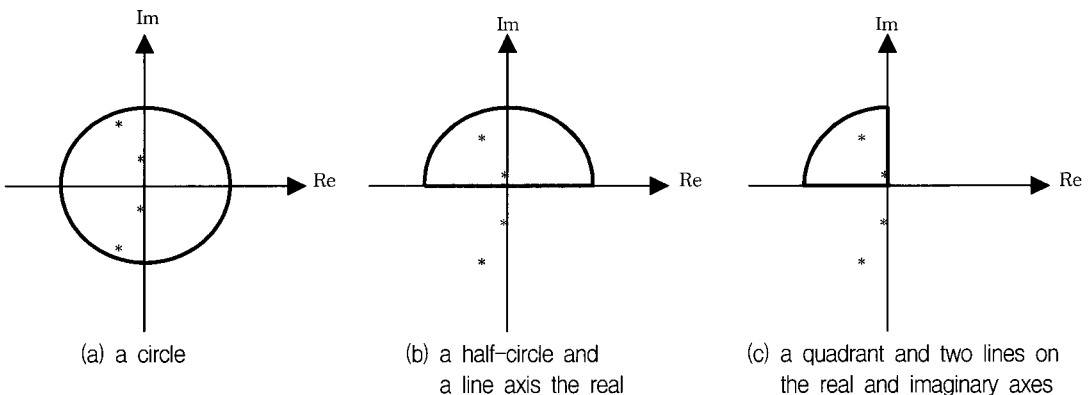


그림 3 단순 폐곡선 S 의 형태(*: eigenvalue)

2.2.2 검색점의 개수

이론적으로 볼 때, 검색점의 개수가 충분히 많다면 제안방법은 누락된 고유치를 정확하게 검사할 수 있다. 그러나, 검색점의 수가 많아지면 연산회수가 증가하는 문제점이 생긴다. 검색점의 최적의 개수를 해석적으로 구할 수 없기 때문에, 최적의 값은 많은 수치 예제를 해석함으로써 경험적으로 얻을 수 있다. 본 연구에서는, 자유도가 50에서 1008까지 되는 다섯 개의 예제를 해석한 결과를 통해서 고려된 고유치의 개수보다 6배 많은 수의 검색점이 가장 효과적임을 알아냈다. 먼저 폐곡선을 등분한 후에, 최대 고유치와 근접한 폐곡선 부분은 세분한다. 그 이유는 고유치와 근접한 폐곡선 부분은 편각의 급격한 변화가 일어나기 때문에 이 부분의 변화를 정확하게 파악하기 위해서는 추가 검색점이 필수적으로 요구된다. 그리고, 두 검색점 사이에서 편각이 급격한 변화를 보이면, 두 검색점 사이에 앞의 경우와 마찬가지로 검색점을 추가한다. 검색점의 최적의 수에 대한 연구는 계속 수행중이다. 위와 같은 검토에 따라 제안방법은 표 1과 같은 알고리즘으로 나타낼 수 있다.

표 1 제안방법의 알고리즘

<p>Step 1: Calculate the size of the contour, ρ.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Select 1.005 times the magnitude of the qth eigenvalue ($\rho=1.005 \lambda_q$). <p>Step 2: Determine the initial checking points.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Divide the contour into 6ρ equal parts. - If necessary, subdivide the part of the contour that is close to an eigenvalue. <p>Step 3: Perform the checking process.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Perform the LDL^T factorization at each checking point. - Calculate the argument θ_j at each checking point. <p>Step 4: Analyze the variations of the arguments.</p> <ul style="list-style-type: none"> - If an aggressive variation of the argument occurs at a checking point, then go to Step 5 and if not, go to Step 6. <p>Step 5: Add the extra checking points.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Go to Step 3. <p>Step 6: Check the missed eigenvalues.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Calculate the total variation of the argument and the number of rotations. - Compare the number of rotations (N in equation (3)) with the number of considered eigenvalues (ρ).
--

(q : number of calculated eigenvalues, ρ : number of considered eigenvalues($\rho=q/2$))

3. 수치해석

제안방법의 효용성을 증명하기 위하여 두 가지 수치예제에 대한 해석을 수행하였다. 먼저, 감쇠를 고려한 고유치 문제의 누락된 고유치를 정확하게 검사할 수 있는 지를 검증하기 위하여 정확한 고유치 값을 알 수 있는 단순 스프링-질량-감쇠기 시스템을 고려하였다. 그리고 실제 대형 구조물에도 제안 방법을 적용할 수 있는지 검증하기 위하여 3차원 대형 뼈대 구조물을 고려하였다.

3.1 단순 스프링-질량-감쇠기 시스템⁽¹⁸⁾

스프링-질량-감쇠기 시스템의 질량, 감쇠, 강성행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M = mI \tag{5}$$

$$C = \alpha M + \beta K \tag{6}$$

$$K = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 1 & \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기서 α 와 β 는 Rayleigh 감쇠의 감쇠 계수를 의미한다. 이 시스템의 해석적인 해는 다음과 같은 관계식을 통해 구할 수 있다:

$$\lambda_{2i-1,2i} = -\xi_i \omega_i \pm j\omega_i \sqrt{1-\xi_i^2} \text{ for } i=1, \dots, n \quad (8)$$

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i \right) \quad (9)$$

$$\omega_i = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \frac{2i-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

여기서 ω_i 와 ξ_i 는 각각 비감쇠 고유진동수와 모드 감쇠비이다.

해석에 사용된 시스템의 차수는 50이다. k 와 m 은 1이고, Rayleigh 감쇠의 계수 α 와 β 는 각각 0.05와 0.5이다. 저차 6개의 정확한 고유치는 표 2와 같다. 이 값은 해석적인 해이기 때문에, 저차 6개의 고유치에는 누락된 고유치가 존재하지 않는다.

고려한 영역에서 제안 방법이 누락된 고유치가 없음을 정확하게 파악하는 지를 알아보기 위하여 검사 과정을 수행하였다. 먼저, 검사 과정에서 고려하는 고유치의 개수는 3이고($p=3$), 폐곡선의 크기는 6번째 고유치의 크기보다 1.005배 큰 값을 취한다($\rho=1.005$ $|\lambda_6|=0.1561$). 상반면에서 반경 ρ 을 갖는 반원은 8등분된다. 그리고, 최대 고유치의 편각이 101.5° 이기 때문에, 101° 와 102° 사이를 4등분으로 세분한다. 첫번째 검사과정의 결과는 표 3에 나타낸 바와 같다. 모든 검색점에서 편각의 급격한 변화가 없기 때문에 추가적인 검색점은 필요 없다. 표 3에서 보는 바와 같이 편각의 총 변화량이 1080° 이고, 이에 따라 총 회전 회수는 다음과 같이 구해진다.

표 2 저차 6개의 정확한 고유치

Mode number	Eigenvalues	
	Real	Imaginary
1	0.02524	0.01817
2	0.02524	0.01817
3	0.02718	0.08923
4	0.02718	0.08923
5	0.03103	0.15224
6	0.03103	0.15224

$$N = \frac{\sum \Delta \theta_j}{2\pi} = \frac{1080^\circ}{360^\circ} = 3$$

마지막으로, 누락된 고유치를 검사하는 과정은 다음과 같다. 단순 폐곡선 내에 존재하는 고유치의 개수와 총 회전 회수가 모두 3이므로 단순 폐곡선 내에는 누락된 고유치가 존재하지 않는다. 이상의 결과로부터, 제안방법이 감쇠행렬을 고려한 고유치문제에서 누락된 고유치를 정확하게 검사하는 기법임을 확인하였다.

표 3 편각 및 편각의 변화량

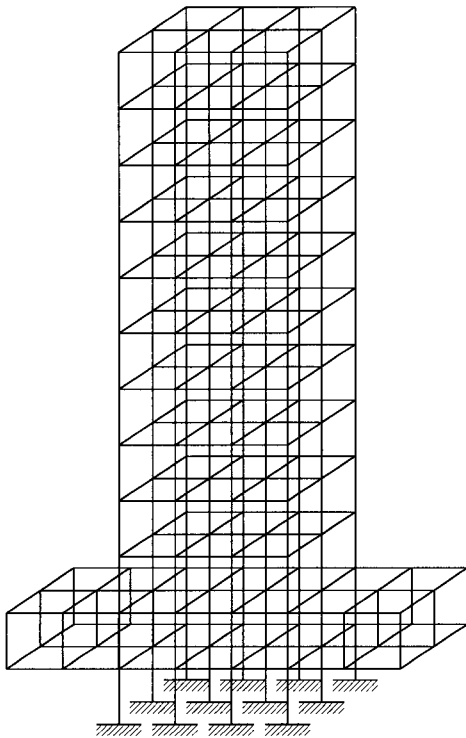
First checking process				$\sum \Delta \theta_j$
λ_j	θ_j	$\Delta \theta_j$	Y/N	
origin	0.0	-	-	0.0
$\rho \angle 10^\circ$	108.9	108.9	N	108.9
$\rho \angle 20^\circ$	215.4	106.5	N	215.4
$\rho \angle 30^\circ$	316.5	101.1	N	316.5
$\rho \angle 40^\circ$	50.0	93.5	N	410.0
$\rho \angle 50^\circ$	133.2	83.2	N	493.2
$\rho \angle 60^\circ$	203.7	70.5	N	563.7
$\rho \angle 70^\circ$	259.2	55.5	N	619.2
$\rho \angle 80^\circ$	297.6	38.4	N	657.6
$\rho \angle 90^\circ$	317.5	19.9	N	677.5
$\rho \angle 100^\circ$	329.9	12.4	N	689.9
$\rho \angle 101^\circ$	348.0	18.1	N	708.0
$\rho \angle 101.25^\circ$	5.7	17.7	N	725.7
$\rho \angle 101.5^\circ$	44.8	39.1	N	764.8
$\rho \angle 101.75^\circ$	88.0	43.2	N	808.0
$\rho \angle 102^\circ$	108.4	20.4	N	838.4
$\rho \angle 110^\circ$	139.1	30.7	N	859.1
$\rho \angle 120^\circ$	151.8	12.7	N	871.8
$\rho \angle 130^\circ$	173.2	21.4	N	893.2
$\rho \angle 140^\circ$	201.6	28.4	N	921.6
$\rho \angle 150^\circ$	235.7	34.1	N	955.7
$\rho \angle 160^\circ$	274.4	38.7	N	994.4
$\rho \angle 170^\circ$	316.4	42.0	N	1036.4
$\rho \angle 180^\circ$	0.0	43.6	N	1080.0

where $0^\circ \leq \theta_j \leq 360^\circ$, $\Delta \theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, and 'Y' means that the additional checking points are required and 'N' the additional ones are not required.

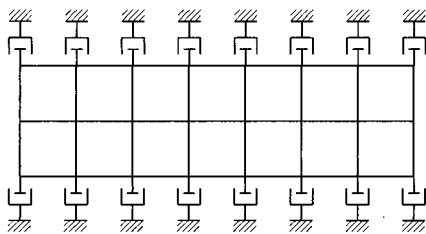
3.2 집중 감쇠기를 부착한 3차원 뼈대 구조물

두번째 수치해석 예제는 그림 4와 같이 집중 감쇠기를 갖는 3차원 대형 뼈대 구조물이다. 유한요소 모델은 1008개의 자유도를 갖는다. 재료적 특성과 단면 특성은 그림 4에 나타난 바와 같다. 질량행렬의 형태는 일관질량행렬을 사용

- Lumped Damper : 10N·sec/m
- Young's Modulus : 2.1e+11Pa
- Mass Density : 7850kg/m
- Cross-section Inertia : 8.3e-6m⁴
- Cross-section Area : 0.01m



(a) Three-dimensional frame structure



(b) Damping from two-layer foundation

그림 4 집중 감쇠기가 부착된 3차원 뼈대 구조물

하였다. 감쇠행렬 C는 Rayleigh 감쇠와 집중감쇠기로 구성된다. Rayleigh 계수 α 는 0.0306이고 β 는 0.1016이다.

저차 10개의 고유치는 김만철과 이인원⁽¹⁰⁾에 의해 개발된 Lanczos 방법으로 계산되었고, 그 값은 표 4와 같다. 계산된 고유치 부분에 누락된 고유치가 존재할 수 있으므로 이에 대한 검사가 필요하다.

검사 과정에서 고려하는 고유치의 개수는 5개이다($p=5$). 폐곡선의 크기는 다음과 같다.

$$\rho = 1.005 \quad |\lambda_{10}| = 8.7914$$

초기 검색점을 선정하기 위하여 복소 평면의 상반면의 반지름 ρ 를 갖는 반원을 30등분하였다. 최대 고유치의 편각이 90.9°이기 때문에, 90°와 92°사이의 폐곡선을 2등분하는 세부 등분과정을 거쳤다. 또한, 96°와 180°사이에서 과도한 증가 또는 소폭 감소로 예상되는 편각의 변화가 있기 때문에, 정확한 편각의 변화 과정을 파악하기 위하여 이 부분에 대하여 추가 검색 과정을 수행하였다. 첫번째, 두번째 검색 과정에 대한 결과는 표 5에 나타내었다. 표 5에서 보는 바와 같이, 편각의 총 변화량이 1800°이고, 이에 따라 총 회전 회수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N = \frac{\sum \Delta \theta_i}{2\pi} = \frac{1800^\circ}{360^\circ} = 5$$

표 4 Lanczos 방법에 의한 저차 10개의 고유치

Mode number	Eigenvalues	
	Real	Imaginary
1	-0.0304	+3.0301
2	-0.0304	-3.0301
3	-0.0309	+3.0901
4	-0.0309	-3.0901
5	-0.0374	+3.6581
6	-0.0374	-3.6581
7	-0.1427	+8.6586
8	-0.1427	-8.6586
9	-0.1404	+8.7465
10	-0.1404	-8.7465

표 5 편작 및 편각의 변화량

First checking process				Second checking process				$\sum \Delta \theta_j$
z_j	θ_j	$\Delta \theta_j$	Y/N	z_j	θ_j	$\Delta \theta_j$	Y/N	
origin	0.00	-	-					0.00
$\rho \angle 6^\circ$	269.6	269.6	N					269.6
$\rho \angle 12^\circ$	176.2	266.6	N					536.2
$\rho \angle 18^\circ$	76.7	260.5	N					796.7
$\rho \angle 24^\circ$	328.1	251.4	N					1048.1
$\rho \angle 30^\circ$	207.5	239.4	N					1287.5
$\rho \angle 36^\circ$	72.1	224.6	N					1512.1
$\rho \angle 42^\circ$	279.2	207.1	N					1719.2
$\rho \angle 48^\circ$	106.1	196.9	N					1906.1
$\rho \angle 54^\circ$	270.3	104.2	N					2070.3
$\rho \angle 60^\circ$	49.5	139.2	N					2209.5
$\rho \angle 66^\circ$	161.5	112.0	N					2321.5
$\rho \angle 72^\circ$	244.6	83.1	N					2404.6
$\rho \angle 78^\circ$	297.9	53.3	N					2457.9
$\rho \angle 84^\circ$	323.2	25.3	N					2483.2
$\rho \angle 90^\circ$	355.7	32.5	N					2515.7
$\rho \angle 91^\circ$	43.0	47.3	N					2563.0
$\rho \angle 92^\circ$	83.8	40.8	N					2603.8
$\rho \angle 96^\circ$	96.2	12.4	N					2616.2
				$\rho \angle 99^\circ$	82.5	-13.7	N	2602.5
$\rho \angle 102^\circ$	64.6	328.4 or -31.6	Y	$\rho \angle 102^\circ$	64.6	-17.9	N	2584.6
				$\rho \angle 105^\circ$	44.4	-20.2	N	2564.4
$\rho \angle 108^\circ$	22.6	318.0 or -42.0	Y	$\rho \angle 108^\circ$	22.6	-21.8	N	2542.6
				$\rho \angle 111^\circ$	359.6	-23.0	N	2519.6
$\rho \angle 114^\circ$	335.7	313.1 or -46.9	Y	$\rho \angle 114^\circ$	335.7	-23.9	N	2495.7
				$\rho \angle 117^\circ$	310.8	-24.9	N	2470.8
$\rho \angle 120^\circ$	285.2	309.5 or -50.5	Y	$\rho \angle 120^\circ$	285.2	-25.6	N	2445.2
				$\rho \angle 123^\circ$	258.8	-26.4	N	2418.8
$\rho \angle 126^\circ$	231.6	306.4 or -53.6	Y	$\rho \angle 126^\circ$	231.6	-27.2	N	2391.6
				$\rho \angle 129^\circ$	203.6	-28.0	N	2363.6
$\rho \angle 132^\circ$	174.9	303.3 or -56.7	Y	$\rho \angle 132^\circ$	174.9	-28.7	N	2334.9
				$\rho \angle 135^\circ$	145.4	-29.5	N	2305.4
$\rho \angle 138^\circ$	115.2	300.3 or -59.7	Y	$\rho \angle 138^\circ$	115.2	-30.2	N	2275.2
				$\rho \angle 141^\circ$	84.4	-30.8	N	2244.4
$\rho \angle 144^\circ$	52.9	297.7 or -62.3	Y	$\rho \angle 144^\circ$	52.9	-31.5	N	2212.9
				$\rho \angle 147^\circ$	20.7	-32.2	N	2180.7
$\rho \angle 150^\circ$	348.0	295.1 or -64.9	Y	$\rho \angle 150^\circ$	348.0	-32.7	N	2148.0
				$\rho \angle 153^\circ$	314.8	-33.2	N	2114.8
$\rho \angle 156^\circ$	281.1	293.1 or -66.9	Y	$\rho \angle 156^\circ$	281.1	-33.7	N	2081.1
				$\rho \angle 159^\circ$	246.9	-34.2	N	2046.9
$\rho \angle 162^\circ$	212.4	291.3 or -68.7	Y	$\rho \angle 162^\circ$	212.4	-34.5	N	2012.4
				$\rho \angle 165^\circ$	177.5	-34.9	N	1977.5
$\rho \angle 168^\circ$	142.3	289.9 or -70.1	Y	$\rho \angle 168^\circ$	142.3	-35.2	N	1942.3
				$\rho \angle 171^\circ$	107.0	-35.3	N	1907.0
$\rho \angle 174^\circ$	71.4	289.1 or -70.9	Y	$\rho \angle 174^\circ$	71.4	-35.6	N	1871.4
				$\rho \angle 177^\circ$	35.7	-35.7	N	1835.7
$\rho \angle 180^\circ$	0.0	288.6 or -71.4	Y	$\rho \angle 180^\circ$	0.0	-35.7	N	1800.0

where $0^\circ \leq \theta_j < 360^\circ$, $\Delta \theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, and 'Y' means that the additional checking points are required and 'N' means that the additional ones are not required.

마지막으로, 회전 회수와 고려한 고유치의 개수를 비교하여 누락된 고유치의 존재 여부를 검사한다. 회전회수와 고려한 고유치의 개수가 모두 5이기 때문에 단순폐곡선 내에는 누락된 고유치가 존재하지 않는다. 이상의 결과를 통해서, 제안방법은 비비례 감쇠행렬을 갖는 대형 구조물에 실제적으로 적용 가능함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 편각의 원리를 이용하여 감쇠를 고려한 고유치 문제의 누락된 고유치를 검사하는 기법을 제안하였다. 제안방법을 대형 고유치문제에 적용하기 위해서 반복적인 접근법이 도입되었다. 수치예제의 해석을 통해서, 제안방법이 정확하게 누락된 고유치를 검사하고 대형 고유치문제에 적용 가능함을 증명하였다. 제안방법은 감쇠를 고려한 고유치문제의 누락된 고유치의 존재 여부를 검사하기 위해 개발된 최초의 방법이다.

Sturm 수열 성질을 이용한 누락된 고유치 검사 기법은 하나의 검색점에서 한 번의 행렬 분해 과정만을 필요로 하는 반면에, 제안방법은 다수의 검색점에서 많은 행렬분해를 수행해야만 한다. 이것은 Sturm 수열 성질을 이용한 기법은 실수 영역에서 사용되지만 제안방법은 복소수 영역에서 사용되기 때문에 발생하는 문제점이다. 따라서, 제안방법은 상대적으로 많은 연산회수를 필요로 한다. 따라서, 제안방법을 실제 문제에 보다 효율적으로 적용하기 위해서는 연산회수를 감소시키는 방법에 대한 후속연구가 수행되어야 한다.

감사의 글

본 연구에 한국과학재단과 현대건설(주)가 도움을 주셨습니다. 한국과학재단과 현대건설(주)의 지원에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Inc., 1996.
2. Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
3. Petyt, M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, 1990.
4. Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method; Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1987.
5. Newland, D. E., *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical, 1989.
6. Cronin, D. L., "Eigenvalue and eigenvector determination for nonclassically damped dynamic systems," *Computers and Structures*, Vol. 36, 1990, pp. 133-38.
7. Rajakumar, C., "Lanczos algorithm for the quadratic eigenvalue problem in engineering applications," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 105, 1993, pp. 1-22.
8. Leung, A. Y. T., "Subspace iteration method for complex symmetric eigenproblems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 184, 1995, pp. 627-637.
9. Lee, I. W., Kim, M. C., and Robinson, A. R., "Efficient solution method of eigenproblems for damped structural systems using the modified newton-raphson technique," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, 1998, pp. 576-580.
10. Kim, M. C. and Lee, I. W., "Solution eigenproblems for non-proportional damping system by lanczos method," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 28, 1999, pp. 157-172.

11. Tsai, J. S. H. and Chen, S. S., "Root distribution of a polynomial in subregions of the complex plane," *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 38, 1993, pp. 173-178.
12. Carrier, G. F., Krook, M., and Pearson, C. E., *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique*, McGraw-Hill Book Company, 1966.
13. Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1*, John Wiley & Sons, Inc., 1974.
14. Korn, G. A. and Korn, T. M., *Mathematical Handbook, 2nd ed.*, McGraw-Hill Book Company, 1968.
15. Spiegel, M. R., *Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and Its Application*, McGraw-Hill Book Company, 1964.
16. Franklin, G. F., Powell, J. G., and Emami-Naeini, A., *Feedback Control of Dynamic Systems, 3rd ed.*, Addison-Weseley Publishing Company, Inc., 1994.
17. Pearson, C. E., *Handbook of Applied Mathematics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1974.
18. Chen, H. C. and Taylor, R. L., "Solution of eigenproblems for damped structural systems by Lanczos algorithm," *Computers and Structures*, Vol. 30, 1988, pp. 151-161.