

비틀림하의 복합원통에 있는 원주표면균열에 대한 응력확대계수

김영종*

Stress Intensity Factors for the Circumferential Surface Crack of a Long Composite Cylinder under Torsion

Y. J. Kim*

ABSTRACT

Stress intensity factors for the circumferential surface crack of a long composite cylinder under torsion is investigated. The problem is formulated as a singular integral equation of the first kind with a Cauchy type kernel using the integral transform technique. The mode III stress intensity factors at the crack tips are presented when (a) the inner crack tip is away from the interface and (b) the inner crack tip is at the interface.

Key Words : Stress intensity factor (응력확대계수), Interface crack (계면균열), Integral transform technique (적분변환기법), Torsion loading(비틀림 하중)

1. 서론

인장 및 비틀림하에서 원형 균열 및 환형균열을 가진 탄성체문제는 많은 연구자에 의하여 연구되어 왔다^[1-4]. 최근 인장 및 비틀림하에서 계면 주위에 환형균열이 존재할 때 탄성 매체에 완전 접합된 탄성 파이버의 축 대칭 문제가 연구되었다^[7-10]. 축 대칭 균열을 포함한 탄성문제의 경우 적분 변환법을 사용하여 경계값 문제를 적분방정식의 해로 변환하여 해를 구하였다^[1, 4, 10]. 이러한 적분 변환법의 복합원통 주위의 원주방향의 표면균열을 취급하는 인장 및 비틀림 문제에 대한 응용은 아직 이루어 지지 않았다.

본 논문에서는 비틀림하에서 안쪽 원통과 완전 접합된 바깥원통의 계면 주위의 복합원통 주위의 원주방향의 표면균열이 존재할 때 균열에 대한 계면의 영향에 대하여 연구하였다(Fig. 1). 이 문제는 적분변환에 의하여 수식화 하였으며 특이적분

방정식으로 표현하였다. 그 결과방정식을 관련 물리량 및 모드 III 응력확대계수를 구하기 위하여 Erdogan 등^[11]이 제안한 수치해법을 사용하여 해를 구하였다. 균열 끝단의 모드 III 응력확대계수를 안쪽 균열 끝단이 계면에서 떨어진 경우와 안쪽 균열 끝단이 계면에 있는 경우에 대하여 구하였다.

2. 적분방정식의 유도

반경이 a 인 탄성 원통이 계면 주위의 $z = 0$ 인 평면에 원주방향의 표면균열을 가진 바깥원통에 완전 접합되어 있다. Fig.1에서와 같이 z 는 원통의 동심축이며 양쪽으로 무한하다고 가정하였다. 원주방향의 표면균열의 안쪽 끝단의 반경은 b 이다. 본 논문에서는 균열면이 다음과 같이 축 대칭 비틀림 하중을 받는다고 가정하였다.

* 상주대학교 기계공학부

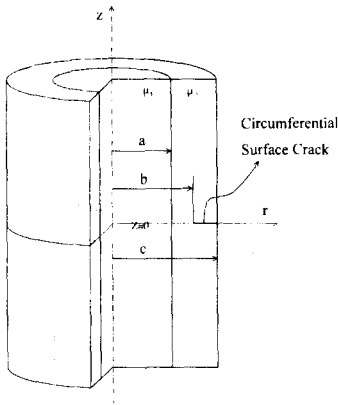


Fig. 1 A circumferential surface crack in the composite cylinder.

$$\sigma_{\alpha}(r,0) = -p(r), \quad b < r < c \quad (1)$$

여기서 $p(r)$ 은 비틀림 하중의 분포를 나타내는 함수이다. 안쪽 및 바깥 원통의 변위 벡터의 θ 성분 $u_{\theta}^i(r,z)$ ($i=1,2$)이 유일한 미지의 함수이며 다음의 미분 방정식을 만족한다:

$$\frac{\partial^2 u_{\theta}^i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^i}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^i}{r^2} + \frac{\partial^2 u_{\theta}^i}{\partial z^2} = 0, \quad i=1,2 \quad (2)$$

여기서 $i=1$ 및 $i=2$ 는 각각 안쪽 및 바깥 원통의 구역을 나타낸다.

안쪽 및 바깥 원통에서의 응력 텐서 중 존재하는 성분은 다음과 같다.

$$\sigma_{\alpha\alpha}^i(r,z) = \mu_i \frac{\partial u_{\theta}^i}{\partial z} \quad (3)$$

$$\sigma_{r\theta}^i(r,z) = \mu_i \left(\frac{\partial u_{\theta}^i}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^i}{r} \right) \quad (4)$$

여기서 μ_1 및 μ_2 는 각각 안쪽 및 바깥 원통의 전단계수이다. $z=0$ 은 대칭면이기 때문에 반무한 영역 ($z \geq 0$)만을 고려하였다. Keer 등의 방법¹⁶⁾에 따라서 안쪽 및 바깥 원통에 대한 (2)의 해는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$u_{\theta}^1(r,z) = \int_0^{\infty} A_1(s) e^{-sz} J_1(rs) ds + \quad (5)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{f_1(s)I_1(rs) + f_2(s)K_1(rs)\} \sin zs ds$$

$$u_{\theta}^2(r,z) = \int_0^{\infty} A_2(s) e^{-sz} J_1(rs) ds + \quad (6)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{f_3(s)I_1(rs) + f_4(s)K_1(rs)\} \sin zs ds$$

여기서 $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$, $f_4(s)$, $A_1(s)$ 및 $A_2(s)$ 는 미지수이며, $J_n(\cdot)$ 은 n 차의 제 1종 베셀함수이고 $I_n(\cdot)$ 및 $K_n(\cdot)$ 는 각각 n 차의 제 1종 및 제 2종의 수정 베셀함수이다. 식(3) 과 (4)로부터 관련응력성분은 다음과 같다.

$$\sigma_{\alpha\alpha}^1(r,z) = \mu_1 \left[\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} s A_1(s) e^{-sz} J_1(rs) ds + \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_1(s)I_1(rs) + f_2(s)K_1(rs)\} \cos zs ds \end{aligned} \right] \quad (7)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^2(r,z) = \mu_2 \left[\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} s A_2(s) e^{-sz} J_1(rs) ds + \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_3(s)I_1(rs) + f_4(s)K_1(rs)\} \cos zs ds \end{aligned} \right] \quad (8)$$

$$\sigma_{r\theta}^1(r,z) = \mu_1 \left[\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} s A_1(s) e^{-sz} J_2(rs) ds + \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_1(s)I_2(rs) - f_2(s)K_2(rs)\} \sin zs ds \end{aligned} \right] \quad (9)$$

$$\sigma_{r\theta}^2(r,z) = \mu_2 \left[\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} s A_2(s) e^{-sz} J_2(rs) ds + \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_3(s)I_2(rs) - f_4(s)K_2(rs)\} \sin zs ds \end{aligned} \right] \quad (10)$$

Fig. 1에 보인 균열문제에서, 안쪽 및 바깥 원통사이의 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{r\theta}^1(a,z) = \sigma_{r\theta}^2(a,z), \quad (11)$$

$$u_{\theta}^1(a,z) = u_{\theta}^2(a,z),$$

$$\sigma_{r\theta}^2(c,z) = 0$$

반면, $z=0$ 평면은 다음조건을 가진다.

$$\sigma_{\alpha\alpha}^2(r,0) = -p(r), \quad b < r < c \quad (12)$$

$$u_{\theta}^1(r,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (13)$$

$$u_{\theta}^2(r,0) = 0, \quad a \leq r \leq b$$

식(5) 와 (13)으로부터, $A_1(s) = 0$ 이며 $r=0$ 에서 일반성의 조건을 만족하려면 $f_1(s) = 0$ 이다. 경계 조건 (11)은 $f_1(s)$, $f_3(s)$, $f_4(s)$ 및 $f_2(s)$ 를 소

거하는 데 사용할 수 있으며 혼합경계조건 (12) 와 (13)은 미지수에 대한 이중적분방정식을 구하는 데 사용할 수 있다. 따라서, 식(5), (6), (9) 및 (10)을 사용하면, 경계조건 (11)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mu_1 \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_1(s)I_2(as) - f_2(s)K_2(as)\} \sin z s ds - \left[- \int_0^{\infty} s A_1(s) e^{-z} J_1(as) ds - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_1(s)I_2(as) - f_2(s)K_2(as)\} \sin z s ds \right] \quad (14)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_1(s)I_1(as) + f_2(s)K_1(as)\} \sin z s ds = \int_0^{\infty} A_2(s) e^{-z} J_1(as) ds + \quad (15)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_3(s)I_1(as) + f_4(s)K_1(as)\} \sin z s ds - \int_0^{\infty} s A_3(s) e^{-z} J_2(cs) ds - \quad (16)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \{f_1(s)I_2(cs) - f_2(s)K_2(cs)\} \sin z s ds = 0$$

이제, 이들 세 방정식에 주어진 $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ 및 $f_4(s)$ 를 식(12)에 대입하여 미지수 $A_i(s)$ 에 대한 이중적분방정식을 구하는 대신, 이 문제를 다음과 같은 새로운 미지수의 항으로 표현된 특이적분방정식[6]으로 표현할 수 있다.

$$G(r) = r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} u_0^2(r, 0) \right\}, \quad b < r < c \quad (17)$$

식(6)으로부터,

$$G(r) = - \int_0^{\infty} s A_2(s) J_2(rs) ds \quad (18)$$

식(6), (13), (15) 및 (16)으로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$A_2(s) = - \int_b^c t G(t) J_2(st) dt \quad (19)$$

식(14), (15) 와 (16)에 푸리에 쌍인변환을 시키고, Erdelyi^[12]의 공식을 사용하면 아직 결정되지 않은 함수 $G(t)$ 의 항으로 된 미지함수 $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ 및 $f_4(s)$ 에 대한 다음과 같은 연립방정식

을 유도할 수 있다.

$$m \{f_1(s)I_2(bs) - f_2(s)K_2(bs)\} - f_3(s)I_2(bs) + f_4(s)K_2(bs) \quad (20)$$

$$= \int_b^c t G(t) I_2(bs) K_2(st) dt$$

$$f_1(s)I_1(bs) + f_2(s)K_1(bs) - f_3(s)I_1(bs) - f_4(s)K_1(bs) \quad (21)$$

$$= \int_b^c t G(t) I_1(as) K_1(st) dt$$

$$-f_3(s)I_2(cs) + f_4(s)K_2(cs) = \int_b^c t G(t) K_2(as) I_2(st) dt \quad (22)$$

여기서 $m = \mu_1 / \mu_2$ 이다. 식 (20), (21), (22)를 풀면, $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ 및 $f_4(s)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f_i(s) = \int_b^c t G(t) \sum_{j=1}^4 \frac{A_{ij}(s) h_j(s, t)}{\Delta(s)} dt \quad (23)$$

$$h_1(s, t) = 0,$$

$$h_2(s, t) = I_2(bs) K_2(st), \quad (24)$$

$$h_3(s, t) = I_1(bs) K_2(st),$$

$$h_4(s, t) = K_2(cs) I_2(st)$$

여기서 $\Delta(s)$ 는 행렬식이며 $A_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$)는 식(20)-(22)의 계수행렬에 대한 여인자의 해당요소들이다. 식 (8), (12) 및 (23)으로부터, $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ 및 $f_4(s)$ 를 치환하면 다음과 같은 적분방정식이 얻어진다:

$$\int_b^c \left[\frac{1}{t-r} + k(r, t) \right] G(t) dt = - \frac{\pi p(r)}{\mu_2}, \quad b < t < c \quad (25)$$

여기서 $k(r, t)$ 는 다음과 같다.

$$k(r, t) = k_1(r, t) + 2tk_2(r, t) \quad (26)$$

$$k_1(r, t) = \frac{m(r, t) - 1}{t - r} + \frac{m(r, t)}{t + r} \quad (27)$$

$$m(r, t) = \begin{cases} \frac{2(t^2 - r^2)}{rt} [K(r/t) - E(r/t)] + \frac{t}{r} E(r/t) - \frac{t^2 - r^2}{tr} K(r/t), & r < t \\ \frac{2(t^2 - r^2)}{t^2} [K(t/r) - E(t/r)] + E(t/r), & r < t \end{cases} \quad (28)$$

$$k_2(r, t) = \int_0^{\infty} \bar{k}_2(r, t, s) ds \quad (29)$$

$$\bar{k}_i(r, t, s) = s \left\{ \begin{array}{l} I_1(rs) \sum_{j=1}^n \frac{A_{1j}(s)h_j(s, t)}{\Delta(s)} + \\ K_1(rs) \sum_{j=1}^n \frac{A_{2j}(s)h_j(s, t)}{\Delta(s)} \end{array} \right\} \quad (30)$$

$$\tau_i = \cos\left(\pi \frac{2i}{2n+1}\right), \quad i=1, \dots, n$$

$$\rho_j = \cos\left(\pi \frac{2j-1}{2n+1}\right), \quad j=1, \dots, n \text{ 이다.}$$

여기서 K 와 E 는 각각 제1종 및 제2종 완전타원 적분이다. 본 논문에서 사용된 무한적분에 대한 표현은 Erdelyi^[12]의 공식을 사용하였다.

균열 끝단의 모드 III 응력확대계수를 안쪽 균열 끝단이 계면에서 떨어진 경우와 안쪽 균열 끝단이 계면에 있는 경우에 대하여 구하였다.

(a) 균열 끝단이 계면에서 떨어진 경우

균열 끝단이 계면에서 떨어진 경우($b > a$), 첫 항은 $\log t - r$ 의 단순 대수 특이성을 가지며, 반면에 둘째 항은 닫힌 간격 $b \leq (r, t) \leq c$ ($a < b < c$)에서 수렴한다. 이 경우 코시 $1/(t-r)$ 이 지배적인 커널이 되며, 적분방정식의 인덱스는 +1이며 식(25)의 해는 다음의 형식을 갖는다^[13].

$$G(r) = g_1(r)(r-b)^{-1/2}(c-r)^{1/2} \quad (31)$$

그러므로 닫힌 간격 $b \leq (r, t) \leq c$ ($a < b < c$)에서 수렴하는 미지함수를 결정하기 위해서는 Erdogan 등의 수치해법^[13]을 사용할 수 있다. 따라서 정규화 하면 다음과 같다.

$$r = \frac{c-b}{2}\rho + \frac{b+c}{2}, \quad t = \frac{c-b}{2}\tau + \frac{b+c}{2} \quad (32)$$

$$G(r) = \phi_1(\rho) = F_1(\rho) \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^{1/2}, \quad (33)$$

$$p(r) = \mu_2 P(\rho)$$

$$K(\rho, \tau) = \frac{c-b}{2} k(r, t) \quad (34)$$

식(23) 과 (29)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n \frac{2(1-\tau_j)}{2n+1} F_1(\tau_j) \left[\frac{1}{\tau_j - \rho_j} + K(\rho_j, \tau_j) \right] = P(\rho_j), \quad j=1, \dots, n \quad (35)$$

여기서

식(35)를 풀면 다음과 같이 규정된 균열 끝단의 모드 III 응력확대계수는

$$K_{III}(b) = \lim_{r \rightarrow b} \sqrt{2(b-r)} \sigma_{0c}^2(r, 0) \quad (36)$$

이며 다음과 같이 구할 수 있다:

$$K_{III}(b) = \lim_{r \rightarrow b} \mu_2 \sqrt{2(r-b)} G(r) = \mu_2 \sqrt{2(c-b)} F_1(-1) \quad (37)$$

여기서 $F_1(-1)$ 는 $F_1(\tau_i)$ ($i=1, \dots, n$)으로부터 2차 외삽법으로 구한다.

(b) 안쪽 균열 끝단이 계면에 있는 경우

안쪽 균열 끝단이 계면에 있는 경우($a = b$), 식(29)에 주어진 $k_2(r, t)$ 는 닫힌 간격 $b \leq (r, t) \leq c$ ($a < b < c$)에서 더 이상 수렴하지 않는다. 적분방정식의 커널이 매우 느린 수렴성을 가진 무한적분임을 주목해야 한다. 이 수렴성은 점근전개식의 선도 항인 적분소의 느린 수렴 항을 빼줌으로써 개선할 수 있다. 이들 느린 수렴 항은 확정형식으로 평가할 수 있으며 따라서 확정형식으로 수치적으로 평가할 수 있는 매우 빨리 수렴하는 무한적분으로 유도할 수 있다. 매우 큰 s 의 $\bar{k}_2(r, t, s)$ 의 점근값을 더하고 빼줌으로써 $k_2(r, t)$ 는 다음과 같이 두 항의 합으로 나타낼 수 있다:

$$k_2(r, t) = k_{2f}(r, t) + k_{2s}(r, t) \quad (38)$$

여기서 $k_{2f}(r, t)$ 는 닫힌 간격에서 수렴하며 r 과 t 가 끝점에 접근함에 따라 수렴하지 않게 된다. 이들을 정리하면 적분소의 점근 표현과 $k_2(r, t)$ 의 특이 항은 다음과 같다.

$$k_{2s}(r,t) = \int_0^x \frac{1-m}{1+m} \frac{ds}{2\sqrt{rt}} \left[\frac{e^{-t(r+t-2a)s} - \alpha(r,t)}{s} (e^{-t(r+t-2a)s} - e^{-2ts}) \right] \quad (39)$$

$$= \frac{1-m}{1+m} \frac{1}{2\sqrt{rt}} \left[\frac{1}{r+t-2a} - \alpha(r,t) \ln \left(\frac{2c}{r+t-2a} \right) \right]$$

여기서

$$\alpha(r,t) = \frac{3}{8} \left\{ \frac{1}{a} \left(4 \frac{1-m}{1+m} + 6 \right) - \frac{5}{t} - \frac{1}{r} \right\} \quad (40)$$

특이커널 (38) 은 a, r 및 $t \rightarrow \infty$ 일 때 기본적으로 Erdogan 등의 반평면(antiplane) 전단문제^[11)]의 표현과 같다.

적분방정식 (25)은 이제 다음과 같은 형식으로 표현할 수 있다.

$$\int_a^c \frac{G(t)}{t-r} dt + \int_a^c 2tk_{2s}(r,t)G(t)dt + \int_a^c \{k_1(r,t) + 2tk_{2f}(r,t)\}G(t)dt = -\frac{\pi p(r)}{\mu_2} \quad (41)$$

식(41)은 다음의 해의 형식을 가정된 일반화된 코시커널을 가진 특이적분방정식이다.

$$G(r) = g_2(r)(c-r)^{1/2}(r-a)^\beta, \quad (42)$$

$$a < r < c, \quad -1 < \text{Re}(\beta) < 0$$

Erdogan 등의 해법^[13)]을 사용하면 β 를 결정하기 위하여 다음의 특성방정식이 얻어진다:

$$\cos(\pi\beta) + \frac{1-m}{1+m} = 0 \quad (43)$$

(43)는 반평면전단의 경우[9]와 동일하다. 실수의 상수인 β 는 파이버와 매체의 재료성질의 함수이다. 간격 [a,c]을 정규화 하면 다음과 같다.

$$r = \frac{c-a}{2} \rho + \frac{a+c}{2}, \quad t = \frac{c-a}{2} \tau + \frac{a+c}{2} \quad (44)$$

$$G(r) = \phi_2(\rho) = F_2(\rho)(1-\rho)^{1/2}(1+\rho)^\beta, \quad (45)$$

$$p(r) = \mu_2 P(\rho)$$

$$H_1(\rho,\tau) = \frac{c-a}{2} 2k_{2s}(r,t), H_2(\rho,\tau) = \frac{c-a}{2} \{k_1(r,t) + 2k_{2f}(r,t)\} \quad (46)$$

그리고 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\tau-\rho} + \frac{1}{H_1(\rho,\tau) + H_2(\rho,\tau)} \right\} F_2(\tau)(1-\tau)^{1/2}(1+\tau)^\beta d\tau = -\pi P(\rho) \quad (47)$$

일반화된 코시커널을 가진 (47)는 Gauss-Jacobi 적분공식^[11)]을 사용하여 풀 수 있다. 모드 III 응력 확대계수는 다음과 같다.

$$K_{III}(a) = \lim_{r \rightarrow a} 2^{1/2} (a-r)^{-\beta} \sigma_{\alpha}^I(r,0) \quad (48)$$

식(25)의 좌변이 $\sigma_{\alpha}^2(r,0)$ ($r > c$)을 생성한다는 사실을 이용하면 다음식을 유도할 수 있다.

$K_{III}(a)$ 에 대한 다음과 같은 식을 얻을 수 있다^[11)].

$$K_{III}(a) = 2^{1/2} \mu_2 \mu^* (c-a)^\alpha g_2(a)$$

$$= 2^{1/2} \mu_2 \mu^* \lim_{r \rightarrow a} (r-a)^{-\beta} G(r) \quad (49)$$

$$= 2 \mu_2 \mu^* \left\{ (c-a)/2 \right\}^{-\beta} F_2(-1)$$

여기서

$$\mu^* = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} = m^{1/2} \quad (50)$$

여기서 $F_2(-1)$ 는 $F_2(\tau_i)$ ($i=1, \dots, n$)으로부터 2차 외삽법으로 구한다.

3. 결과 및 토론

균열 끝단이 계면에서 떨어진 경우, 즉 균열 끝단이 제곱근의 특이성을 가진 경우, 균열 끝단의 정규화 된 모드 III 응력확대계수는 다음과 같이 규정된다.

$$K'_{III}(b) = \frac{K_{III}(b)}{\tau_0 a_1^{1/2}} = \sqrt{2} F_1(-1) \quad (51)$$

여기서 $a_1 = c-b$ 이다. Figures 2, 3, 4는 비틀림 하중분포 $\tau = \tau_0 r/c$ 하에서 각각 $a/c = 0.25, 0.5$ 와 0.75 일 때 정규화 된 모드 III 응력확대계수를 보여준다. 균열의 크기가 아주 작을 때 즉 $(c-b)/(c-a) \rightarrow 0.0$ 일 때, 모드 III 응력확대계수는 안쪽원통의 존재에 민감하지 않으며 모든 m 값에서 안쪽원통의 반경의 영향을 거의 받지 않는다; 또한 $K'_{III}(b)$ 은 1.0으로 수렴하며 이 결과는 균일매체내의 반평면전단문제의 결과와 동일하다. $a/c = 0.25$ 일 때 Fig.2에서와 같이 일반적으로 $(c-b)/(c-a)$ 의 증가와 함께 정규화 된 모드 III 응력확대계수

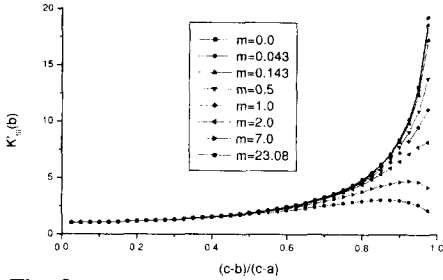


Fig. 2 SIF when the crack tip is away from the interface, $a/c=0.25$

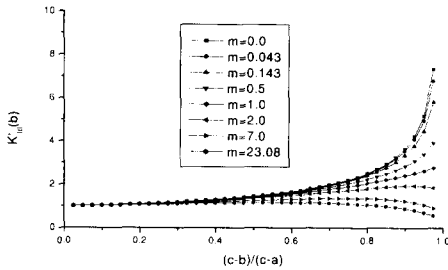


Fig. 3 SIF when the crack tip is away from the interface, $a/c=0.5$

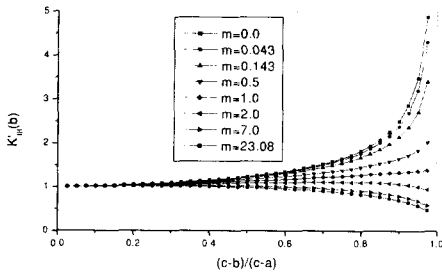


Fig. 4 SIF when the crack tip is away from the interface, $a/c=0.75$

는 증가하나 $m=7.0$ 과 $m=23.08$ 에서는 안쪽원통의 영향으로 균열 끝단이 계면에 접근하면서 감소함을 알 수 있다. Fig. 4에서 정규화 된 모드 III 응력확대계수는 a/c 가 증가함에 따라 반평면전단문제^[11]에 접근함을 보여준다. 즉 $m>1$ 일 때 $K'_{III}(b)$ 는 감소하고 $m<1$ 일 때 $K'_{III}(b)$ 는 증가함을 알 수 있다. $m=1.0$ 일 때 $K'_{III}(b)$ 는 균일 원통의 원주방향의 표면균열에 대한 해가 되며 균일 원통의 표면균열에 대한 Benthem 등의 결과^[3]와

비교하였다. $a/c=0.25$ 일 때 $K'_{III}(b)$ 는 Fig. 5에서와 같이 Benthem 등의 결과^[3]와 잘 일치한다.

안쪽 균열 끝단이 계면에 있는 경우, 정규화된 모드 III 응력확대계수는 다음과 같이 규정할 수 있다^[11].

$$K'_{III}(a) = \frac{K_{III}(a)}{\tau_0 a_2^\beta} = 2^{1+\beta} \mu^* F_I(-I), \quad (52)$$

여기서 $a_2 = c - a$ 이다. $m=1/23.08, 1/7, 1/2, 1.0, 2.0, 7.0, 23.08$ 일 때, β 는 각각 $-0.870, -0.770, -0.608, -0.5, -0.392, -0.230, -0.130$ 의 값을 가진다. 정규화 된 모드 III 응력확대계수는 Fig. 6에 주어져 있다. $K'_{III}(a)$ 는 m 이 클수록 증가한다. 그러나 m 이 작을수록 안쪽 균열 끝단 특이성은 감소한다. 그래서 m 값에 따른 $K'_{III}(a)$ 를 비교하는 것은 불가능하다. 일반적으로 m 이 클수록 $K'_{III}(a)$ 는 커지며 $a/c \rightarrow 0$ 일 때 $K'_{III}(a)$ 는 극단적으로 증가한다.

$m=1.0$ 일 때만, 식(55)에서와 같이 $K'_{III}(a)$ 는 β 에 종속적이기 때문에 $a/c \rightarrow 1.0$ 에 따라 $K'_{III}(a) \rightarrow 1.0$ 이다. 이 결과는 반평면전단문제^[11]에 접근함을 보여준다.

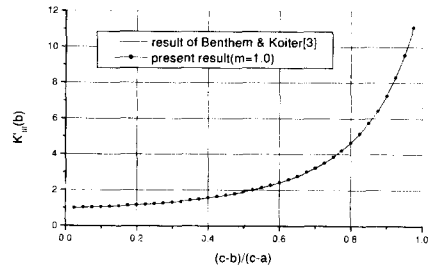


Fig. 5 Comparison with Benthem and Koiter^[3]

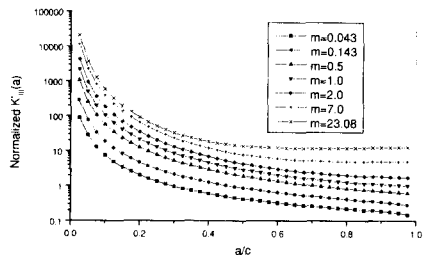


Fig. 6 SIF when the crack tip is at the interface.

참고문헌

1. Sneddon, I. N., and Lowengrub, M., "Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity," Wiley, New York, pp. 130-207, 1969.
2. Collins, W. D., "Some Axially Symmetric Stress Distributions in Elastic Solids Containing Penny-shaped Cracks. II. Cracks in Solid under Torsion," *Mathematika*, Vol. 9, pp. 25-37, 1962.
3. Benthem, J. P., and Koiter, W. T., "Asymptotic Approximations to Crack Problems. Method of Analysis and Solutions to Crack Problems," Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, pp. 131-178, 1973.
4. Erguven, M. E., "Running Penny-shaped Crack in an Infinite Elastic Solid under Torsion," *Int. J. Fracture*, Vol. 29, pp. 135-142, 1985.
5. Selvadurai, A. P. S., and Singh, B. M., "The Annular Crack Problem for an Isotropic Elastic Solid," *Q. Jl Mech. appl. Math.*, Vol. 38, pp. 233-243, 1985.
6. Keer, L. M., and Watts, H. A., "Mixed Boundary Value Problems for a Cylindrical Shell," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 12, pp. 723-729, 1976.
7. Wijeyewickrema, A. C., Keer, L. M., Hirashima, K., and Mura, T., "The Annular Crack Surrounding an Elastic Fiber in a Tension Field," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, pp. 315-328, 1991.
8. Santhanam, S., "Fracture Criterion for the Axisymmetric Disking Process," *Int. J. Fracture*, Vol. 60, pp. 65-77, 1993.
9. Han Xue-li and Wang Duo, "The Annular Crack in a Nonhomogeneous Matrix Surrounding a Fiber under Torsional Loading - I. Inner Crack Tip away from or Terminating at the Interface," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 53, pp. 456-464, 1996.
10. Kim, Y. J., "Stress Intensity Factors for the Annular Crack Surrounding an Elastic Fiber under Torsion," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 12, pp. 2463-2476, 1997.
11. Erdogan, F., and Cook, T. S., "Antiplane Shear Crack Terminating at and Going Through a Bimaterial Interface," *Int. J. Fracture*, Vol. 10, pp. 227-240, 1974.
12. Erdelyi, A., "Tables of Integral Transforms. Vols 1 and 2," McGraw-Hill, New York, 1954.
13. Erdogan, F., Gupta, G. D., and Cook, T. S., "Numerical Solution of Singular Integral Equations. Method of Analysis and Solutions to Crack Problems," Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, pp. 368-425, 1973.