

# 유연한 보 구조물 위를 이동하는 구속 기계계의 동력학 해석 (I) : 일반적인 접근법

박찬종\* , 박태원\*\*

## Dynamic Analysis of Constrained Mechanical System Moving on a Flexible Beam Structure (I) : General Approach

Chan Jong Park\*, Tae Won Park\*\*

### ABSTRACT

In recent years, it becomes a very important issue to consider the mechanical systems such as high-speed vehicles and railway trains moving on elastic beam structures. In this paper, a general approach, which can predict the dynamic behavior of constrained mechanical system and elastic beam structure, is proposed. Also, various supporting conditions of a foundation support are considered for the elastic beam structures. The elastic structure is assumed to be a non-uniform and linear Bernoulli-Euler beam with proportional damping effect. Combined Differential-Algebraic Equations of motion are derived using multibody dynamics theory and Finite Element Method. The proposed equations of motion can be solved numerically using generalized coordinate partitioning method and Predictor-Corrector algorithm, which is an implicit multi-step integration method.

**Key Words** : Elastic beam structure (탄성보 구조물), Constrained mechanical system (구속 기계계), Multibody dynamics (다물체 동력학), Finite element method (유한요소법), Bernoulli-Euler beam (베르누이-오일러보), Combined differential-algebraic equation (조합 미분-대수방정식)

### 1. 서론

구조물에 정적인 힘이 작용할 때 보다는 동적인 힘이 작용할 때 더 큰 충격이 가해진다는 것은 일반적으로 잘 알려진 사실이다. 이러한 문제는 산업화가 한창 진행되던 19세기 말에 교량설계문제에서 처음으로 대두되었으며 그 이후로 토목공학분야를 중심으로 오늘날까지 많은 연구가 진행되어오고 있다. 이동차량이 고속화, 경량화 됨에 따라서 유연한 교량 뿐만 아니라 차량의 동적 거

동에도 큰 영향을 미치기 때문에 최근에는 기계공학자들도 이 분야에 대해 깊은 관심을 갖고 주도적으로 연구를 진행하고 있다. 그 외에도 고속정밀 가공기계나 로켓 발사대, 천정크레인, 에스컬레이터 등과 같이 보 형태의 구조물 위를 이동하는 동하중이 계의 운동에 큰 영향을 미치는 시스템 설계에서도 중요한 연구분야 이다.

Timoshenko 등<sup>[1]</sup>은 이러한 문제를 단순지지보 위를 일정 속도로 이동하는 하중이 작용하는 계로 가정하고 여기에 모드합성법(mode synthesis method)

\* 아주대 기계공학과 대학원

\*\* 아주대 기계 및 산업공학부

을 적용하여 정밀해를 구함으로써 이 분야에서 선구적인 역할을 하였다. 그 이후로 수많은 연구자에 의해 베르누이-오일러보(Bernoulli-Euler beam)나 Timoshenko 보의 수학적 모델을 이용하여 정밀해를 구하려는 노력이 있었다. 보의 지지상태에 따른 경계조건을 만족하는 형상함수(shape function)의 결정 방법에 따라서 여러 가지 논문들이 발표되었다. Wang 과 Lin<sup>[2]</sup> 그리고 Wu 와 Dai<sup>[3]</sup>는 다중경간(multi-span)을 갖는 Timoshenko 보의 형상함수를 구하기 위해 변환행렬법(transfer-matrix method)을 사용하였고, Hong 과 Kim<sup>[4]</sup> 및 Henchi 등<sup>[5]</sup>은 동적강성법(dynamic stiffness method)을 그리고 Marchesello 등<sup>[6]</sup>은 Rayleigh-Ritz 방법을 적용하였다. 또한 Zheng 외 연구원들<sup>[7]</sup>은 다중경간을 갖는 베르누이-오일러보의 형상함수를 수정함수법(modified function method)을 써서 결정하였으나 보의 지지형태에 따라서 형상함수를 재설정해야 하는 문제점을 지적하기도 했다.

이렇게 유도된 운동방정식은 사용된 모드의 개수에 따라서 행렬식의 차수가 결정되어지며 수치 해석적으로 직접적분 알고리즘을 적용하여 근사해를 구하기도 했다<sup>[8,9]</sup>. 특히 이 방법은 주로 운동방정식 내부에 비선형 항이 포함되어 있어서 해석적으로 해를 계산하기 어려운 문제에 적용되었다. 해석적인 접근법의 또 다른 방법으로는 Wrinkler 지지 무한보의 무차원화된 운동방정식을 공간좌표와 시간좌표에 대하여 Fourier 변환 및 Laplace 변환을 통하여 임의의 공간과 시간좌표에 대한 정밀해를 계산하는 것이다<sup>[10]</sup>. 이상과 같이 해석적인 접근법은 정밀해를 얻을 수 있는 반면에 유연보의 경계조건이 바뀌거나 적용되는 문제에 따라서 복잡한 수학적인 절차를 거쳐야 하기 때문에 그 적용에 한계성이 있어왔다.

한편 컴퓨터의 성능 향상과 더불어 유한요소법에 의한 근사 해석기술의 발달로 보다 복잡하고 다양한 공학문제를 해결할 수 있게 되었다. Lin 과 Trethewey<sup>[11]</sup> 및 Thambiratnam 과 Zhuge<sup>[12]</sup>는 유한요소로 이루어진 단순지지보와 그 위를 두 점이 연속적으로 접촉하며 등속으로 이동하는 스프링질량계(sprung mass system)의 전체 운동방정식을 유도하고 이것을 직접적분함으로써 동적인 거동을 예측하였다. 또한 Lin 과 Trethewey<sup>[13]</sup> 그리고 Gutierrez 와 Laura<sup>[14]</sup>는 선형 베르누이-오일러보에 대한 거동을 해석하였고, Chang 과 Liu<sup>[15]</sup> 및 Yoshimura

외 연구원들<sup>[16]</sup>은 베르누이-오일러보의 기하학적인 비선형 효과를 함께 고려하였다.

이상과 같이 진행되어 오던 대부분의 연구에서는 이동계의 관성효과를 무시하였거나 고려한다 하더라도 단일 스프링질량으로 가정한 해석을 위주로 하였기 때문에 계의 정확한 거동예측은 불가능했다. 이와 같이 구조물 설계를 위주로 한 연구에 치우쳐왔던 과거와는 달리 고속화, 경량화에 따른 영향으로 구조물 뿐만 아니라 이동계의 거동 해석에도 큰 관심을 보였다. 그 결과 이동 차량계의 동적 거동을 해석하기 위하여 선형스프링으로 연결된 다자유도 이동계의 수직거동 해석에 대한 연구가 있었다<sup>[6,16]</sup>. 그러나 여기서는 차량의 거시적인 운동만을 예측할 수 있었을 뿐 이동 차량계의 설계에 필요한 구성 부품에 대한 설계정보는 얻을 수 없었다.

한편 다물체 동력학 해석기법을 이용하여 크고 복잡한 차량의 설계기술이 개발됨에 따라서 이것을 구조물과 연계하여 상호작용을 파악하려는 연구가 시도 되었다<sup>[17,18]</sup>. Maessen 외 연구원들<sup>[19]</sup>은 이동계가 저속으로 이동할 경우 차륜과 철로와의 접촉에 의해 발생하는 힘을 철로의 유한요소 정적 해석 결과에서 나온 변위-힘과의 관계를 이용하여 해석하였다. 이 방법은 철로의 관성에 의한 동적 거동을 무시할 정도로 차량이 저속으로 주행하는 문제에 대하여 적용되었다. 한편 Duffek 과 Kortum<sup>[20]</sup>은 단순지지된 보 위에 일정 하중이 등속으로 이동할 때의 정밀해를 바탕으로 다경간 철로의 연속적인 운동을 고려하기 위하여 추가적으로 보 사이를 강성이 큰 회전스프링으로 연결하였다. 이 때문에 정확한 해석을 수행하기 위해서는 회전스프링의 강성을 알맞게 결정해야 할 필요가 생겼다. 만일 강성이 작으면 차량이 경간 사이를 지날 때마다 불연속적인 운동이 발생하게 되고 상대적으로 값이 클 경우에는 수치해석상 강성문제로 인하여 해석하는데 어려움이 뒤따른다. 이렇듯 이들 연구에서는 공통적으로 차륜과 철로간의 주행마찰 및 가속, 감속에 의한 수평방향 운동은 무시한 채 지금까지 있어왔던 기타의 연구에서와 마찬가지로 수직방향 운동만을 고려하였으며 간단한 철로의 지지조건에 대하여 해석하였다.

본 논문에서는 다물체 동력학 해석이론과 유한요소법을 적용하여 부품들이 기구학적으로나 동력학적으로 구축된 이동차량이 탄성변형체인 구조

물 위를 임의의 구동속도에 따라서 접촉/충돌현상을 일으키면서 이동할 경우 구조물의 수평 및 수직방향의 운동에 미치는 상호작용을 해석할 수 있도록 하는 체계적인 해석방법을 제시하고자 한다. 그럼으로써 기존에는 고려할 수 없었던 탄성 구조물의 수직 및 수평거동이 계에 미치는 영향을 해석할 수 있으며 복잡한 실제 계와 유사하게 모델을 구성하여 해석함으로써 보다 정밀한 결과를 예측할 수 있다. 또한 이동차량을 지지하고 있는 구조물의 다양한 지반 지지조건 및 비선형 효과를 손쉽게 해석에 적용할 수 있다.

## 2. 탄성보의 동력학 해석

일반적으로 길이에 비해서 단면이 상대적으로 작은 세장형 보는 전단변형 및 회전관성을 무시한 베르누이-오일러보로 가정한다. 탄성보의 수평거동과 수직거동이 서로 연성되지 않고 Fig. 1 에서와 같이 축방향에 따라서 단면이 불규칙하게 변하는 선형 불균일 베르누이-오일러보를 고려해 보자. 수평 및 수직 자유도에 대한 보의 평형 조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1)$$

여기서 E는 보의 탄성계수, A(x)와 I(x)는 불균일 보의 단면적과 중심축에서의 면적 2 차 모멘트이다. 그리고 u(x,t)와 v(x,t)는 탄성보의 수평방향과 수직방향으로의 변형량을 나타낸다. 이러한 불균일 보의 변형량은 유한요소의 절점 자유도를 사용하여 아래의 식과 같이 근사화 할 수 있다.

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N_1} \phi_i(x) u_i(t), \quad v(x,t) = \sum_{j=1}^{N_2} \psi_j(x) v_j(t) \quad (2)$$

여기서  $\phi_i(x)$ 와  $\psi_j(x)$ 는 각각 수평 및 수직변위에 대한 보의 기하학적인 형상함수를 나타낸다. 그리고  $u_i(t)$ 와  $v_j(t)$ 는 유한요소의 절점변수를 나타내고  $N_1$ 과  $N_2$ 는 근사해를 추정하기 위해 사용된 절점변수의 개수를 나타낸다. Fig. 1 과 같이 한 개의 절점에 3개의 절점변수를 가정하였을 경우  $N_1=2, N_2=4$  이다. 또한 형상함수는 다음의 경계조

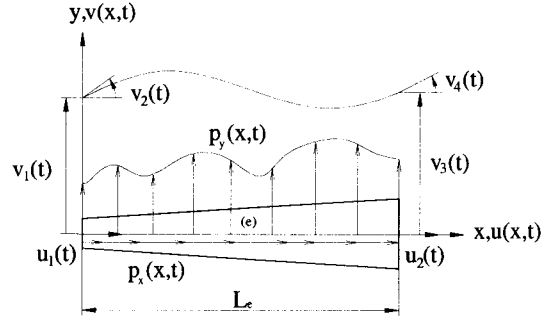


Fig. 1 Finite element of linear non-uniform Bernoulli-Euler beam

건들을 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 1, \phi_1(L_e) = 0, \phi_2(0) = 0, \phi_2(L_e) = 1 \\ \psi_1(0) &= 1, \psi_1'(0) = \psi_1(L_e) = \psi_1'(L_e) = 0 \\ \psi_2'(0) &= 1, \psi_2(0) = \psi_2(L_e) = \psi_2'(L_e) = 0 \\ \psi_3(L_e) &= 1, \psi_3(0) = \psi_3'(0) = \psi_3'(L_e) = 0 \\ \psi_4'(L_e) &= 1, \psi_4(0) = \psi_4'(0) = \psi_4(L_e) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

평형 조건식을 만족시키는 형상함수는 다항식으로 나타낼 수 있다. 다항식의 상수항은 식(3)의 경계조건을 적용하여 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L_e}, \quad \phi_2(x) = \frac{x}{L_e} \quad (4)$$

$$\psi_1(x) = 1 - 3 \left( \frac{x}{L_e} \right)^2 + 2 \left( \frac{x}{L_e} \right)^3 \quad (5)$$

$$\psi_2(x) = x - 2L_e \left( \frac{x}{L_e} \right)^2 + L_e \left( \frac{x}{L_e} \right)^3$$

$$\psi_3(x) = 3 \left( \frac{x}{L_e} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{L_e} \right)^3$$

$$\psi_4(x) = -L_e \left( \frac{x}{L_e} \right)^2 + L_e \left( \frac{x}{L_e} \right)^3$$

불균일한 선형 베르누이-오일러보의 수평 및 수직방향 탄성거동에 의한 전체 변형에너지와 운동에너지는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EA(x) (u'(x,t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI(x) (v''(x,t))^2 dx \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho A(x) (\dot{u}(x,t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho A(x) (\dot{v}(x,t))^2 dx \quad (7)$$

위의 변형에너지와 운동에너지에 관한 식(2), (4), (5)를 대입하여 정리하면 수직 및 수평방향 절점좌표에 대한 질량 및 강성행렬을 계산할 수 있다.

$${}^1m_{ij} = \int_0^L \rho A(x) \phi_i \phi_j dx, \quad {}^1k_{ij} = \int_0^L EA(x) \phi_i' \phi_j' dx \quad (8)$$

(i, j = 1, \dots, N\_1)

$${}^2m_{ij} = \int_0^L \rho A(x) \psi_i \psi_j dx, \quad {}^2k_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi_i'' \psi_j'' dx \quad (9)$$

(i, j = 1, \dots, N\_2)

여기서 위첨자 1 과 2 는 x 방향과 y 방향을 의미한다. 만일 보에 외력이 작용할 경우 가상일의 원리를 적용하면 수평방향 힘과 수직방향 힘을 절점 좌표계로 변환할 수 있다.

$$\delta W = \int_0^L p_x(x, t) \delta u(x, t) dx + \int_0^L p_y(x, t) \delta v(x, t) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N_1} {}^1P_i(t) \delta u_i + \sum_{j=1}^{N_2} {}^2P_j(t) \delta v_j \quad (10)$$

여기서,

$${}^1P_i(t) = \int_0^L p_x(x, t) \phi_i dx, \quad {}^2P_j(t) = \int_0^L p_y(x, t) \psi_j dx \text{ 이다.}$$

이상과 같이 유도된 보의 탄성변형에너지, 운동에너지 그리고 가상일을 이용하여 오일러-라그랑지식(Euler-Lagrange equation)에 대입하면 유한 보 요소의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]_e \{\ddot{v}\}_e + [K]_e \{v\}_e = \{P\}_e \quad (11)$$

여기서,

$$[M]_e = \begin{bmatrix} {}^1m_{11} & 0 & 0 & {}^1m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & {}^2m_{11} & {}^2m_{12} & 0 & {}^2m_{13} & {}^2m_{14} \\ 0 & {}^2m_{21} & {}^2m_{22} & 0 & {}^2m_{23} & {}^2m_{24} \\ {}^1m_{21} & 0 & 0 & {}^1m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & {}^2m_{31} & {}^2m_{32} & 0 & {}^2m_{33} & {}^2m_{34} \\ 0 & {}^2m_{41} & {}^2m_{42} & 0 & {}^2m_{43} & {}^2m_{44} \end{bmatrix},$$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} {}^1k_{11} & 0 & 0 & {}^1k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & {}^2k_{11} & {}^2k_{12} & 0 & {}^2k_{13} & {}^2k_{14} \\ 0 & {}^2k_{21} & {}^2k_{22} & 0 & {}^2k_{23} & {}^2k_{24} \\ {}^1k_{21} & 0 & 0 & {}^1k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & {}^2k_{31} & {}^2k_{32} & 0 & {}^2k_{33} & {}^2k_{34} \\ 0 & {}^2k_{41} & {}^2k_{42} & 0 & {}^2k_{43} & {}^2k_{44} \end{bmatrix},$$

$$\{v\}_e^T = [u_1 \quad v_1 \quad v_2 \quad u_2 \quad v_3 \quad v_4]_e,$$

$$\{P\}_e^T = [{}^1P_1 \quad {}^2P_1 \quad {}^2P_2 \quad {}^1P_2 \quad {}^2P_3 \quad {}^2P_4]_e$$

이렇게 유도된 유한 보 요소의 운동방정식은 전체계에 대한 조합과정을 거쳐서 다음과 같은 시스템 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{v}\} + [K]\{v\} = \{P\} \quad (12)$$

이동계와 구조물과의 충돌에 의한 접촉력은 다음과 같이 절점 힘 벡터로 나타낼 수 있다.

$$\{P\} = p_x(t)\{T(x)\} + p_y(t)\{S(x)\} \quad (13)$$

여기서  $\{T(x)\}$ 와  $\{S(x)\}$ 는 각각 충돌에 의한 외력  $p_x(t)$ 와  $p_y(t)$ 가 탄성구조물 위에서 이동 중에 위치하고 있는 요소 i 의 절점 자유도와 관련된 형태 함수 벡터로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{T(x)\}_i^T = [0, 0, 0, \dots, \{T(x)\}_i^T, 0, 0, \dots, 0] \quad (14)$$

$$\{S(x)\}_i^T = [0, 0, 0, \dots, \{S(x)\}_i^T, 0, 0, \dots, 0] \quad (15)$$

여기서,  $\{T(x)\}_i^T = [\phi_1(x), 0, 0, \phi_2(x), 0, 0]_i$  이고  $\{S(x)\}_i^T = [0, \psi_1(x), \psi_2(x), 0, \psi_3(x), \psi_4(x)]_i$  이다. 유한 요소의 조합과정 중에서 주어진 해석조건에 대한 보의 지반 구속상태에 따라서 각 절점에 경계조건이 적용된다. 구조해석 분야에서의 경계조건 적용은 일반적으로 하중과 변위에 대하여 이루어진다. 임의의 절점이 변위구속이 되어서 움직임이 없는 경우 계의 운동방정식인 식(12)를 아래의 식과 같이 구속자유도(constrained degree-of-freedom)와 유효자유도(active degree-of-freedom)로 분리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ac} \\ M_{ca} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_a \\ \ddot{v}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ac} \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_a \\ v_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a \\ P_c \end{Bmatrix} \quad (16)$$

식(16)은 경계조건에 의하여 구속자유도의 변위와 가속도벡터는 제거되고 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + [K_{aa}]\{v_a\} = \{P_a\} \quad (17-a)$$

$$\{P_c\} = [M_{ca}]\{\ddot{v}_a\} + [K_{ca}]\{v_a\} \quad (17-b)$$

따라서 구속된 절점에 발생하는 반력은 유효 자유도로 구성된 운동방정식을 해석함으로써 계산

할 수 있다. 그리고 경계조건으로 하중이 작용할 경우에는 해당하는 절점력으로 환산하여 운동방정식의 우변항에서 고려할 수 있다.

구조물이 탄성 변형을 할 때 에너지소모를 나타내는 감쇠행렬은 질량행렬이나 강성행렬과 같이 유도된 요소행렬의 조합과정을 거쳐서 간단하게 구할 수 있는 성질의 것이 아니다. 일반적으로 구조물의 감쇠현상은 재료의 복잡한 성질에 의해서 결정되기 때문에 감쇠행렬을 추정한다는 것은 매우 어려운 일이다. 따라서 그 동안 대부분의 구조물들이 비례감쇠(proportional damping) 현상이 적용된다는 가정하에서 아래의 식과 같이 Rayleigh 감쇠행렬을 정의하여 실험값에 근거한 감쇠현상을 적용하고 있다.

$$[C_{aa}] = a[M_{aa}] + b[K_{aa}] \quad (18)$$

여기서 상수 a와 b는 탄성 구조물의 서로 다른 두 진동 주파수  $\omega_1, \omega_2$  와 이에 대응하는 모달 감쇠비(modal damping ratio)  $\zeta_1, \zeta_2$  에 의하여 아래의 식과 같이 결정된다<sup>[11]</sup>.

$$a = 2\omega_1\omega_2 \frac{\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad b = 2 \frac{\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (19)$$

따라서 탄성 구조물의 구조감쇠 현상을 고려한 전체계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + [C_{aa}]\{\dot{v}_a\} + [K_{aa}]\{v_a\} = \{P_a\} \quad (20)$$

### 3. 다양한 지반의 지지조건

탄성구조물을 지지하는 지반의 지지조건은 기구학적이나 동력학적으로 다양하게 가질 수 있다. 여기서는 편의상 균일보에 대한 각종 지반의 지지조건을 고려하였으나 불균일 보에 대해서도 동일하게 적용 가능하다.

#### 3.1 기구학적인 지지

일반적으로 탄성 구조물은 단순지지, 외팔지지 그리고 고정지지와 같이 기구학적으로 다양한 조건을 가질 수 있다. 이러한 지지 조건들은 식(17-a)와 같은 시스템 운동방정식을 얻기 위한 경계조건으로 작용한다. 또한 다중 경간을 갖는 복잡한

구조물의 경우에서도 마찬가지로 방법으로 해당 경계조건을 고려한 운동방정식을 유도할 수 있다.

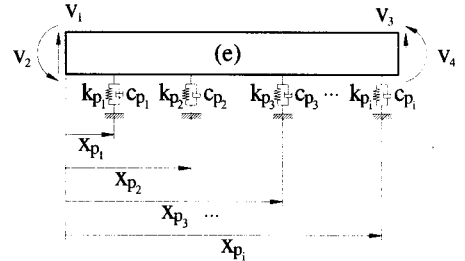


Fig. 2 Beam supported by vertical and discrete foundation

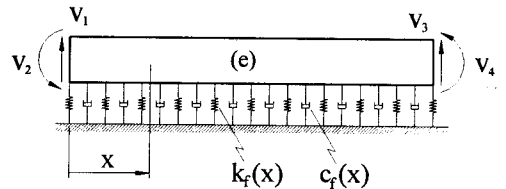


Fig. 3 Beam supported by vertical and continuous foundation

#### 3.2 수직이산 탄성지지

Fig. 2와 같이 보 요소에서 임의의 간격만큼 떨어져서 탄성지지하고 있는 경우를 고려하면 보 요소의 왼쪽 끝단에서  $x_{pi}$ 만큼 떨어져서 보를 지지하고 있는 힘은 그 위치에서 보의 수직 변위와 수직 변형속도에 의해서 다음의 식과 같이 결정된다.

$$f_{pi} = k_{pi}v(x_{pi}, t) + c_{pi}\dot{v}(x_{pi}, t), \quad i = 1, 2, \dots, NS \quad (21)$$

여기서  $k_{pi}$ 와  $c_{pi}$ 는 이산 탄성지지에 의한 탄성 및 감쇠계수를 그리고 NS는 요소 내에서의 이산 탄성지지점의 개수를 나타낸다. 이와 같이 결정된 힘을 요소의 절점 좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{F_{VD}\}_e &= \int_0^L \sum_{i=1}^{NS} f_{pi} {}^D\delta(x - x_{pi}) \{s(x_{pi})\}_e dx \\ &= \sum_{i=1}^{NS} f_{pi} \{s(x_{pi})\}_e \end{aligned} \quad (22)$$

여기서  ${}^D\delta(*)$ 는 Dirac delta function 을 나타낸다. 만약 이와 같은 수직이산 탄성지지의 형태가 전체

보 요소에서 계속된다면 이로 인한 외력벡터는 유한요소의 조합과정을 통하여 얻을 수 있다. 따라서 보를 이산적으로 탄성 지지하는 효과는 전체 시스템 운동방정식의 우변항인 일반 힘 벡터에서 다음의 식과 같이 고려할 수 있다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + [C_{aa}]\{\dot{v}_a\} + [K_{aa}]\{v_a\} = \{P_a\} + \{F_{VD}\} \quad (23)$$

### 3.3 수직연속 탄성지지

Fig. 3 과 같이 보 요소의 임의의 위치에서 수직변위  $v(x,t)$ 와 수직 변형속도  $\dot{v}(x,t)$ 는 절점 자유도와 형태함수를 사용하여 다음과 같이 결정된다.

$$v(x,t) = \{S(x)\}_e^T \{v\}_e, \quad \dot{v}(x,t) = \{S(x)\}_e^T \{\dot{v}\}_e \quad (24)$$

연속적인 수직 탄성지지에 의한 변형에너지는 다음과 같다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_b^c v^T k_f(x) v dx = \frac{1}{2} \{v\}_e^T [K_{vc}] \{v\}_e \quad (25)$$

여기서  $k_f(x)$ 는 수직 탄성계수를 나타낸다. 따라서 보 요소에 작용하는 연속적인 비선형 수직강성에 의한 강성행렬은 다음과 같이 계산 가능하다.

$$[K_{vc}]_e = \int_b^c \{S(x)\}_e k_f(x) \{S(x)\}_e^T dx \quad (26)$$

또한 연속적인 수직방향 비선형 감쇠효과에 의한 소비에너지는 다음과 같다.

$$U_c = \frac{1}{2} \int_b^c \dot{v}^T c_f(x) \dot{v} dx = \frac{1}{2} \{\dot{v}\}_e^T [C_{vc}] \{\dot{v}\}_e \quad (27)$$

여기서  $c_f(x)$ 는 수직 탄성계수를 나타낸다. 따라서 연속적인 비선형 감쇠효과에 의한 보 요소에서의 감쇠행렬은 다음과 같이 계산 가능하다.

$$[C_{vc}]_e = \int_b^c \{S(x)\}_e c_f(x) \{S(x)\}_e^T dx \quad (28)$$

전체계에 이와 같은 수직탄성 및 감쇠효과가 작용할 경우 유한요소 조합의 형태를 갖는다. 이 상과 같이 탄성 구조물을 연속적으로 탄성 지지하는 효과는 강성행렬과 감쇠행렬의 항으로 전체 시스템 운동방정식에서 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + ([C_{aa}] + [C_{vc}])\{\dot{v}_a\} + ([K_{aa}] + [K_{vc}])\{v_a\} = \{P_a\} \quad (29)$$

### 3.4 수평이산 탄성지지

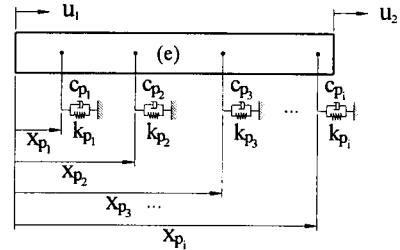


Fig. 4 Beam supported by longitudinal and discrete foundation

Fig. 4 와 같이 탄성보 상에서 임의의 간격만큼 떨어져서 축 방향으로 탄성지지하고 있는 경우를 고려하자. 보의 왼쪽 끝단에서  $x_{pi}$ 만큼 떨어져서 축 방향으로 지지하고 있는 힘은 그 곳에서의 축 방향 변위와 속도에 의해서 다음과 같이 결정된다.

$$g_{pi} = k_{pi} u(x_{pi}, t) + c_{pi} \dot{u}(x_{pi}, t), \quad i = 1, 2, \dots, NA \quad (30)$$

여기서 NA는 요소내에서 존재하는 축 방향 이산 탄성 지지점의 개수를 나타낸다. 위에서의 축 방향 힘을 절점 좌표로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{F_{LD}\}_e &= \int_b^c \sum_{i=1}^{NA} g_{pi}^D \delta(x - x_{pi}) \{T(x_{pi})\}_e dx \\ &= \sum_{i=1}^{NA} g_{pi} \{T(x_{pi})\}_e \end{aligned} \quad (31)$$

만약 보 요소에 이와 같은 형태의 지지조건이 전체계에서 계속된다면 이로 인한 외력벡터는 유한요소의 조합과정을 거쳐 계산할 수 있다. 따라서 보를 이산적으로 수평 탄성 지지하는 효과는 전체 시스템 운동방정식의 우변항인 일반 힘 벡터에서 고려할 수 있다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + [C_{aa}]\{\dot{v}_a\} + [K_{aa}]\{v_a\} = \{P_a\} + \{F_{LD}\} \quad (32)$$

### 3.5 수평연속 탄성지지

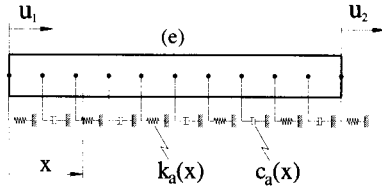


Fig. 5 Beam supported by longitudinal and continuous foundation

Fig. 5 와 같이 보 요소의 임의의 위치에서 축 방향 변위  $u(x,t)$ 와 속도  $\dot{u}(x,t)$ 는 절점 자유도와 이에 해당하는 형태함수 벡터를 사용하여 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$u(x,t) = \{T(x)\}_e^T \{v\}_e, \quad \dot{u}(x,t) = \{T(x)\}_e^T \{\dot{v}\}_e \quad (33)$$

연속적인 수평 탄성지지에 의한 변형에너지는,

$$U_s = \frac{1}{2} \int_b^e u^T k_a(x) u dx \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2} \{v\}_e^T [K_{LC}]_e \{v\}_e$$

여기서  $k_a(x)$ 는 수평 탄성계수를 나타낸다. 따라서 유한 보 요소에 작용하는 연속적인 비선형 수평 강성에 의한 강성행렬은 다음과 같다.

$$[K_{LC}]_e = \int_b^e \{T(x)\}_e k_a(x) \{T(x)\}_e^T dx \quad (35)$$

연속적인 축 방향 비선형 감쇠효과에 의한 소비에너지는,

$$U_c = \frac{1}{2} \int_b^e \dot{u}^T c_a(x) \dot{u} dx \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2} \{\dot{v}\}_e^T [C_{LC}]_e \{\dot{v}\}_e$$

여기서  $c_a(x)$ 는 수직 감쇠계수를 나타낸다. 따라서 보 요소에 작용하는 감쇠행렬은 다음과 같다.

$$[C_{LC}]_e = \int_b^e \{T(x)\}_e c_a(x) \{T(x)\}_e^T dx \quad (37)$$

전체 보에 이와 같이 수평방향으로 연속적인 강성 및 감쇠효과가 작용할 경우 전체계의 강성 및 감쇠행렬은 유한요소의 조합과정을 거쳐 구할 수 있다. 이상과 같이 탄성보를 연속적으로 축 방향 비선형 탄성 지지하는 효과는 강성행렬과 감쇠행렬의 항으로 전체 시스템 운동방정식에서 고려할 수 있다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + ([C_{aa}] + [C_{LC}])\{\dot{v}_a\} + ([K_{aa}] + [K_{LC}])\{v_a\} = \{P_a\} \quad (38)$$

### 3.6 절점회전 탄성지지

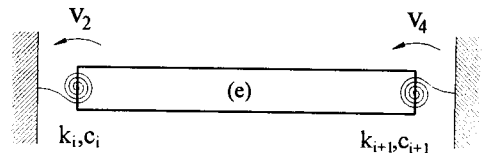


Fig. 6 Beam supported by rotational and discrete foundation

Fig. 6 과 같이 보 요소의 양 끝단 절점에서 회전 스프링과 감쇠기가 연결되어 있는 경우 절점 힘 벡터는 다음과 같다.

$$\{F_{NR}\}_e = [K_{NR}]_e \{v\}_e + [C_{NR}]_e \{\dot{v}\}_e \quad (39)$$

여기서  $[K_{NR}]_e = \text{diag}[0, 0, k_i, 0, 0, 0, k_{i+1}]_e$  이고  $[C_{NR}]_e = \text{diag}[0, 0, c_i, 0, 0, 0, c_{i+1}]_e$  이다. 전체 보에 이와 같은 절점 회전 탄성지지 조건이 계속될 경우 절점 힘 벡터는 조합의 형태를 갖는다. 따라서 보의 절점 회전 탄성지지 효과는 전체 시스템 운동방정식의 우변 항인 일반 힘 벡터에서 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + [C_{aa}]\{\dot{v}_a\} + [K_{aa}]\{v_a\} = \{P_a\} + \{F_{NR}\} \quad (40)$$

## 4. 이동 다물체계의 동력학 해석

탄성 구조물 위를 이동하는 기계계는 여러 개의 부품들로 구성되어 있다. 이들 부품들은 기구학적으로나 동력학적으로 복잡하게 구속되어서 특

정한 상대운동을 일으키며 전체계의 거동에 영향을 미친다. 각각의 부품들은 탄성 구조물에 비하여 강성이 큰 강체로 가정하였다.

다물체 동력학 해석이론을 바탕으로 다음과 같은 미분-대수방정식을 유도할 수 있다<sup>[21]</sup>.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (41-a)$$

$$\{\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{t})\} = \{0\} \quad (41-b)$$

여기서  $[\mathbf{N}]$ 은 강체계의 질량행렬,  $\{\mathbf{q}\}$ 는 일반좌표벡터,  $\{\lambda\}$ 는 라그랑지승수를 그리고  $\{\mathbf{g}\}$ 는 계에 영향을 미치는 일반 힘 벡터를 나타낸다.  $\{\Phi\}$ 는 강체의 독립적인 기구학적 구속식을 나타내고  $[\Phi_q]$ 는 구속식을 일반좌표로 편미분한 자코비안 행렬(Jacobian matrix)로서 비특이 행렬(non-singular matrix)이다. 구속식은 대표적으로 회전 구속식, 병진 구속식 그리고 거리구속식이 있다. 이들 구속 조건식에 의해서 가속도식의 우변항인  $\{\gamma\}$ 가 결정된다.

$$\{\gamma\} = -\{([\Phi_q] \{\dot{\mathbf{q}}\})_q \{\dot{\mathbf{q}}\} - 2[\Phi_{qt}] \{\dot{\mathbf{q}}\} - \{\Phi_{tt}\}\} \quad (42)$$

일반 힘 벡터에서는 강체계에 작용하는 외력이나 그 밖의 힘 요소인 병진 스프링-감쇠장치, 회전 스프링-감쇠장치에서 발생하는 힘도 고려할 수 있다. 그 외에도 지지 구조물과의 저속 충돌현상을 고려하기 위해 비선형 탄성 거동을 하는 헤르쯔 접촉력(Hertzian contact force)을 적용할 수 있다. Fig. 7에서는 접촉점에서 임의의 곡률을 갖는 두 물체의 충돌 시 발생하는 힘을 표시하고 있다.

두 물체의 접촉에 의한 수직력은<sup>[22]</sup>,

$$\{f_{ij}^c\} = (k\alpha^{1.5} + c\dot{\alpha}) \frac{\{d_{ij}\}}{|\{d_{ij}\}|} = -\{f_{ji}^c\} \quad (43)$$

여기서  $\{|\{d_{ij}\}|\}$ 는 벡터  $\{d_{ij}\}$ 의 크기를 나타낸다. 그리고  $k$ 와  $c$ 는 헤르쯔 접촉강성과 감쇠계수를 나타내고  $\alpha$ 는 두 물체의 접촉점인  $P_i$ 와  $P_j$ 에서 접선에 수직인 방향으로의 침투량을 나타내며 다음과 같이 계산 가능하다.

$$\alpha = (\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_j) - \{d_{ij}\}^T \{d_{ij}\} \quad (44)$$

여기서  $\{d_{ij}\} = \{r_j\} + \{s_j^c\} - \{r_i\} - \{s_i^c\}$ 이고  $\mathbf{R}_i$ 와  $\mathbf{R}_j$ 는 순간접점에서의 곡률반경을 나타낸다.  $\alpha > 0$ 일 경우에는 두 물체의 충돌현상이 발생되며,  $\alpha < 0$ 일 경우에는 충돌현상이 일어나지 않는다. Fig. 8에서와 같이 두 물체 중 한 개가 직선의 형상을 하고 있는 경우에 순간곡률반경  $\mathbf{R}_i = \infty$ 가 되며 침투량은 다음과 같이 계산한다.

$$\alpha = \mathbf{R}_j - \{d_{ij}\}^T \{d_{ij}\} \quad (45)$$

여기서  $\{d_{ij}\} = \{r_j\} + \{s_j^c\} - \{r_i\} - \{s_i^p\}$ 이다. 헤르쯔 접촉강성은 충돌물체의 기하학적인 형상과 재료의 물리적인 성질에 따라서 다음과 같이 정의된다<sup>[22]</sup>.

$$k = \frac{4}{3\pi(h_i + h_j)} \left[ \frac{\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j}{\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_j} \right]^{0.5} \quad (46)$$

$$\text{여기서 } h_l = \frac{1 - \nu_l^2}{\pi E_l}, \quad l = i, j$$

$E_l$ : 충돌물체의 영률

$\nu_l$ : 충돌물체의 포아송비

두 물체의 접촉/충돌에 의한 수평력은 비선형 마찰현상에 의해서 발생하며 그 크기는 수직력과 마찰계수에 의해서 결정된다.

$$\{f_{ij}^c\} = \mu_0 \tanh\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta_c}\right) \{f_{ni}^c\} \left[ \mathbf{A} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\{d_{ij}\}}{|\{d_{ij}\}|} = -\{f_{ji}^c\} \quad (47)$$

여기서  $\mu_0$ 는 공칭 마찰계수,  $\beta$ 는 두 물체의 접촉에 의한 접선방향 속도,  $\beta_c$ 은 전이속도(transition speed) 그리고  $[\mathbf{A}]$ 는 회전 변환행렬이다. 이상과 같이 결정된 접촉/충돌력을 사용하여 두 물체에 대해 다음과 같은 일반 힘 벡터를 계산할 수 있다.

$$\{g_i^c\} = \begin{Bmatrix} f_{(x)i}^c \\ f_{(y)i}^c \\ -(y_i^p - y_i) f_{(x)i}^c + (x_i^p - x_i) f_{(y)i}^c \end{Bmatrix} = -\{g_j^c\} \quad (48)$$



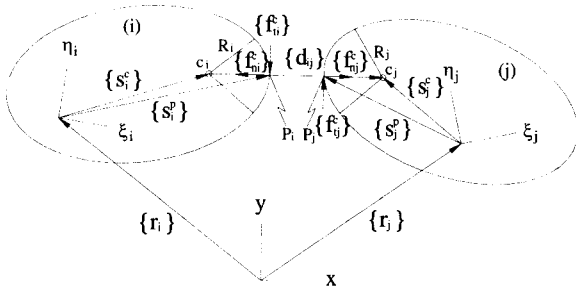


Fig. 7 Arc-arc contact

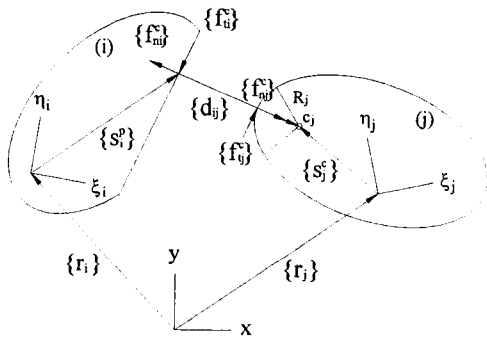


Fig. 8 Arc-line contact

그리고 두 강체에서 발생하는 접촉력은 운동 방정식의 일반 힘 벡터 항에서 다른 힘 요소와 함께 고려할 수 있다.

### 5. 조합 운동방정식

구속 다물체계가 다양한 지지조건을 갖는 탄성보 위에서 접촉을 하면서 임의의 구동 속도에 따라서 이동할 경우 이동 다물체계와 탄성 지지계에 대하여 각각 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있었다.

$$[M_{aa}]\{\ddot{v}_a\} + [C]^*\{\dot{v}_a\} + [K]^*\{v_a\} = \{P(q, \dot{q}, v_a, \dot{v}_a, t)\}^* \quad (49-a)$$

$$\begin{bmatrix} N & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g(q, \dot{q}, v_a, \dot{v}_a, t) \\ \gamma(q, \dot{q}, t) \end{Bmatrix} \quad (49-b)$$

여기서  $[C]^*=[C_{aa}]+[C_{vc}]+[C_{lc}]$ 로 구조물의 비례 감쇠효과와 지반의 수직 및 수평 연속지지 감쇠효과를 고려할 수 있다. 또한  $[K]^*=[K_{aa}]+[K_{vc}]+[K_{lc}]$

로 구조물의 강성효과와 지반의 수직 및 수평 연속지지 탄성효과를 고려할 수 있다. 그리고  $\{P\}^*=\{P_a\}+\{F_{VD}\}+\{F_{LD}\}+\{F_{NR}\}$ 로 외력에 의한 효과, 수직 및 수평 이산 탄성지지효과 그리고 절점 회전 탄성지지효과를 고려할 수 있다.

구속 다물체 계의 미분-대수방정식의 일반 힘 벡터  $\{g\}$ 와 지지계의 상미분방정식에서의 절점 힘 벡터  $\{P\}^*$ 는 두 계의 상태변수 및 시간변수에 의해서 결정되어 진다. 따라서 전체계의 운동 방정식은 다음과 같이 조합된 행렬형태의 운동방정식으로 나타낼 수 있으며 동시에 해석이 이루어져야 한다.

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & N & \Phi_q^T \\ 0 & \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_a \\ \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ g \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (50)$$

여기서  $\{Q\}=\{P\}^*-[C]^*\{\dot{v}_a\}-[K]^*\{v_a\}$ 이고 식 (50)에서 시간에 대해 적분된 강체의 일반좌표는 식(41-b)의 구속식을 동시에 만족해야 한다.

이상과 같이 유도된 조합 미분-대수방정식 (combined differential-algebraic equation)을 수치적으로 해석하기 위해서는 매 적분단계마다 해의 수렴성을 기준으로 하여 변수를 독립변수와 종속변수로 분리함으로써 정확하고 안정된 해를 구하는 것으로 알려진 일반좌표분리법을 적용한다<sup>[23]</sup>. 이렇게 분리된 독립변수는 암시적다단계(implicit multi-step) 알고리즘인 예측자-수정자(Predictor-Corrector) 적분법을 사용하여 해석할 수 있다.

### 6. 결론

본 논문에서는 불균일한 선형 베르누이-오일러 보 위를 접촉하며 이동하는 구속 기계계의 평면운동을 해석하기 위하여 Hamilton의 원리를 적용하여 유도된 탄성 보 구조물의 수직 및 수평방향 운동방정식을 다물체계에서 유도된 미분-대수방정식과 함께 조합운동방정식을 얻을 수 있었다. 탄성 구조물의 다양한 지반 지지조건들을 고려하기 위하여 연속적인 혹은 불연속적인 수평 및 수직 탄성지지와 절점 회전 탄성지지 효과를 고려하였다. 연속적인 수직 및 수평 탄성지지 효과는 계의 운동방정식에서 강성 및 감쇠행렬로 고려할 수 있다.

그리고 불연속적인 수직, 수평 및 절점 회전 탄성 지지 효과는 운동방정식의 우변항인 일반 힘 벡터 항에서 고려할 수 있다. 또한 탄성 구조물의 구조 감쇠 효과는 비례감쇠를 가정한 Rayleigh 감쇠행렬로 적용하였다.

이렇게 유도된 운동방정식은 일반좌표분리법을 이용하여 시간적분을 수행 함으로써 구속된 이동계와 탄성 구조물과의 마찰접촉 및 탄성 거동에 의한 상호작용을 고려한 전체계의 수직 및 수평방향 운동을 해석할 수 있다. 또한 구속 이동계를 구성하고 있는 부품들 간의 반력 및 탄성구조물의 지지부에서의 반력과 같은 상세 설계자료를 구하여 설계과정에 반영할 수 있다.

### 참고문헌

1. Timoshenko, S., Young, D.H. and Weaver, W., *Vibration Problems in Engineering*, 4th edition, John Wiley & Sons, Inc., 1974.
2. Wang, R.T. and Lin, J.S., "Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames Due To Moving Loads," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 3, pp. 417-434, 1998.
3. Wu, J.S. and Dai, C.W., "Dynamic Responses of Multispan Nonuniform Beam Due to Moving Loads," *J. of Structural Engineering*, Vol. 113, No. 3, pp. 458-474, 1987.
4. Hong, S.W. and Kim, J.W., "Modal Analysis of Multi-Span Timoshenko Beams Connected or Supported by Resilient Joints with Damping," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 4, pp. 787-806, 1999.
5. Henchi, K., Fafard, M., Dhatt, G. and Talbot, M., "Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams Under Moving Loads," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 199, No. 1, pp. 33-50, 1997.
6. Marchesiello, S., Fasana, A., Garibaldi, L. and Piombo, B.A.D., "Dynamics of Multi-Span Continuous Straight Bridges Subject to Multi-Degrees of Freedom Moving Vehicle Excitation," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 3, pp. 541-561, 1999.
7. Zheng, D.Y., Cheung, Y.K., Au, F.T.K. and Cheng, Y.S., "Vibration of Multi-Span Non-Uniform Beams under Moving Loads by Using Modified Beam Vibration Functions," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 3, pp. 455-467, 1998.
8. Yoshimura, T. and Hino, J., "Vibration Analysis of a Non-Linear Beam Subjected to Moving Loads by Using the Galerkin Method," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 104, No. 2, pp. 179-186, 1986.
9. Lee, H.P., "The Dynamic Response of a Timoshenko Beam Subjected to a Moving Mass," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 198, No. 2, pp. 249-256, 1996.
10. Duffy, Dean G., "The Response of an Infinite Railroad Track to a Moving, Vibrating Mass," *Trans. ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 66-73, 1990.
11. Lin, Y.H. and Trethewey, M.W., "Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 2, pp. 323-342, 1990.
12. Thambiratnam, D. and Zhuge, Y., "Dynamic Analysis of Beams on an Elastic Foundation Subjected to Moving Loads," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 198, No. 2, pp. 149-169, 1996.
13. Lin, Y.H. and Trethewey, M.W., "Active Vibration Suppression of Beam Structures Subjected to Moving Loads : A Feasibility Study Using Finite Elements," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 166, No. 3, pp. 383-395, 1993.
14. Gutierrez, R.H. and Laura, P.A.A., "Transverse Vibrations of Beams Traversed by Point Masses : A General, Approximate Solution," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 195, No. 2, pp. 353-358, 1996.
15. Chang, T.P. and Liu, Y.N., "Dynamic Finite Element Analysis of a Nonlinear Beam Subjected to a Moving Load," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, No. 12, pp. 1673-1688, 1996.
16. Yoshimura, T., Hino, J. and Kamata, T., "Random Vibration of a Non-linear Beam Subjected to a Moving Load : A Finite Element Method Analysis," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 122, No. 2, pp. 317-329, 1988.
17. Vu-Quoc, L. and Olsson, M., "A Computational Procedure for Interaction of High-Speed Vehicles on Flexible Structures without Assuming Known Vehicle Nominal Motion," *Computer Methods in*

- Applied Mechanics and Engineering, Vol. 76, pp. 207-244, 1989.
18. Fryba, L., "Dynamic Interaction of Vehicles with Tracks and Roads," Vehicle System Dynamics, Vol. 16, pp. 129-138, 1987.
  19. Maessen, F., Storrer, O. and Zeischka, H., "Numerical Simulation of Interaction between Rail and Rail Vehicle by Integration of Multibody Dynamics and Finite Element Analysis," Computer Applications in Railway Operations, pp. 177-187, 1990.
  20. Duffek, W. and Kortum, W., "Dynamic Load Computation for Flexible Guideways under Moving Vehicles within a Multibody Approach," Proc. ICOSSAR 89 5th International Conference on Structural Safety and Reliability, pp. 1295-1302, 1989.
  21. Haug, E.J., Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Vol. I : Basic Methods, Allyn and Bacon, 1989.
  22. Lankarani, H.M. and Nikravesh, P.E., "A Contact Force Model with Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems," ASME J. of Mechanical Design, Vol. 112, pp. 369-376, 1990.
  23. Wehage, R.A. and Haug, E.J., "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamics Systems," Trans. ASME, J. of Mechanical Design, Vol. 104, pp. 247-256, 1982.