

# 저속충격 하중을 받는 판의 탄소성 동적거동 해석

허경재\*, 독고욱\*\*

## Analysis of Elasto-Plastic Dynamic Behaviour of Plate Subjected to Load by Low Velocity Impact

Gyoung Jae Huh\* and Wook Dokko\*\*

### ABSTRACT

In this study, a computer program is developed for analyzing the elasto-plastic dynamic behaviors of the plate subjected to line-loading by a low-velocity impactor. The equilibrium equation associated with the Hertzian contact law is formulated to evaluate the transient dynamic behaviour of the impacted plate. Compared with an elastic analysis, the effects of material plasticity are presented. Consequently, in the case of elasto-plastic analysis, impulse decreases, displacements increase and contact time duration is longer than the elastic case for same finite element model. And the time variation of the impacting load is not significant due to the plasticity except at the beginning of impact duration, and the induced stresses of the plate are more realistic.

**Key Words** : Elasto-plastic dynamic behaviors (탄소성 동적 거동), Line-loading (선하중), Low-velocity impact (저속 충격), Hertzian contact law (헤르츠 접촉법칙), Finite element (유한요소)

### 1. 서론

구조물의 충돌시 발생하는 충격 하중은 짧은 시간 동안 구조물에 전달되어 구조물을 변형, 손상, 파괴시킨다. 따라서 충격문제에 대한 정확한 해석은 구조 안전성의 관점에서 매우 중요하며 이러한 충격 문제는 충격 지점에서 관통, 파괴 등 구조물의 변형이 집중되는 고속충격과 충격 지점에서의 국소적인 거동보다 구조물 전체의 거동이 주요 관심 대상인 저속충격으로 분류된다<sup>(1)</sup>. 저속 충격체에 의하여 충돌하는 판에 대한 지금까지의 연구는 탄성 해석에 제한적이었으나<sup>(2)</sup>, 이는 대부분의 경우에서 소성이 발생하는 관계로 실제로는 비현실적이다.

본 연구에서는 저속 충격시 재료의 비선형성이 구조물의 거동에 미치는 영향을 알아보기 위하여 질량과 속도를 갖고 부딪히는 충격체에 의해 선하중(Line-loading)을 받는 판의 탄소성 동적거동 해석을 해석하기 위한 프로그램을 개발하였다.

충격체는 판에 비해 매우 큰 강성을 갖는 강체로 하여 강제운동만을 고려하였고 판은 2차원 등계수 Plane Strain 요소로 모델링하여 해석을 수행하였다. 소성의 영향을 고려하기 위해 유동법칙(Flow rule), von Mises 항복조건식, 등방성 경화법칙을 적용하였다. Hertzian 접촉이론과 결합된 평형방정식이 충격을 받는 판의 과도 동적거동<sup>(2,3)</sup>을 평가하기 위해 구성되었다.

\* 부산대학교 기계공학부

\*\* 국방과학연구소

판의 운동방정식을 풀기 위하여 시간적분법으로 중앙차분법을 사용하였다. 재료의 소성 효과에 대해 탄성해석과 비교하여 수치해석을 수행하고 이에 대한 결과를 고찰하였다.

## 2. 문제의 구성

Fig. 1에서 보는 바와 같이 질량  $m$ , 속도  $v$ , 두께 반경  $r$ 인 선(Line) 충격체가 길이  $L$ , 폭  $W$ , 두께  $h$ 인 사각형 판에 부딪힌다고 가정한다. 판의 길이 방향의 양쪽 끝단은 고정 지지되어 있고 폭 방향의 양쪽 끝단은 단순 지지되어 있다. 충격체에 의해 선 하중을 받는 판의 경우 하중 분포는 폭을 따라 일정하고 자유단의 효과는 무시하여 변위가 생기지 않는다고 가정하여 2차원 등계수 Plane Strain 유한요소로 모델링하고, 충격체의 경우 강성이 판에 비해 충분히 크다고 가정하여 강체로 모델링하였다.

충격체와 판 사이의 접촉력은 Fig. 2에 제시된 바와 같이 질점(Point) 하중으로 가정하고 충격하중 ( $f$ )은 작용-반작용으로 크기는 같고 방향은 서로 반대이다.

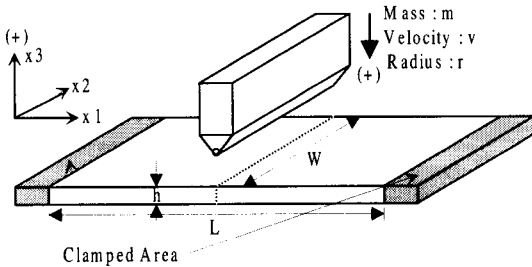


Fig. 1 Description of the problem and the coordinate system

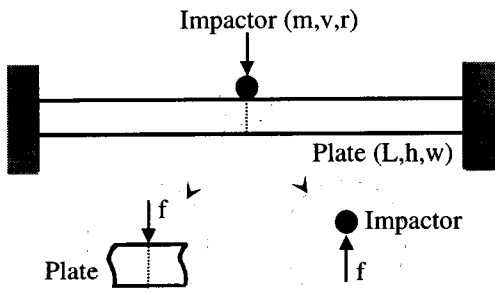


Fig. 2 2-D Modeling of the impact problem

## 3. 이론 및 수식화

### 3.1 지배방정식

Fig. 2에 제시한 판 해석을 위한 세가지 기본 방정식으로 충격체 및 판의 운동방정식과 충격체와 판 사이의 접촉력을 결정하기 위한 접촉법칙이 있다. 먼저 강체로 모델링된 충격체의 운동방정식은 Newton의 2'nd 법칙인 관성력과 충격하중의 평형방정식으로 식 (1)과 표현된다.

$$m_s \ddot{w}_s + f = 0 \quad (1)$$

여기서,  $m_s$ 는 충격체의 질량,  $\ddot{w}_s$ 는 충격체의 가속도,  $f$ 는 충격하중을 나타낸다

판의 운동방정식은 관성력과 탄소성 복원력, 그리고 충격하중의 유한요소 평형방정식으로 식 (2)와 같이 표현된다.<sup>(6)</sup>

$$[M]\{\dot{U}\} + [K_T]\{U\} = \{F\} \quad (2)$$

여기서,  $[M]$ 과  $[K_T]$ 는 질량행렬 및 접선방향의 강성행렬이며,  $\{F\}$ 와  $\{U\}$ , 그리고  $\{\dot{U}\}$ 는 하중, 변위 및 가속도 벡터이다.

본 문제에서 물체력과 표면력을 무시하면 충격하중 벡터는 다음과 같이 구해진다.

$$\{F\} = f\{I\} \quad (3)$$

여기서,  $\{I\}$ 는 접촉점에서만  $-1$ 의 값을 갖고 다른 성분은 모두 0의 값을 갖는 단위 벡터이다.

식(1)과 식(2)를 구하기 위해서는 충격체와 평판 사이의 접촉력을 결정해야 한다. 본 연구에서는 접촉력을 구하기 위해 Hertzian 접촉법칙을 사용하였다. Hertzian 압력분포를 가정함으로써 접촉력( $f$ )은 식 (4)와 같이 압입 깊이( $\alpha$ )의 관계 식으로 표현된다.<sup>(4)</sup>

$$\alpha = f(x_s + x_p) \{1 - \ln[fr(x_s + x_p)]\} \quad (4)$$

압입 깊이( $\alpha$ )는 충격체 중앙부와 판의 중앙면 사이의 변위 차이이다. 충격체와 판 사이의 첫 번째 접촉은 시간 0에서 일어난다고 가정한다. 또한 Fig. 3에 제시된 바와 같이 시간  $t$ 에서 충격체 및 판 중앙부의 변위를  $\delta_s$ 와  $\delta_c$ 로 둔다. 만약  $\delta_c$ 가  $\delta_s$ 보다 크다면 판은 충격체와 접촉하지 않으며, 이때 충격력은 0이다. 충격력이 0이 아닌 경우, 접촉력은 식 (4)에 의해 계산된다. 따라서,

$$\alpha = \delta_s - \delta_c \quad (5)$$

$$\alpha = f(x_s + x_p)(1 - \ln[fr(x_s + x_p)]) \quad (\delta_s \geq \delta_c) \quad (6)$$

$$0 = f \quad (\delta_s < \delta_c)$$

접촉력은 충격체와 판 사이의 변위와 연성되어 있으므로 식 (1), (2)와 (6)은 동시에 풀어야 한다.

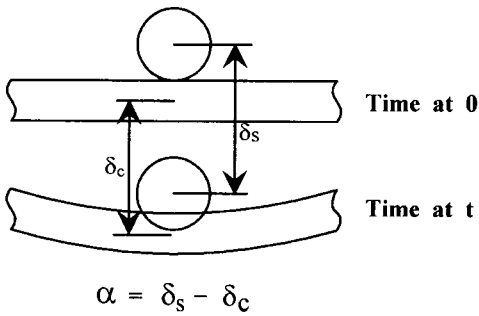


Fig. 3 Definition of the indentation depth

### 3.2 Explicit 시간 적분

시간  $t$  에서 소성을 고려한 판의 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{U}\}^t + [K_T]\{U\}^t = \{F\}^t \quad (7)$$

식 (7)의 미분방정식을 풀기 위하여 시간 영역에서 유한차분법을 사용한다. 시간 적분법으로는 Implicit 적분법과 Explicit 적분법이 있으나, 주어진 문제의 경우 강성행렬과 하중 벡터가 변위의 함수이므로 Implicit 적분법은 유용하지 못하므로 본 연구에서는 중앙 차분법을 결합한 Explicit 적분법을 적용하였다. 따라서 시간  $t$  에서 속도 및 가속도 벡터는 시간  $t + \Delta t$  에서 변위 벡터 향으로 다음 식으로 표현된다.

$$\{U\}^t = \frac{1}{2\Delta t} (\{U\}^{t+\Delta t} - \{U\}^{t-\Delta t}) \quad (8)$$

$$\{\ddot{U}\}^t = \frac{1}{\Delta t^2} (\{U\}^{t+\Delta t} - 2\{U\}^t + \{U\}^{t-\Delta t}) \quad (9)$$

식 (9)를 식 (7)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} [M] \right) \{U\}^{t+\Delta t} = \{\hat{F}\}^t \quad (10)$$

여기서,  $\{\hat{F}\}^t$ 는 유효 하중으로 다음 식으로 정의된다.

$$\{\hat{F}\}^t = \{F\}^t - [K_T]\{U\}^t + \frac{1}{\Delta t^2} [M] (2\{U\}^t - \{U\}^{t-\Delta t}) \quad (11)$$

질량 행렬로 대각 성분만이 존재하는 집중 질량 행렬을 사용하면 식 (10)은 다음과 같은 성분 관계 식으로 표현된다.

$$U_i^{t+\Delta t} = \hat{F}_i^t \left( \frac{\Delta t^2}{M_{ii}} \right) \quad (12)$$

식 (11)에서 탄소성 복원력을 의미하는 내력항 ( $[K_T]\{U\}^t$ )은 요소 내부의 응력과 증가하는 절점력  $\{F^e\}^t$ 들의 합으로 나타낼 수 있다.

$$[K_T]\{U\}^t = \sum_{e=1}^{N_e} \{F^e\}^t \quad (13)$$

여기서,  $N_e$ 은 요소의 개수이고, 요소 절점력  $\{F^e\}^t$ 은 다음 식으로부터 구한다.

$$\{F^e\}^t = \int_{V^e} [B]^T \{\sigma^e\}^t dV \quad (14)$$

여기서,  $[B]$ 는 변형률-변위 행렬이며  $\{\sigma^e\}^t$ 는 탄소성 요소의 응력 벡터이다.

Explicit 적분법에서 해가 수렴하기 위해서는 시간 증분량( $\Delta t$ )에 대해 다음 안정 조건식을 만족해야 한다.

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (15)$$

여기서,  $\omega_{\max}$ 는 요소의 최대 원 주파수이다.

### 3.3 증분 구성 관계식

Von Mises 항복 조건식과 등방성 경화 법칙을 만족하는 증분형 탄소성 응력-변형률 관계는 다음과 같다.<sup>(5)</sup>

탄성 영역 :  $\{d\sigma\} = [D]\{d\epsilon\}$

소성 영역 :

· 부하시  $\{d\sigma\} = [D_{ep}]\{d\epsilon\}$

· 제하시  $\{d\sigma\} = [D]\{d\epsilon\}$

(16)

### 3.4 접촉력의 계산

시간  $t + \Delta t$  에서 접촉력은 다음과 같다.

$$\delta_S \geq \delta_C :$$

$$\alpha^{t+\Delta t} = f^{t+\Delta t} (\chi_s + \chi_p) \{1 - \ln[f^{t+\Delta t} r (\chi_s + \chi_p)]\} \quad (17)$$

$$\delta_S < \delta_C : \quad 0 = f^{t+\Delta t}$$

식 (17)에서  $\chi_s$ ,  $\chi_p$ 와  $r$ 는 시간 불변 항이며,  $\alpha$ 는 시간에 따라 변한다. 시간  $t + \Delta t$ 에서 압입량( $\alpha$ )은  $\alpha^{t+\Delta t} = \delta_S^{t+\Delta t} - \delta_C^{t+\Delta t}$  로서 식 (5)와 같이 표현된다.

시간  $t + \Delta t$  에서의 판의 변위( $\delta_C^{t+\Delta t}$ )는 시간  $t$ 에서의 판의 운동방정식을 풀어 구한  $\{U\}^{t+\Delta t}$  로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\delta_C^{t+\Delta t} = -U^{t+\Delta t} \Big|_{at \frac{L}{2}, \frac{h}{2}} \quad (18)$$

여기서,  $\delta_S^{t+\Delta t}$ 는 충격체의 변위이다. 시간  $t$ 에서 시간  $t + \Delta t$ 까지 접촉하중이 선형적으로 변화한다고 가정하면 시간  $t + \Delta t$ 에서의 속도 및 변위는 다음 식으로 나타낼 수 있다.<sup>(2)</sup>

$$v^{t+\Delta t} = v^t - \frac{(f^t + f^{t+\Delta t})}{2m} \Delta t \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta_S^{t+\Delta t} &= \frac{1}{m} \int_0^{t+\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} f \, dt \, dt \\ &= \delta_S^t + v^t \Delta t - \frac{1}{6m} (2f^t + f^{t+\Delta t}) \Delta t^2 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,  $m$ 과  $v^t$ 는 각각 시간  $t$ 에서 충격체의 질량 및 속도이다.

식 (17)~(20)으로부터 충격체와 판의 변위를 고려한 접촉력은 다음 식으로부터 계산된다.

$$\begin{aligned} \delta_S \geq \delta_C : \\ 0 = f^{t+\Delta t} (\chi_s + \chi_p) \{1 - \ln[f^{t+\Delta t} r (\chi_s + \chi_p)]\} \\ - \delta_S^t - v^t \Delta t + \frac{1}{6m} (2f^t + f^{t+\Delta t}) \Delta t^2 + \delta_C^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\delta_S < \delta_C : \quad 0 = f^{t+\Delta t}$$

### 4. 수치해석 및 고찰

탄소성 저속충격 해석을 위한 알고리즘은 아래의 각 단계별로 수행된다.

#### 단계 1 초기화

판의 변위 및 응력 벡터와 충격체의 속도, 변위 및 접촉하중을 초기화 한다.

#### 단계 2 판의 변위 결정

시간  $t$ 에서의 판의 평형방정식을 풀고 시간  $t + \Delta t$ 에서의 판의 변위를 계산한다.

#### 단계 3 접촉력, 속도, 변위 및 응력 계산

식 (21)로 부터 시간  $t + \Delta t$ 에서 접촉력을 계산한 후, 식 (19)와 (20)으로부터 시간  $t + \Delta t$ 에서 충격체의 속도와 변위 및 응력을 계산한다.

#### 단계 4 시간 $t + \Delta t$ 에서의 결과 출력

해석시간 전체 구간 동안 단계 2에서 단계 4를 반복한다.

수치해석 예제로 사용된 유한요소 모델은 Fig. 4에서 보는 바와 같이 판의 경우 대칭 경계조건을 이용해 Plane Strain 요소로 1/2에 대해 모델링하였으며 충격체의 경우도 m/2의 질점에 f/2의 하중이 작용하도록 모델링하였다.

먼저 개발된 충격해석 프로그램의 검증을 위해 동일한 판 모델에 충격하중 대신 86.5kN의 사각 펄스하중을 주고 판의 중앙점의 변위 및 응력 결과에 대하여 범용 구조해석 프로그램인 ANSYS와 비교한 결과, Fig. 5, 6에서 보는 바와 같이 거의 일치함을 확인하였다.

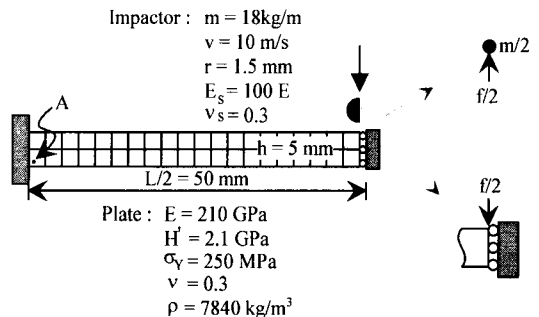


Fig. 4 Definition of the numerical model

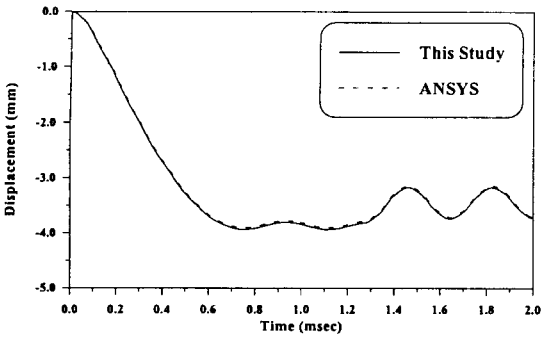


Fig. 5 Comparison of displacements with ANSYS

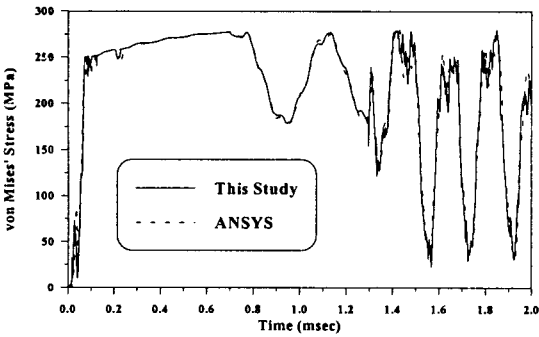


Fig. 6 Comparison of von Mises' stresses with ANSYS

본 연구에서 개발한 수치해석 프로그램에 의해 탄소성 유한요소 해석을 수행하고 탄성 해석 결과와 비교, 고찰하였다.

Fig. 7은 탄성 및 탄소성 경우에 대하여 시간에 따른 접촉력의 이력을 보여주고 있다. 탄성 거동의 경우 짧은 충격시간 동안 충격체와 판이 여러번 접촉하여 여러번의 극치(Peak value)를 보여주고 있다. 반면 탄소성 해석의 경우, 접촉 횟수 및 극치는 감소하고 접촉시간이 길어짐으로써 보다 현실적으로 나타났다.

Fig. 8은 판의 중앙부의 변위 이력을 보여주고 있다. 탄성 거동의 경우 접촉이 끝나면 원래 위치를 기준으로 진동하지만 탄소성 거동의 경우 영구 변형이 발생하여 원래 위치로 회복되지 않음을 알 수 있다.

Fig. 9는 판의 한 점(A)에서의 시간에 따른 von Mises 응력을 보여주고 있다. 탄성 해석의 경우, 최대치가 항복응력의 약 10배 만큼 큰 값을 갖는다. 이는 실제 현상과 다른 재료의 가탄성 상태에 있는

것이 명확하며 비현실적으로 볼 수 있다. 탄소성 해석의 경우 항복후 재료의 경화 거동을 보여주며 보다 현실적이다.

Table 1은 충격량, 최대 충격하중, 판의 최대 변위 및 접촉시간 등에 대한 소성의 영향을 보여주기 위해 수치값으로 제시하였다.

Table 2와 Fig. 10은 재료의 비선형성이 충격 현상에 미치는 영향을 고찰하기 위해 10kg인 충격체로 속도를 변화시키면서 충돌 전후의 충격체의 운동량(Momentum)과 충격하중의 시간 적분량인 충격량(Impulse)을 수치 계산하여 탄성 및 탄소성 해석과 비교한 결과이다. 판의 변위가 과도하면 기하학적 비선형성을 고려한 대변형 해석이 필요하므로 판의 최대 변위가 판 두께를 넘지 않는 범위에서 충격체의 속도를 변화시켰다. Fig. 10에서 보는 바와 같이 충격 해석시 미소변형의 범위에서도 재료의 비선형성의 영향이 크게 나타남을 알 수 있다.

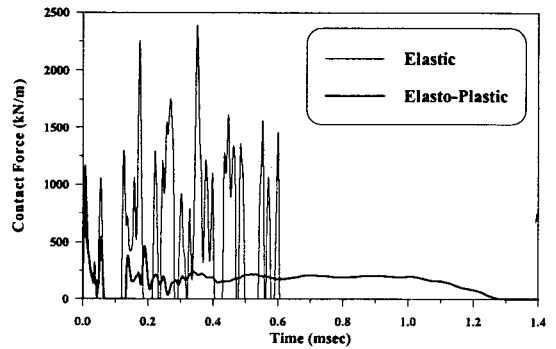


Fig. 7 Time history of contact force

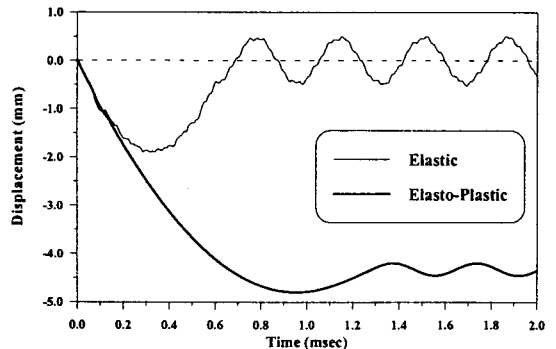


Fig. 8 Displacements of the center of the plate

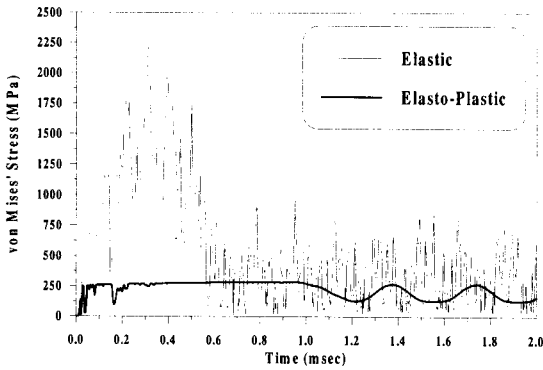


Fig. 9 Von Mises' stresses at the point A

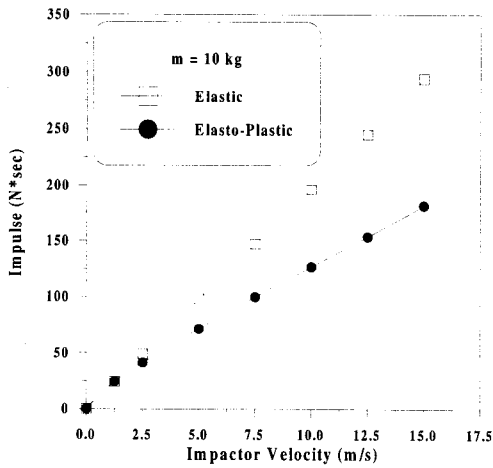


Fig. 10 Impulse for the various impactor velocities

Table 1 Plasticity effects on the impact problem

	Elastic	Elasto-Plastic	Ratio (EP/E)
Impulse (N*sec)	351.8	221.2	0.629
Max. Contact Load (kN)	2394	1106	0.462
Max. Displ. of the Plate (mm)	-1.903	-4.802	2.523
Contact Duration (msec)	0.605	1.279	2.114
Final Velocity of the Impactor (m/s)	-9.54	-2.29	0.240
Max. Effective Stress at the Point A (MPa)	2260	285.4	0.126

Table 2 Momentum and impulse for various impactor velocities (m=10kg)

Initial Velocity (m/s)	Initial Mom. (kg*m/s)	Elastic		Elasto-Plastic	
		Final Mom. (kg*m/s)	Impulse (N*sec)	Final Mom. (kg*m/s)	Impulse (N*sec)
1.25	12.5	-11.96	24.46	-11.96	24.46
2.5	25	-23.95	48.95	-16.15	41.15
5	50	-47.97	97.97	-21.23	71.23
7.5	75	-72.02	147.0	-24.72	99.72
10	100	-96.08	196.1	-26.65	126.7
12.5	125	-120.2	245.2	-28.45	153.4
15	150	-144.2	294.2	-31.45	181.5

### 5. 결론

본 연구에서는 충격체와 판의 운동방정식과 Herzian 접촉이론을 이용하여 저속 충격체에 의해 선하중을 받는 판의 탄소성 동적거동 해석을 위한 유한요소 프로그램을 개발하고 소성의 영향에 의한 판의 동적 거동을 알아보기 위해 사각평판에 대한 탄소성 수치해석을 수행하고 탄성해석과 비교한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 탄성거동의 경우 짧은 충격시간 동안 충격체와 판이 여러번의 접촉과 극치값을 갖는데 반해 탄소성 해석의 경우, 충격 초기에는 탄성해석과 유사하지만 시간이 경과함에 따라 충격하중이 일정하게 유지되고 충격체와 판이 여러번 접촉하는 현상도 사라진다.

(2) 저속충격시 탄소성 해석의 경우, 탄성 해석에 비해 충격량은 작아지고 변위는 증가하며 접촉시간이 길어지는 경향을 보임으로써 소성에 대한 영향이 두드러지게 나타났다.

(3) 판의 한 점에 대한 von Mises응력 비교 결과 탄성의 경우 응력 변동이 매우 심하고 최대응력이 항복응력 보다 매우 큰 과도한 값을 나타내는데 이는 실제 현상과는 크게 다른 재료의 가탄성 상태로 보이며, 탄소성 해석의 경우 항복이 일어난 후 응력이 조금씩 증가하는 현상을 보임으로써 실제 현상에 보다 가깝게 나타났다.

(4) 충격체의 속도를 변화시켜 가며 충돌 전후의 충격체의 운동량과 충격하중의 시간적분량인 충격량을 계산하여 탄성 및 탄소성 해석과 비교한 결과, 미소 변형의 범위에서도 재료 비선형성의 영향이 크게 나타남을 알 수 있으며 따라서 저속충격 해석시에도 판의 소성 영향에 대한 고려가 반드시 필요함을 확인하였다.

### 참고문헌

1. J.A.Zukas, T.Nicholas, H.F.Swift, L.B.Greszczuk & D.R. Curran, "Impact Dynamics," John Wiley & Sons, 1982.
2. H.Y. Choi, "Damage in Graphite/Epoxy Composites Due to Low Velocity Impact," the Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1990.
3. B.V. Sankar & C.T. Sun, "An Efficient Numerical Algorithm for Transverse Impact Problems," Computers & Structures, Vol. 20, pp. 1009-1012, 1985.
4. W. Goldsmith, "Impact," Edward Arnold, 1960.
5. D. R. J. Owen & E. Hinton, "Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice," Pineridge Press Limited, 1980.
6. K.J. Bathe, "Finite Element Procedures," Prentice-Hall, 1996.
7. T.M. Tan & C.T. Sun, "Use of Statical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, Mar. pp. 6-12, 1985.