

# 유연한 보 구조물 위를 이동하는 구속 기계계의 동역학 해석 (II) : 응용

박찬종\*, 박태원\*\*

## Dynamic Analysis of Constrained Mechanical System Moving on a Flexible Beam Structure (II) : Application

Chan Jong Park\*, Tae Won Park\*\*

### ABSTRACT

Recently, it becomes a very important issue to consider the mechanical systems such as high-speed vehicle and railway train moving on a flexible beam structure. Using general approach proposed in the first part of this paper, it is possible to predict planar motion of constrained mechanical system and elastic structure with various kinds of foundation supporting condition. Combined differential-algebraic equations of motion derived from both multibody dynamics theory and Finite Element Method can be analyzed numerically using generalized coordinate partitioning algorithm. To verify the validity of this approach, results from simply supported elastic beam subjected to a moving load are compared with exact solution from a reference. Finally, parameter study is conducted for a moving vehicle model on a simply supported 3-span bridge.

**Key Words** : Flexible beam structure (유연보 구조물), Combined differential-algebraic equation (조합 미분-대수방정식), Multibody dynamics (다물체 동역학), Finite element method (유한요소법), Bernoulli-Euler beam (베르누이-오일러보), 3-span bridge (3 경간 교량)

### 1. 조합운동방정식

일반적으로 길이에 비해서 단면이 상대적으로 작은 세장형 보(slender beam)는 전단변형 및 회전관성을 무시한 베르누이-오일러보(Bernoulli-Euler beam)로 가정한다. 탄성보의 수평거동과 수직거동이 서로 연성되지 않고 Fig. 1 에서와 같이 축방향에 따라서 단면이 불규칙하게 변하는 선형 불균일 베르누이-오일러보를 고려해 보자. 구속 다물체계가 다양한 지지조건을 갖는 탄성보 위에서 헤르쯔

접촉을 하면서 임의의 구동속도에 따라서 이동할 경우 이동 다물체계와 탄성 지지계에 대하여 각각 아래와 같은 운동방정식을 유도할 수 있다. 여기서 탄성보에 대하여 다양한 지반 지지조건을 고려하기 위하여 연속적인 수직 및 수평 탄성지지효과는 강성 및 감쇠행렬 향으로 시스템 운동방정식에 적용할 수 있다. 또한 불연속적인 수평, 수직 그리고 절점 회전 탄성지지효과는 운동방정식의 우변 항인 힘 벡터에서 고려하였다. 그 외에도 이동계와 탄성 구조물과의 비선형 탄성 헤르쯔 접촉현상

\* 아주대 기계공학과 대학원

\*\* 아주대 기계 및 산업공학부

을 고려할 수 있다<sup>[1]</sup>.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + [C]^* \{\dot{v}_a\} + [K]^* \{v_a\} = \{P(q, \dot{q}, v_a, \dot{v}_a, t)\}^* \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} N & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g(q, \dot{q}, v_a, \dot{v}_a, t) \\ \gamma(q, \dot{q}, t) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\{\Phi(q, t)\} = \{0\} \quad (3)$$

여기서,  $[C]^* = [C_{VC}] + [C_{LC}]$

$$[K]^* = [K_{aa}] + [K_{VC}] + [K_{LC}]$$

$$\{P\}^* = \{P_a\} + \{F_{VD}\} + \{F_{LD}\} + \{F_{NR}\}$$

$[M_{aa}]$ 와  $\{v_a\}$ 는 기구학적인 구속조건을 고려한 탄성보의 질량행렬과 절점자유도 벡터를 나타낸다.  $[N]$ 은 이동계의 대각질량행렬(diagonal mass matrix),  $[\Phi_q]$ 은 이동계의 비선형 구속조건식을 독립자유도 벡터  $\{q\}$ 로 편미분한 자코비안행렬(Jacobian matrix),  $\{\lambda\}$ 는 구속식에 의한 반력을 나타내는 라그랑지승수(Lagrange multiplier) 벡터를 그리고  $\{\gamma\}$ 는 가속도식의 우변항을 나타낸다.  $[K_{VC}]$ 와  $[C_{VC}]$ 는 연속적인 수직 탄성지지효과에 의한 강성과 감쇠행렬이고  $[K_{LC}]$ 와  $[C_{LC}]$ 는 연속적인 수평 탄성지지효과에 의한 강성 및 감쇠행렬이다. 그리고  $\{F_{VD}\}$ 와  $\{F_{LD}\}$ 는 불연속적인 수직 및 수평 탄성지지효과에 의한 힘 벡터이고  $\{F_{NR}\}$ 은 불연속적인 절점회전 탄성지지효과에 의한 힘 벡터이다.

구속 다물체계의 미분-대수방정식의 일반 힘 벡터  $\{g\}$ 와 지지계의 상미분방정식에서의 절점 힘 벡터  $\{P\}^*$ 는 두 계의 상태변수 및 시간변수에 의해서 결정되어 진다. 따라서 전체계의 운동방정식은 아래의 식(4)와 같이 조합된 행렬형태의 운동방정식으로 나타낼 수 있으며 동시에 해석이 이루어져야 한다.

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & N & \Phi_q^T \\ 0 & \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_a \\ \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ g \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $\{Q\} = \{P\}^* - [C]^* \{\dot{v}_a\} - [K]^* \{v_a\}$ 이다. 식(4)에서 시간에 대하여 적분된 강체의 일반좌표는 식(3)의 비선형 구속식을 동시에 만족해야 한다.

지금까지 이와 같은 미분-대수방정식을 해석하

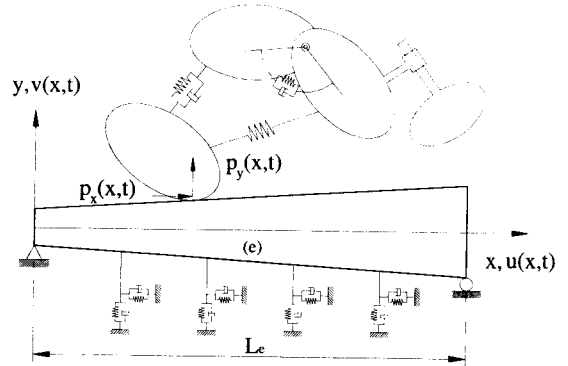


Fig. 1 Constrained multibody system moving on a flexible beam structure

기 위해서는 잘 알려진 상미분방정식 해법을 응용한 몇 가지 방법들이 제안되었다. 우선 미분방정식과 구속방정식의 모든 일반좌표에 대하여 역차분공식(Backward Difference Formula)을 적용하고 비선형 방정식 해법으로 해석하는 방법이 있으나 이는 강성계에 적합한 해법이고 방정식의 크기에 따라 계산 시간이 크게 증가하는 특성이 있다<sup>[2]</sup>. 그리고 일반좌표분리법(generalized coordinate partitioning method)은 일반좌표 중 독립좌표와 종속좌표를 분리한 후 독립좌표는 상미분 해법으로 적분하고 종속좌표는 구속식과 구속 속도방정식을 이용하여 구함으로써 적분 오차를 줄이는 방법이다<sup>[3]</sup>. 또한 구속안정화법(constraint violation stabilization method)은 적분 오차를 줄이기 위해서 제한제어(feedback control) 이론을 적용하여 구속식과 구속 속도식을 운동방정식의 우변항에 첨가하여 적분하는 방법으로 계인값의 크기에 따라서 해의 정확성이 결정된다<sup>[4]</sup>. 따라서 계인값을 결정하는 것이 매우 중요한 과정이나 최적의 계인값은 계의 종류에 따라서 변한다. 또한 이 방법은 위치 및 속도해석을 수행하지 않기 때문에 계산속도는 빠르지만 시스템이 기구학적인 특이점(kinematically singular configuration) 부근에 위치 하거나 혹은 갑작스런 외란이 가해질 경우에 적분된 해의 정확성을 보장할 수 없게 된다.

본 논문에서는 매 적분 단계마다 해의 수렴성을 기준으로 하여 변수를 분리함으로써 정확하고 안정된 해를 구하는 것으로 알려진 일반좌표분리법을 적용하였고 분리된 독립변수는 암시적다단계(implicit multi-step) 알고리즘인 예측자-수정자

(Predictor-Corrector) 적분법을 사용하였다<sup>5)</sup>. 이 방법을 적용하여 식(4)의 운동방정식을 해석하기 위해서는 다음의 6 단계를 거쳐야만 한다. 그리고 Fig. 2 에서는 이와 같은 6 단계의 해석과정을 알기 쉽도록 도표로 나타내었다.

- [1 단계] 이동계 및 탄성지지계의 초기조건을 결정한다.
- [2 단계] 이동계의 일반좌표를 독립변수와 종속변수로 분리한다. 변수를 분리하기 위해서는 구속식의 자코비안 행렬에 L-U 분리법(L-U decomposition)을 적용한다. 그 외에도 QR 분리법(QR decomposition), 특이값 분리법(singular-value decomposition) 혹은 Gram-Schmidt 과정이 적용되기도 한다.
- [3 단계] 1 단계의 초기조건 값을 바탕으로 식(4)의 선형방정식을 푼다.
- [4 단계] Predictor-Corrector 알고리즘을 사용하여 전체계의 독립변수에 대한 시간적분을 수행한다. 특히 Corrector 과정에서 해의 수렴성을 기준으로 이동계의 변수를 재분리한다.
- [5 단계] 비선형 방정식인 구속식과 선형 방정식인 구속 속도식을 해석하여 이동계의 종속좌표에 대한 위치 및 속도값을 계산한다. 이때 구속식을 해석하기 위하여 적용되는 Newton-Raphson 법의 수렴성을 확인하여 이동계의 변수를 재분리 한다.
- [6 단계] 4, 5 단계에서 계산한 전체계의 위치 및 속도값을 초기조건으로 하여  $t_{END}$  까지 3, 4, 5 단계의 과정을 반복적으로 계산한다.

## 2. 단순지지보 위를 이동하는 집중질량모델

본 논문에서 제안한 해석방법의 신뢰성을 검증하기 위하여 과거에 수행되었던 단순모델에 대한 결과를 비교하였다. Timoshenko 외 연구원들<sup>6)</sup>은 Fig. 3 과 같이 단순지지보 위를 연속적인 접촉을 하며 등속으로 이동하는 일정하중모델의 수직거동을 모드합성법을 적용하여 해석적으로 예측하였다. 예제에 적용한 균일 탄성보의 굽힘 진동모드 수는 총 20 개이며 계의 내부에는 어떠한 종류의 감쇠 효과도 고려하지 않았다. 적용모델과 관련된 물성치와 해석 조건은 Table 1 과 같다.

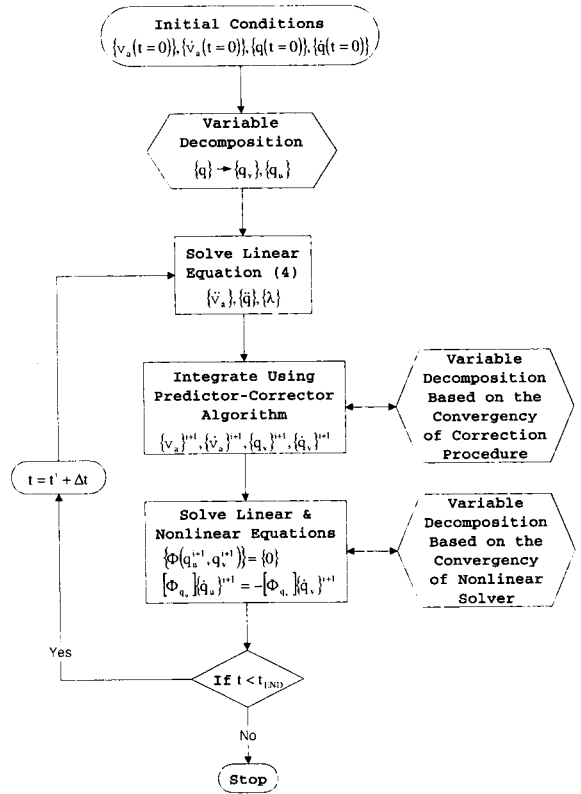


Fig. 2 Numerical analysis procedure

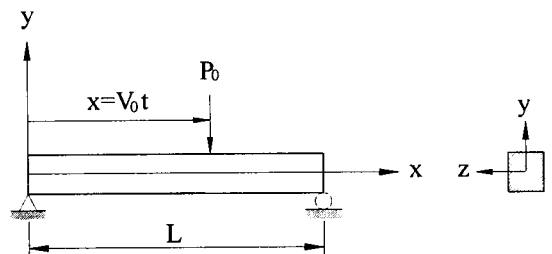


Fig. 3 Simply supported beam subjected to a moving concentrated load

탄성보의 동적인 해석 결과를 비교하기 위하여 단순지지보의 동적확대계수(Dynamic Amplification Factor)와 충격계수(Impact Factor)를 다음과 같이 정의한다<sup>6)</sup>.

$$D.A.F. = \frac{\text{dynamic deflection at the beam center}}{\text{maximum static deflection at the beam center}} \quad (5)$$

$$I.F. = \frac{\text{maximum dynamic deflection at the beam center}}{\text{maximum static deflection at the beam center}} \quad (6)$$

Table 1 Material properties and other conditions of the moving load model

Symbol	Description	Value
$EI$	flexural rigidity ( $N \cdot m^2$ )	$4.03 \times 10^6$
$M_B$	mass of elastic beam ( $kg/m$ )	50.47
$A$	cross section area ( $m^2$ )	$6.4 \times 10^{-3}$
$L$	span length (m)	$6.25 \times 10^{-1}$
$V_0$	moving speed (km/h)	37
$P_0$	moving load (kgf)	349

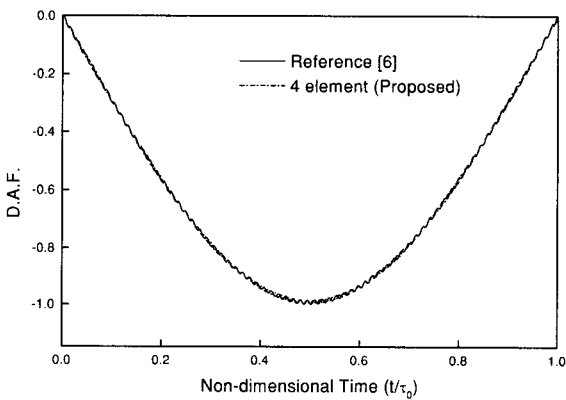


Fig. 4 Dynamic Amplification Factor of the moving load model

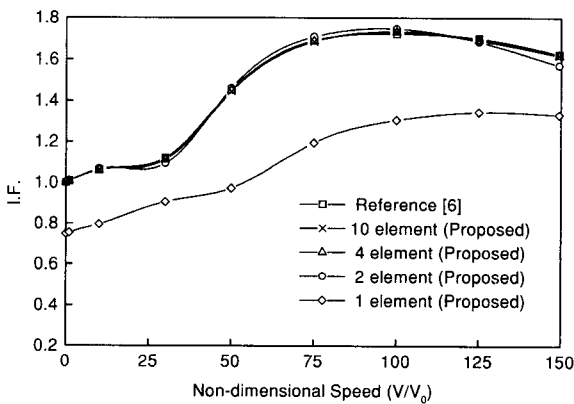


Fig. 5 Velocity effect of the Impact Factor according to element increment

Fig. 4 는 4 개의 요소소를 사용했을 때의 동적 확대계수를 참고문헌 [6]의 결과와 비교한 그래프

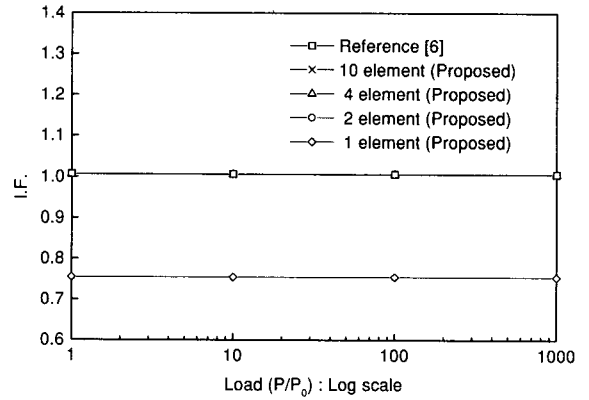


Fig. 6 Load effect of the Impact Factor according to element increment

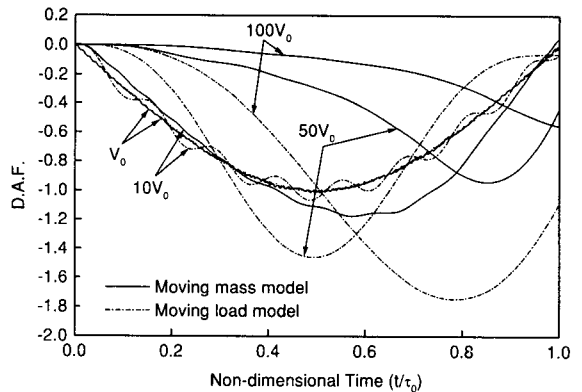


Fig. 7 Dynamic Amplification Factor according to moving model

이다. 이 결과에 따르면 무차원화된 시간영역에 대해서 근접한 결과를 얻을 수 있었다. 여기서  $\tau_0$  는 이동하중이 좌측 끝에서 출발하여 탄성보를 완전히 지나가는데 걸리는 시간을 나타낸다.

일반적으로 탄성보의 수직거동은 이동속도와 이동하중의 크기에 의해서 큰 영향을 받는다. 이동속도에 의한 영향을 확인하기 위해서 349kgf의 일정한 이동하중이 이동속도의 변화에 따른 탄성보의 충격계수 변화를 Fig. 5에 나타내었다.

탄성보의 충격계수는 하중의 이동속도가 증가함에 따라서 비선형적으로 증가하며 임의의 속도를 넘어서면 다시 감소하는 특성을 보이고 있다. 이때의 속도를 임계속도(critical speed)라고 정의하

며 경간의 길이와 1차 굽힘진동수에 따라서 결정된다<sup>6)</sup>. 그리고 탄성보를 모델링하기 위하여 사용한 유한 보요소의 개수에 따라서 정밀해와 차이를 보인다. 사용된 보요소의 개수가 증가할수록 정밀해에 근접한 결과를 얻을 수 있으나 해석상 효율성과 해석결과의 정확성을 감안하여 결정해야 한다. Fig. 6에서는 37km/h의 일정속도로 이동하는 집중하중의 크기 변화에 따른 충격계수의 거동을 나타내고 있다. 선형 베르누이-오일러보의 가정에서도 예측할 수 있듯이 이동하중의 크기에 따라서 일정한 충격계수를 갖는다. 그리고 다양한 이동속도와 이동하중 영역에서 4개 이상의 유한 보요소를 사용하면 충분히 정밀해를 근사할 수 있음을 알 수 있다.

지금까지는 일정하중이 탄성보 위를 연속적으로 접촉하면서 이동할 경우에 한해서 해석을 수행하였다. 그러나 교량 위를 고속으로 이동하는 차량이나 레일 위를 이동하는 궤도차량과 같은 시스템의 해석을 수행하기 위해서는 이동 스프링질량의 불연속적인 접촉모델을 적용해야만 한다. Fig. 7에서는 Table 2에서와 같은 접촉물성치를 갖는 이동질량모델을 앞에서 고려한 이동하중모델과 속도 변화에 따라서 동적확대계수 값을 비교하였다. 저속 이동구간에서는 두 모델이 유사한 거동을 하고 있으나 속도가 증가할수록 차이가 커지고 있다. 특히 탄성보 뿐만 아니라 그 위를 이동하는 계의 동적 거동에도 큰 차이를 보이고 있다. 저속 이동구간에 접근할수록 두 모델이 공통적으로 정적변형거동과 유사한 결과를 얻음을 확인할 수 있다.

따라서 고속철도와 같이 탄성 구조물 위를 고속으로 이동하는 기계계의 해석에 있어서 과거에 적용되어오던 이동하중모델과 같은 근사모델은 부적절함을 알 수 있다.

### 3.3 경간 교량 위를 이동하는 차량모델

Fig. 8과 같이 다물체로 구성된 차량이 균일한 3경간 교량 위를 등속 혹은 감속이동을 할 때의 동적인 거동과 이때 차량의 설계계수와 교량의 지지조건 변화에 따른 계의 동적인 거동을 확인하였다. 1개의 스프링질량과 2개의 언스프링질량으로 구성된 차량은 병진스프링과 감쇠장치로 연결되어 있어서 수직방향으로 힘을 전달하도록 구성되어 있다. 그리고 2개의 링크가 회전조인트로 스프링질량과 언스프링질량을 연결하여 수평방향의 운동을 구속하고 있다. 두개의 언스프링질량은 이동중 탄성지지보와 불연속적인 헤르쯔접촉 현상을 일으

키며 두 계에 가진력을 발생시킨다. 1경간마다 4개의 유한 보요소를 사용한 3경간 교량의 양쪽 끝절점 A와 D는 회전운동만 가능하도록 구속되어 있으며 나머지 2개의 지지점 B와 C에서는 수직변위만 구속하였다. 탄성보와의 헤르쯔접촉과 관련된 물성치는 Table 1, Table 2와 같으며 그 외의 관련자료는 Table 3에 정리하였다.

Table 2 Contact properties of the moving mass model

Symbol	Description	Value
E	Young's modulus of the moving mass (GPa)	206.0
	Young's modulus of the beam (GPa)	205.6
ν	Poisson ratio of the moving mass	0.29
	Poisson ratio of the beam	0.30

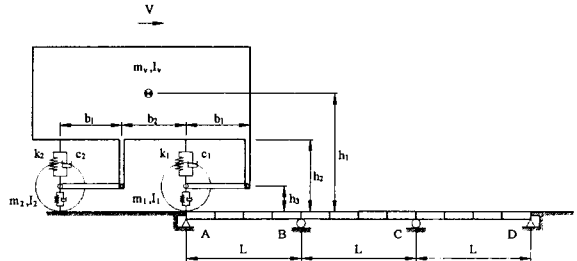


Fig. 8 Vehicle moving on a 3-span bridge

Table 3 Vehicle data

Symbol	Value
$m_v$ (kg)	500
$I_v$ (kg.m <sup>2</sup> )	70
$m_1, m_2$ (kg)	350
$I_1, I_2$ (kg.m <sup>2</sup> )	10
$k_1, k_2$ (N/m)	$2.0 \times 10^6$
$c_1, c_2$ (NZs/m)	$2.0 \times 10^6$
L (m)	8
$h_1$ (m)	0.22
$h_2$ (m)	0.2
$h_3$ (m)	0.1
$b_1$ (m)	0.15
$b_2$ (m)	0.45
$b_3$ (m)	0.3

### 3.1 등속이동 해석

차량이 50km/h 의 속도로 3 경간 교량 위를 이동할 경우 차량의 평면운동과 탄성보의 수직거동에 대해서 해석을 수행하였다. Fig. 9 는 보의 중심에서의 수직방향 변형량을 두 이동모델에 대해서 비교한 결과이다. 차량모델은 이동하중모델에 비교하여 교량을 통과 중 이거나 통과 후에도 상대적으로 큰 변형거동을 보이고 있다.

이동차량의 전방과 후방 언스프링질량 사이의 수평거리인 룬거(wheelbase)변화에 따른 계의 동적인 거동은 Fig. 10 과 같다. 룬거가 길어질수록 차량이 교량을 통과할 때에는 교량의 작은 수직변형을 발생시키고 교량을 통과한 후에는 큰 잔류 변형을 발생시킨다. 이러한 교량의 거동특성은 그 위를 이동하는 차량에 그대로 전달되어 영향을 미친다. 따라서 룬거가 짧아질수록 차량의 수직운동 및 피치운동은 커지게 된다.

3 경간 교량 사이에 연속적인 탄성지반 지지조건이 작용할 경우의 영향을 살펴보면 Fig. 11 과 같다. 여기에서 적용된 연속지반의 단위길이 당 강성값  $K_c=10kN/m^2$  이고 감쇠계수  $C_c=5kNZs/m^2$  이다. 이와 같은 연속적인 탄성지반 지지효과는 강성행렬과 감쇠행렬을 구성하여 전체시스템 운동방정식에서 고려할 수 있다. 연속적인 강성과 감쇠특성으로 대표할 수 있는 연속 탄성지반의 지지효과는 탄성보 및 그 위를 이동하는 차량의 수직거동을 감소시키는 역할을 하고있음을 확인할 수 있다.

Fig. 12 에서는 단일 경간 당 3 개의 이산 탄성지반 지지조건이 작용할 경우에 전체계에서 발생하는 동적인 거동을 나타내고 있다. 이러한 이산 지지현상은 시스템 운동방정식의 우변항인 일반 힘벡터 항에서 고려할 수 있으며, 연속 탄성지반에서와 마찬가지로 탄성 구조물 뿐만 아니라 이동 차량의 수직방향운동을 감소시키는 역할을 하고있음을 확인할 수 있다.

### 3.2 감속이동 해석

탄성 지지계와 그 위를 이동하는 다물체계의 수직 및 수평방향의 운동을 해석하기 위해서 초기에 50km/h 의 속력으로 이동하던 차량이 교량을 통과하면서 전방 스프링질량에 완전잠김제동(full-lock braking) 조건을 작용시켰다. 이로 인해서 이동차량이 완전히 정지할 때까지의 동적인 거동을 해석하였으며 교량의 탄성 변형을 무시한 경우의

해석결과와 비교해보았다. 여기서 차량의 언스프링질량과 교량 사이에서 발생하는 공칭마찰계수  $\mu_0=0.85$  로 가정하였다.

완전잠김제동을 받는 차량은 약 3.4 초에서 3 번째 경간상에서 완전히 정지하며 감쇠특성을 고려하지 않은 교량의 여진현상으로 인하여 잔류진동을 계속하고 있음을 Fig. 13(a), (b)에서 확인할 수 있다. 따라서 이러한 교량의 탄성변형효과로 인해서 그 위를 이동하는 차량의 수직 및 수평방향 동적거동 역시 강체교량모델과 큰 차이를 보이고 있음을 Fig. 13(c), (d)에서 알 수 있다.

교량은 수직강성에 비해서 수평강성이 크기 때문에 차량의 언스프링질량과 마찰 제동력에 의해서 고주파 수평운동을 발생시킨다. 그리고 차량에서 발생하는 수평방향 가속도 역시 고주파의 동특성을 보이며 강체교량모델의 해석결과와 차이를 보이고 있다.

## 4. 결론

본 논문에서는 탄성 구조물 위를 충돌물체의 접촉조건에 따라서 연속 혹은 불연속적으로 접촉하며 이동하는 구속 기계계의 동력학해석을 수행하기 위하여 제안된 조합운동방정식(combined equation of motion)을 효율적으로 해석할 수 있는 수치해석적인 절차에 대하여 고려하였다.

제안된 해석 방법의 타당성을 검증하기 위하여 단순지지보 위를 연속적으로 접촉하며 이동하는 단일 하중모델에 대한 정밀해와 결과를 비교하

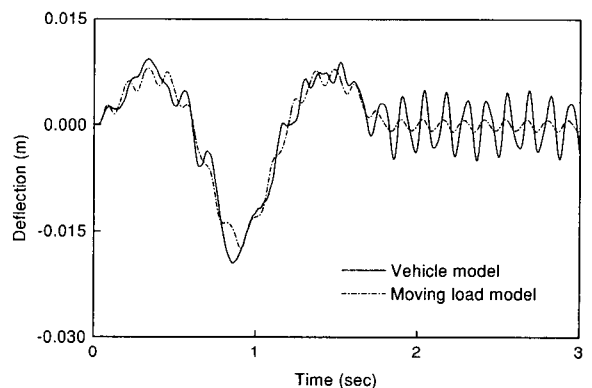
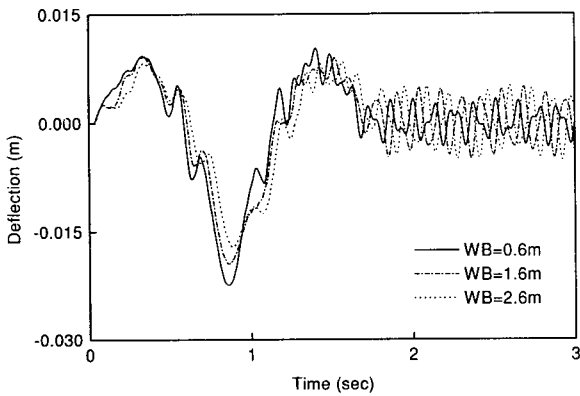


Fig. 9 Vertical mid-span deflection of the second beam

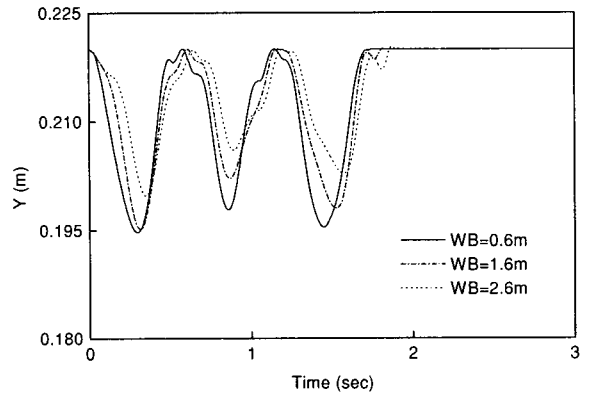
였다. 또한 이동속도, 이동하중의 변화 및 사용된 유한 보요소의 개수에 따른 충격계수의 거동을 확인하였다. 해석 결과 단일경간 당 4 개의 유한 보요소를 사용하면 정밀해와 충분히 근사한 동적 응답을 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다. 그리고 저속 이동구간에서는 이동하중모델과 이동질량모델이 유사한 거동을 하나 고속일수록 결과의 차이는 증가했다.

는 증가했다.

끝으로 다물체로 구성된 이동차량이 3 경간 교량 위를 마찰접촉현상을 일으키면서 등속운동과 완전잠김제동에 의한 감속운동을 할 경우에 차량 설계변수 및 지반의 각종 교량 지지조건에 대하여 동특성을 확인하였다.

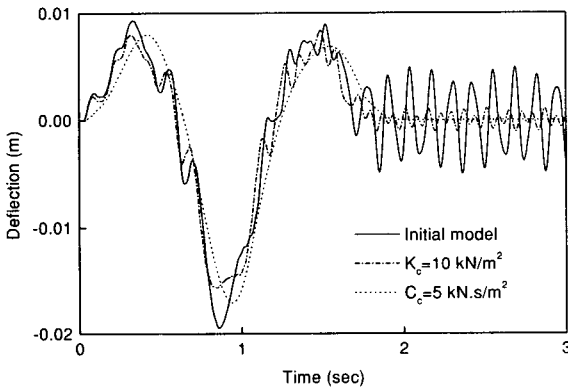


(a) Vertical mid-span deflection of the second beam

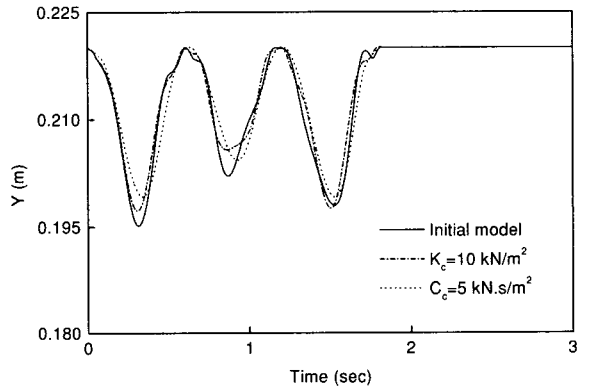


(b) Bounce motion of the vehicle

Fig. 10 Effects of the wheelbase change



(a) Vertical mid-span deflection of the second beam



(b) Bounce motion of the vehicle

Fig. 11 Effects of continuous foundation support

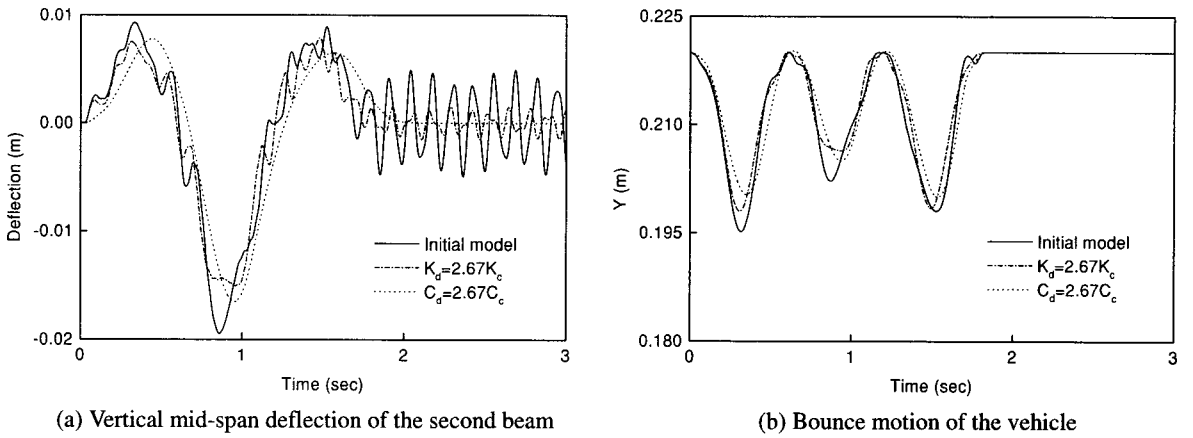


Fig. 12 Effects of discrete foundation support

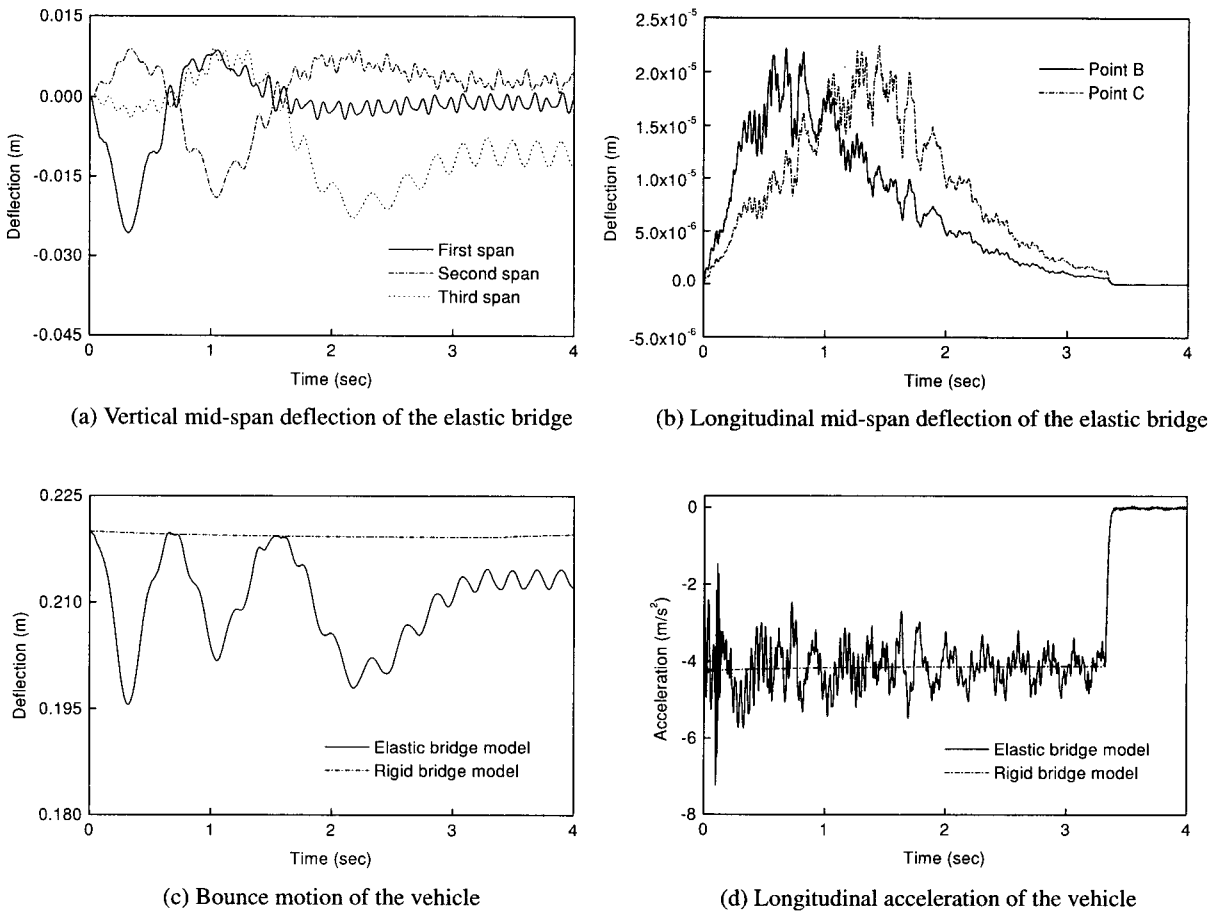


Fig. 13 Results of the vehicle model under full-lock braking condition



### 참고문헌

1. 박찬중, 박태원, “유연한 보 구조물 위를 이동하는 구속 기계계의 동력학 해석(I) : 일반적인 접근법,” 한국정밀공학회지, 제 17 권, 제 11 호, pp. 165-175, 2000.
2. Gear, C.W., Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, 1971.
3. Wehage, R.A. and Haug, E.J., “Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamics Systems,” Trans. ASME, J. of Mechanical Design, Vol. 104, pp. 247-256, 1982.
4. Baumgarte, J., “Stabilization of Constraints and Integrals of Motion,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 1, pp. 1-6, 1972.
5. Shampine, L.F. and Gordon, M.K., Computer Solutions of Ordinary Differential Equations : The Initial Value Problem, W. H. Freeman and Company, 1975.
6. Timoshenko, S., Young, D.H. and Weaver, W., Vibration Problems in Engineering, 4th edition, John Wiley & Sons, Inc., 1974.