한국정밀공학회지 제17권 제11호 (2000년 11월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 17, No. 11, November 2000.

길이 측정 센서를 이용한 병렬기구의 기하학적 오차 보정

최우천*, 임현규**

Calibration of Geometric Errors of a Parallel Manipulator Using a Sensor of Length Measurement

Woo Chun Choi*, Hyun Kyu Lim**

ABSTRACT

This paper proposes a method of geometric error calibration for a parallel device using only one sensor of length measurement without additional sensors. The concept is generalized which creates measurement residuals by exploring conflicting information provided with external length sensing. Although this calibration method requires many configurations, it has an advantage of using relatively simple length measurements. This method is shown to provide good calibration results, especially when there exist smaller measurement noises and more configurations are measured.

Key Words : Error Calibration (오차 보정), Parallel Device (병렬 장치), Geometric Error (기하학적 오차), Measurement Configuration (측정 형상), Length Measurement (길이 측정)

1. 서론

정밀도는 정밀기계에서 매우 중요한 요소이다. 오차 보정은 기계의 정밀도를 향상시키는데 그 목적이 있다. 기계의 오차는 기하학적인 오차와 비기하학적인 오차로 나눌 수 있다. 기하학적인 오차는 기구의 크기와 각각의 조인트 결합 위치의 오차로 생기는 오차를 말하며 비기하학적인 오차는 기구의 백래시(backlash), 정역학이나 동역학문제로 인한 변형에 의해 생긴 오차를 의미한다. 비기하학적인 오차는 기구학적으로 모델링을 하기가 매우 어렵기 때문에 보정하기도 어렵다. 반면에 기하학적인 오차는 기구학적인 모델링이 가능하고 실제 오차를 줄이는데 있어서도 실용적이고 경제적인 방법이다[1,2]. 기하학적 오차인 조인트의 위치 오차는 기구의 제작과 조립오차로 인해서 나타날 수 있는 오차이다. 본 연구에서는 조인트의 위치 등을 파라미터로 정의하고 이를 보정한다. 기구의 조인트의 위치가 정확하지 않으면, 기구를 의도한 위치와 자세로 정밀하게 제어할 수 없다.

기구의 보정은 직렬 기구와 병렬 기구의 보정으로 나눌 수 있다. 직렬기구의 보정은 미리 측정하여 알려진 위치를 이용하여 말단점을 이 점에 위치시켜 보정하는 방법이 일반적이고, 이 방법에는 카메라를 이용하는 방법[3], 말단점에 제한조건을 주어 폐루프를 구성하여 보정하는 방법[4] 등이 있다.

* 고려대학교 기계공학과
** 고려대학교 기계공학과 대학원

병렬기구 보정에는 말단점의 위치와 자세를 측정하는 방법[1,2,5]과 위치를 측정하는 방법[6], 기구 내부의 센서를 부착하여 보정하는 방법[7,8] 등이 있다. 이러한 방법들은 다수의 센서를 기구에 부착하여 보정을 수행하는 것이다.

본 연구에서는 다수의 센서를 사용하는 타 연구와 달리 외부에 1개의 길이측정 센서만을 이용하여, 기하학적인 오차를 보정하는 알고리즘을 제시하고 모의 실험을 하여 타당성을 검증한다. 길이 측정은 측정기가 다양하므로 적용하기 쉽고 정밀하게 측정할 수 있으며 측정오차도 1개만 고려하면 된다는 장점이 있다. 본 논문에서는 기구학적인 해석을 통해 조인트의 위치를 실제 위치로 추정할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

2. 병렬기구에서의 기구학 해석

2.1 역기구학

역기구학은 기구의 위치와 자세가 정해지면 i번째 링크에 대해 다음 식으로 구할 수 있다.

$$q_i = t + Rp_i - b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 6) \tag{1}$$

여기서, q_i는 링크 벡터, p_i는 플랫폼의 조인트 부착위치, b_i는 베이스의 조인트 부착위치, t는 위치를 나타내는 3×1행렬이고, R은 베이스에서 본 플랫폼의 자세를 나타내는 3×3행렬이다.

2.2 순기구학

순기구학은 각 링크의 길이가 주어졌을 때 기준 좌표계에서 플랫폼의 위치와 자세를 구하는 것이다. 일반적인 병렬기구에서 순기구학 해는 유일하게 결정되지 않고 또한 완전해가 존재하지 않는다.

본 연구에서는 순기구학 해를 구하기 위해서 스크류 좌표를 도입해서 속도 기구학을 쉽게 정의하고 가속도, 속도, 토크, 그리고 변위 해석을 할 수 있는 방법을 사용하였다.[9,10] Fig. 1은 링크열의 모델링을 보여준다. 각각의 링크열을 1자유도의 요소로 분리한다. 본 논문에서 고려하는 6 자유도의 병렬기구에서 출력링크의 속도를 스크류 좌표를 이용하여 i번째 링크에 대해 첫 번째 체인과 나머지 체인에 대해 다음 식을 쓸 수 있다.

$$S = \dot{\theta}_1^i M_1^i + \dot{\theta}_2^i M_2^i + \dot{\theta}_3^i M_3^i + \dot{\theta}_4^i M_4^i + \dot{\theta}_5^i M_5^i + \dot{\theta}_6^i M_6^i$$

$$i = 2, 3, \ldots, 6 \tag{2}$$

$$\dot{\theta}_1^1 M_1^1 + \dot{\theta}_2^1 M_2^1 + \dot{\theta}_3^1 M_3^1 + \dot{\theta}_4^1 M_4^1 + \dot{\theta}_5^1 M_5^1 + \dot{\theta}_6^1 M_6^1$$
$$- \dot{\theta}_1^i M_1^i + \dot{\theta}_2^i M_2^i + \dot{\theta}_3^i M_3^i + \dot{\theta}_4^i M_4^i + \dot{\theta}_5^i M_5^i + \dot{\theta}_6^i M_6^i = 0$$

$$i = 2, 3, \ldots, 6 \tag{3}$$

여기서 S는 출력링크의 속도, θ는 조인트의 속도, M은 조인트의 위치를 각각 나타내며 상첨자는 링크, 하첨자는 조인트를 나타낸다. 식(2)와 (3)에서 능동조인트 $\boldsymbol{a}$와 수동조인트 $\boldsymbol{b}$를 분리하여 쓰면 다음과 같다.

$$A\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{b} = S \tag{4}$$

$$C\boldsymbol{a} + D\boldsymbol{b} = 0 \tag{5}$$

여기서, A는 6×6행렬, B는 $6\times 6\cdot(6-1)$ 행렬, C는 $6\cdot(6-1)\times 6$ 행렬, D는 $6\cdot(6-1)\times 6\cdot(6-1)$ 행렬이 된다. 수동 조인트 $\boldsymbol{b}$에 관한 항을 소거시켜 다음과 같이 자코비안 행렬을 만들 수 있다.

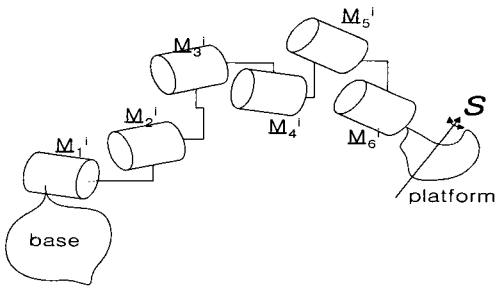


Fig. 1 i th link train model.

$$J = A - BD^{-1}C \tag{6}$$

$J\boldsymbol{a} = S$ 인 능동 조인트 식을 이용해서 속도 기구학과 역속도 기구학을 해석할 수 있다.

순기구학 문제에서는 일반적으로 완전해를 구할 수 없으므로 Newton-Raphson 방법을 사용하여 수치해석으로 구한다. 병렬 기구에서는 역기구학 해를 구하기 쉬우므로, 본 연구에서는 초기 조건을 주고, 앞에서 제시한 속도 기구학 식을 이용하여 반복 계산하여 해에 접근하는 방법을 사용한다.

기구의 위치와 자세는 다음과 같이 4×4 동차 변환 행렬을 통해 표시된다.

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{p} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기서, **p**는 베이스에서 플랫폼까지의 위치를 나타내는 벡터이고, **x,y,z**는 축 방향으로의 단위 벡터이며 회전 행렬을 의미한다.

위치와 자세가 주어지면 역기구학을 이용하여 다음과 같이 조인트 변위를 구할 수 있다.

$$\theta = f(T) \tag{8}$$

병렬기구에서 순기구학 해를 구하는 것은 능동 조인트의 변위값이 주어질 때 기구의 위치와 자세를 구하는 것으로, 능동 조인트의 변위를 다음과 같이 정의한다.

$$\theta = \theta_f \tag{9}$$

구하려는 위치와 자세, T_f를 구하기 위해, 초기 조건을 T_0라 하고, 이에 해당하는 초기 조인트 변위를 θ_0라 놓으면 다음의 관계가 성립한다.

$$\theta_0 = f(T_0) \tag{10}$$

θ_f와 θ_0 사이에 차이가 존재하므로, 능동 조인트 속도를 다음 식으로 나타낸다.

$$\dot{\theta} = \boldsymbol{a} = k(\theta_f - \theta_0) \tag{11}$$

능동 조인트의 속도 $\boldsymbol{a}$가 주어지면 속도 기구학 해석에 의해서 $J\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}$로부터 플랫폼의 속도를 구할 수 있고, θ_f와 θ_0사이의 차이를 줄이기 위해 주어진 속도 $\boldsymbol{S}$로 플랫폼의 방향을 결정하여 다음 단계의 플랫폼의 형상을 추정한다. 식(11)에서 k는 수렴속도를 지배하는 인자로서 지나치게 적으면 수렴이 느리고, 지나치게 크면 발산할 가능성이 크므로 시행착오 방식으로 적절한 값을 선택한다. 이러한 방법으로 다시 θ_0를 구하고, θ_f와 θ_0의 값으로 반복적으로 속도를 구하여 θ_0가 θ_f로 수렴될 때까지 연산을 수행하면 T_f값을 구할 수 있다.

n번째 단계에서의 위치와 자세를 T_n, 그리고 n+1번째 단계에서의 위치와 자세를 T_{n+1}이라고 하면 T_n은 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$T_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{p_n} & \mathbf{x_n} & \mathbf{y_n} & \mathbf{z_n} \end{bmatrix} \tag{12}$$

그리고 스크류 벡터를 구분자로 나누어 쓰면, $\boldsymbol{S}$는 다음과 같이 표시된다.

$$\boldsymbol{S} = \dot{\theta}\mathbf{s} + \varepsilon\dot{\theta}\mathbf{s_0} \tag{13}$$

회전 속도 **w**와 병진 속도 **v**는 다음 식과 같다.

$$\mathbf{w} = \dot{\theta}\mathbf{s} \tag{14}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\theta}\mathbf{s_0} - \mathbf{p_0} \times \dot{\theta}\mathbf{s} \tag{15}$$

플랫폼이 회전 속도 **w**와 병진 속도 **v**로 t 시간 동안 움직인다고 하면, 그 동안의 선형적인 위치와 자세의 변화는 다음 식으로 표시된다.

$$T_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{vt} & R \end{bmatrix} T_n \tag{16}$$

여기서

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cos wt + (1-\cos wt)\,\boldsymbol{ss'} + \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}\sin wt \tag{17}$$

$$w=|\mathbf{w}|,\ \mathbf{s}=\{s_x s_y s_z\}^T=\mathbf{w}/w \tag{18}$$

가 된다. 위의 반복계산에서 t, k 값을 적절히 선택하여 수렴시킨다. 이 방법은 주어진 초기 조건에 대해 하나의 해로 수렴한다는 장점을 갖고 있다.

3. 병렬 기구의 보정

3.1 오차 모델 및 비용 함수

능동 조인트의 길이를 $\boldsymbol{q}$, 보정되지 않은 파라미터의 값들을 $\boldsymbol{pr}_{ini}$라고 하면 순기구학 해를 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$f_{for}(\boldsymbol{pr}_{ini}, \boldsymbol{q})=T_r \tag{19}$$

여기서 T_r은 4×4 동차행렬이다. 이 값은 보정되지 않은 파라미터 값을 이용하여 구하였으므로 실제의 위치와 자세인 T와는 오차가 있다. T_r이 주어지면 역기구학으로 센서로 측정할 길이를 계산할 수 있다.

$$f_{inv}(T_r)=l_c \tag{20}$$

파라미터와 링크의 길이로부터 센서로 측정할 길이를 구하는 함수를 f_c라고 하고, 실제 파라미터의 값인 $\boldsymbol{pr}$과 링크의 길이 $\boldsymbol{q}$가 주어지면 길이값은 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$l=f_c(\boldsymbol{pr}, \boldsymbol{q}) \tag{21}$$

$\boldsymbol{pr}$의 변화가 충분히 작다면, 링크의 길이 계산값은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} l_c=f_c(\boldsymbol{pr}_{ini}, \boldsymbol{q})&=f_c(\boldsymbol{pr}+\mathrm{d}\,\boldsymbol{pr}, \boldsymbol{q}) \\ &\cong f_c(\boldsymbol{pr}, \boldsymbol{q})+J_a \mathrm{d}\,\boldsymbol{pr} \end{aligned} \tag{22}$$

길이센서로 측정한 길이값과 계산된 값의 차이를 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{err}\equiv l_c-l=J_a\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{pr} \tag{23}$$

식(23)는 j번째 측정 형상에 관해서 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} l_{c,j}-l_{,j}=&\frac{\partial l_{c,j}}{\partial pr_0}\triangle pr_0+\frac{\partial l_{c,j}}{\partial pr_1}\triangle pr_1 \\ &+\cdots+\frac{\partial l_{c,j}}{\partial pr_n}\triangle pr_n \end{aligned} \tag{24}$$

여기서, 하첨자 j는 j번째 측정형상을 나타내고 0,1…n은 파라미터의 수를 의미한다. m번의 측정을 하면 다음과 같은 자코비안을 구한다.

$$[J_a]=\begin{bmatrix} \frac{\partial l_{c,1}}{\partial pr_0} & \frac{\partial l_{c,1}}{\partial pr_1} & \cdots & \frac{\partial l_{c,1}}{\partial pr_n} \\ \frac{\partial l_{c,2}}{\partial pr_0} & \frac{\partial l_{c,2}}{\partial pr_1} & \cdots & \frac{\partial l_{c,2}}{\partial pr_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial l_{c,m}}{\partial pr_0} & \frac{\partial l_{c,m}}{\partial pr_1} & \cdots & \frac{\partial l_{c,m}}{\partial pr_n} \end{bmatrix} \tag{25}$$

최소 자승 추정법을 사용하기 위해서 측정회수 m은 파라미터의 개수 n보다 커야 한다. 함수 f_c가 국소적으로 선형이라는 가정을 사용하므로, 식(24)에서 최소 자승법을 적용시키면, 다음 식으로 구한 $d\,\boldsymbol{pr}$값을 이용하여 $\boldsymbol{pr}$값을 갱신시켜 정확한 값으로 수렴시키게 된다.

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{pr}=(J_a^T\cdot J_a)^{-1}\cdot J_a^T\cdot \boldsymbol{err} \tag{26}$$

이 때 비용함수는 다음과 같이 정의한다.

$$C=\sum(l_{,j}-l_{c,j})^2 \tag{27}$$

파라미터 값이 실제 값에 가까워질수록 비용함수 값은 작아진다. 비용함수가 충분히 적은 값으로 수렴할 때까지 반복계산 한다.

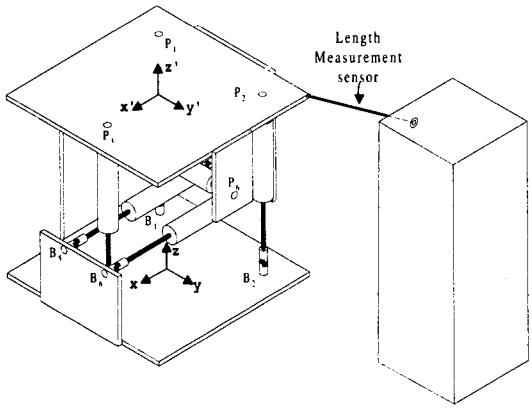


Fig. 2 Cubic parallel manipulator & Measurement configuration

4. 모의 실험

본 연구에서는 실제 파라미터 값을 가정하고, 파라미터에 임의의 오차를 주고 모의 실험을 통해 알고리즘의 타당성을 검증하였다. 본 연구에서 고려하고 있는 병렬형 기구는 Fig. 2와 같다. 이 병렬형 기구는 6면형 모양으로 일반적인 스튜어트 플랫폼과는 형상이 다르며 중립위치에서 x,y,z 축 방향으로 길이 변환이 선형적이라는 장점이 있다. 길이 측정 센서 1개를 그림과 같이 외부에 부착한다.

본 모의 실험에서 각각의 측정 형상은 초기 링크길이에서 [-20,20] (mm)사이 값을 임의로 선택하였다. 그리고 파라미터의 오차로는 [-5,5] (mm) 사이의 값이 임의로 선택되도록 프로그램 하였다.

4.1 파라미터의 결정

Fig. 2에서 보는 육면형 병렬 기구의 조인트와 센서의 위치는 Table 1과 같다. 베이스와 플랫폼 조인트 위치 중에 1,2,3번 링크는 이들 링크가 연결된 조인트는 강체라고 볼 수 있는 베이스나 플랫폼의 평면 상에 놓이나 4,5,6번 경우는 베이스나 플랫폼에 수직으로 연결된 평면에 위치하므로 1,2,3번에 비해 위치를 정확히 측정하기 어렵고 위치가 변화될 가능성이 크다. 1,2,3번 링크의 x,y 좌표는 정확히 알고 있다고 가정하였다. 나머지 보정해야 할 파라미터는 Table 1에서 굵은 선으로 표시된 부분이다. 따라서 파라미터는 $b_{i(x,y,z)}, p_{i(x,y,z)}$ i=4,5,6이 되고, $b_{i(z)}, p_{i,(z)}$ i=1,2,3 이 되고, 총 파라미터의 수는 $3\times3\times2+1\times3\times2=24$가 된다.

Table 1 Nominal values of the parameters.

	base 좌표계 (mm)			platform좌표계(mm)		
링크	x	y	z	x'	y'	z'
1	-140	-140	28	-140	-140	-28
2	-140	140	28	-140	140	-28
3	140	0	28	140	0	-28
4	177	70	130	-177	70	-280
5	177	-70	130	-177	-70	-280
6	0	-205	280	0	177	-140
센서	-200	500	500	-200	205	-5

4.2 위치 오차와 자세 오차

모의 실험에서 나타난 위치 오차는 실제 위치와 보정된 위치의 차이에 해당하는 벡터의 크기이다. 자세 오차는 $R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$에서 각도 (α,β,γ)오차의 크기 값을 사용하여 다음과 같이 정의하였다.

$$R_{error}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \tag{28}$$

4.3 모의 실험 결과

본 연구에서는 1개의 길이측정 센서만을 이용하였기 때문에 길이측정 센서에만 측정오차를 적용하였다. Table 2에서 측정오차는 측정단계에서 생길 수 있는 노이즈를 고려한 것이고 측정회수는 측정형상을 달리해서 측정한 회수를 말한다. Case 1은 측정오차가 없을 때이고, Case 2 는 측정오차를 ±0.00125(mm) 적용한 경우이며 Case 3은 Case 2에 측정회수를 10회 늘린 경우이다. 그리고 Case 4,5 는 각각 측정오차를 10배 늘리고, 측정회수를 늘린 경우이다. Fig. 3,4에서 Case 1은 기준이 되므로 다른 결과와 비교를 위해 같이 표시하였다.

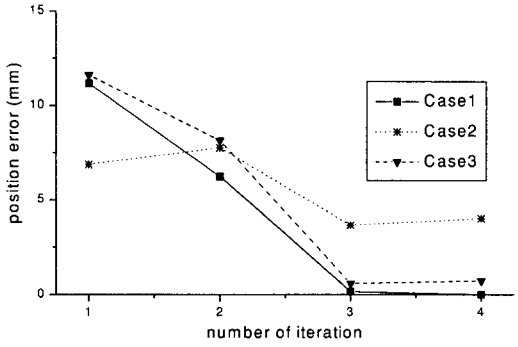
Table 2 Measurement noise levels.

	측정오차	측정회수
Case 1	[-0.00000 0.00000] (mm)	30
Case 2	[-0.00125 0.00125] (mm)	30
Case 3	[-0.00125 0.00125] (mm)	40
Case 4	[-0.0125 0.0125] (mm)	40
Case 5	[-0.0125 0.0125] (mm)	60

Fig. 3은 Case 1,2,3 에 대한 자세 오차와 위치오차가 반복계산 회수에 따라 변화하는 것을 보여준다. 반복계산을 함에 따라 비용함수 값이 작아지고 정확한 파라미터 값으로 접근하기 때문에 오차가 줄어드는 것을 알 수 있다. 이 그림에서 초기 오차가 각각 다른 것은 임의의 오차를 주었기 때문이다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 같은 측정오차라도 측정회수가 커야 보정이 정확하게 됨을 알 수 있다.

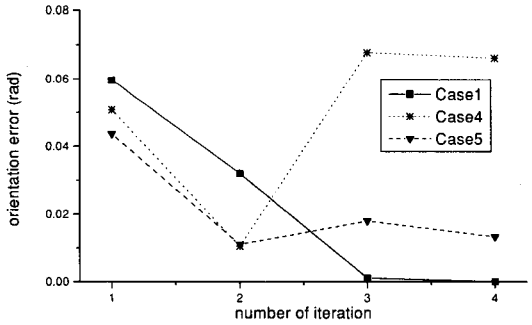
Fig. 4는 측정오차가 더 큰 경우를 보여준다. 이 그림에서 Case 3에서는 40 회의 측정회수 만으로도 보정이 잘 되나, 측정오차가 더 큰 Case 4에서는 보정이 잘 이루어지지 않음을 볼 수 있다. 그러나 측정회수를 60회로 늘여 모의 실험하면 40회 측정결과보다 좋은 결과를 얻을 수 있다.

Fig. 3 과 Fig. 4의 결과로부터 단 하나의 길이 측정 센서를 이용해도 오차 보정을 할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 측정오차가 적을수록 또한 측정회수가 많을수록 좋은 보정결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

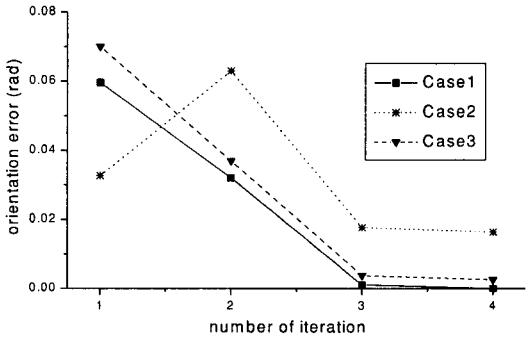


(b) position error

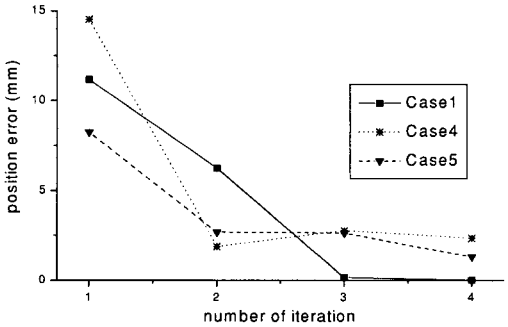
Fig. 3 Orientation and position errors for measurement errors of ±0.00125mm.



(a) orientation error



(a) orientation error



(b) position error

Fig. 4 Orientation and position errors for measurement errors of ±0.0125mm

5. 결론

지금까지 발표된 병렬기구의 오차 보정 연구에는 다수의 센서를 채용하여 보정하는 연구가 대부분이었다. 그러나 본 연구에서는 타 연구와 달리 1개의 길이측정 센서를 이용하여 기하학적인 파라미터 값을 보정할 수 있는 알고리즘을 제시하였다. 비교적 쉬운 길이 측정만을 가지고 보정하기 때문에 센서의 부착이 쉽고 또한 센서의 부착만으로 형상의 변화에 따라 측정길이가 변하여 자동으로 측정이 가능하다. 또한, 다수의 센서를 사용하는 경우 센서를 독립적으로 부착해야 하는 어려움과 여러가지 측정오차가 생기지 않는다. 이점이 본 연구의 중요한 점이다. 단점으로는 1개의 길이 측정센서만을 사용하기 때문에 측정 회수는 많이 필요하다는 점이 있다. 본 연구에서 모의실험을 통하여, 1개의 길이 측정 센서만으로도 오차 보정이 가능함을 확인하였고, 측정오차가 작을수록, 측정회수가 많을수록 좋은 보정결과를 얻을 수 있음을 보였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초(과제번호: 1999-1-304-003-3)에 의해 지원을 받아 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

1. H. Zhuang, J. Yan, and O. Masory, "Calibration of Stewart Platforms and Other Parallel Manipulators by Minimizing Inverse Kinematic Residuals," Journal of Robotic Systems, Vol. 15, No. 7, pp. 395-405, 1998.
2. J. Wang, and O. Masory, "On the Accuracy of a Stewart Platform - Part II The Effect of Manufacturing Tolerances," Proceed. IEEE Int. Conf. on Robot. Automat., pp. 725-731, 1993.
3. H. Zhuang, Z. S. Roth, "Camera-Aided Robot Calibration," CRC press, 1996.
4. D. Bennet and J. M. Hollerbach, "Autonomous calibration of single loop closed kinematic chains formed by manipulators with passive endpoint constraints," IEEE Trans. Robot. Automat., Vol. 7, pp. 597-606, 1991.
5. 김봉진, 최용제, "스튜어트 플랫폼형 공작기계의 기구학적 보정에 관한 연구," 대한기계학회 1999 춘계학술대회논문집 A, pp. 128-133, 1999.
6. 전진철, 이선규, "6-PRRS 병렬형 기계의 오차해석 및 교정에 관한 연구," 한국정밀공학회 1999 추계학술대회논문집 I, pp. 239-242, 1999.
7. H. Zhuang, "Self-Calibration of Parallel Mechanism with a Case Study on Stewart Platforms," IEEE Trans. Robot. Automat., Vol. 13 , No. 3, pp. 387-397, 1997.
8. H. Zhuang, L. Liu, "Self-Calibration of Parallel manipulators," IEEE Trans. Int. Conf. Robot. and Automat., pp. 994-999, Apr., 1996.
9. M. G. Mohamed and J. Duffy, "A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators," Trans. of the ASME , Vol. 107, 1985.
10. K. Sugimoto, "Kinematic and Dynamic Analysis of Parallel Manipulators by Means of Motor Algebra," J. of Mech. Trans. Automat. in Design, Vol. 109, No. 3, 1987.