

이족로봇의 동적 보행계획과 역동역학 해석

박인규*, 김진걸**

Dynamic Walking Planning and Inverse Dynamic Analysis of Biped Robot

In-Gyu Park*, Jin-Geol Kim**

ABSTRACT

The dynamic walking planning and the inverse dynamics of the biped robot is investigated in this paper. The biped robot is modeled with 14 degrees of freedom rigid bodies considering the walking pattern and kinematic construction of humanoid. The method of the computer aided multibody dynamics is applied to the dynamic analysis. The equations of motion of biped are initially represented as terms of the Cartesian coordinates, then they are converted to the minimum number of equations of motion in terms of the joint coordinates using the velocity transformation matrix. For the consideration of the relationships between the ground and foot, the holonomic constraints are added or deleted on the equations of motion. The number of these constraints can be changed by types of walking pattern with three modes. In order for the dynamic walking to be stabilizable, optimized trunk positions are iteratively determined by satisfying the system ZMP(Zero Moment Point) and ground conditions.

Key Words : Dynamic walking planning(동적 보행계획), Inverse dynamics (역동역학), Biped robot (이족로봇), Multibody dynamics (다물체 동역학), Velocity transformation matrix (속도변환행렬), Zero moment point (균형점)

1. 서론

작업자나 일반차량의 접근이 어려운 작업환경에서의 작업 수행뿐만 아니라, 산업현장, 공공건물 혹은 가정 등, 인간활동 중심으로 설계되어진 공간에서 인류를 보조 혹은 대체하기 위하여 이족보행로봇의 연구가 활발히 진행중이다. 그러나 많은 연구자들은 보행로봇의 구조의 복잡성으로 인하여 시스템의 운동방정식의 구성과정에 많은 가정을 도입

하거나 생략·간략화 하였다. 또한 이차원적인 평면운동(planar motion)으로 묘사하여 실제의 보행로봇의 수학적 모델이 제대로 이루어지지 않은 상태이다.⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾ Furusho와 Sano⁽¹⁾는 7개의 링크를 가진 보행로봇 BLR-G2에 대한 운동방정식의 유도에서, 완전한 3차원 운동방정식을 구성하지 못하고 평면운동방정식을 진행방향(sagittal direction)과 측면방향(lateral direction)에 대하여 각각 라그랑지 방법을 이용하여 구성한 후, 측면방향의 운동이 진행방향

* 인하대학교 대학원 자동화공학과

** 인하대학교 기계·항공·자동화공학과

의 운동에 종속되도록 하여 하나의 운동으로 묘사하였다. Shin⁽²⁾도 두 다리가 직진관절을 가진 BR-1의 운동방정식을 라그랑지 방법을 이용하여 구하였지만, 두 발 지지단계에 대한 고려가 없이 평면운동방정식으로 구성을 하였다. Mitobe⁽³⁾과 Ito⁽⁴⁾는 두 발 지지단계 등을 해석하였지만 보행로봇의 모델을 산업용로봇의 말단효과장치가 지면과 접촉하는 운동으로 가정하고, 여기에 구속을 첨가하여 운동방정식을 구성하였다.

이족로봇의 운동은 두 발이 지면과의 접촉상태에 따라 크게 두 가지 단계로 구분된다. 즉, 한 발 지지단계와 두 발 지지단계로 각각 구분한다. 두 발 지지단계는 보행속도가 높아지면 무시할 수 있을 정도로 작은 구간이지만, 전체적인 부드러운 보행, 계단이나 경사진 평면 등의 보행, 혹은 정지한 상태에서 작업 수행 등의 운동 해석을 위해서는 필수적인 단계이다. Takanishi⁽⁵⁾와 Shin은 동적 보행연구에서 이 단계의 해석을 생략하고 동적 안정만을 고려한 연구를 수행하였다. Mitobe는 두 발 지지단계에서 발생하는 지면반력의 분배를 위해, 두 발 지지상태의 각 다리에 대하여 독립된 두 개의 산업용로봇이 지면에 접하며 작업하는 것으로 해석한 다음, 이때 얻은 각각의 지면반력에 비례식을 적용하여 각 발로 분배시켰다. Ito는 두 발이 지면에 힌지(hinge)된 것처럼 가정하여 한 발 지지단계의 운동방정식에 구속조건을 추가하여 구성된 미분-대수방정식의 지면반력의 항인 라그랑지 승수를 검사하여 안정도 판별의 기준으로 삼았다. 그러나, 한 발에만 구속이 첨가되어 지면반력의 분배에 대한 고려가 없다. Blajer⁽⁶⁾는 한 발 지지단계일 때의 구속조건, 두 발 지지단계일 때 등의 운동방정식을 세 가지 그룹으로 나누어 두 발이 지면과 이루는 형태에 따라 지면반력을 체계적으로 구하였으며, 이 구속조건에 의한 구속력으로 지면반력의 분배를 쉽게 이루었다.

지금까지 언급한 운동방정식의 구성을 보다 정확하고 체계적으로 구성하기 위하여 60년대 중반 이후 항공우주분야에 널리 적용되고 있고, 최근 컴퓨터의 발전과 더불어 더욱 발전을 이루고 있는 다물체 동역학적 방법을 이용하여 시스템의 동역학 모델링과 해석결과를 향상시키고자 한다. 다물체 동역학에서는 좌표의 선정에 따라 운동방정식의 구성이 바뀌는데, 초기에는 개념이 쉽고 운동방정식의 구성이 체계적인 절대좌표를 이용하였다. 그러

나, 이 좌표를 이용하는 경우에는 최대 수의 운동방정식을 구성하게 되므로 구속조건을 만족시키기 위한 많은 계산과 시간을 필요하게 되고, 관절의 구동력이나 제어를 위한 상대 조인트 값으로의 직접적인 변환이 어려운 단점이 있다. 반면, 상대 조인트를 이용하면 최소의 운동방정식을 얻을 수 있지만, 운동방정식의 구성이 절대좌표 방식에 비해 체계적이지 못한 단점이 있다.⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾ 이를 보완하기 위해 최근에는 조인트 좌표방식을 이용하여 각 좌표계의 장점인 체계성과 최소의 운동방정식의 구성이 가능하도록 Nikravesh와 Kim등이 속도변환기법을 이용하여 체계화하였다.^{(10),(11)}

동적으로 안정된 보행을 위한 방법들에는 두 다리가 기준입력궤적을 추종하면서 균형추를 이용하여 시스템 전체의 모멘트 균형을 맞추거나, 단순히 CG(Center of Gravity)만으로, 혹은 지면반력을 측정하여 접촉이나 미끄러짐이 없도록 제어를 구현하여 동적으로 안정된 보행을 구현한다. Takanishi는 질점으로 모델링된 이족로봇에 대하여 모멘트 평형방정식을 이용하여 발바닥 내에 존재하는 ZMP조건을 만족하는 최적의 균형추의 운동궤적을 FFT방법을 이용하여 반복적으로 결정하였다. Fujimoto⁽¹²⁾는 ZMP가 발바닥 내에 존재하고 이 점을 중심으로 발에 작용하는 외력들의 모멘트평형을 이루지 못하고, 또한 접촉과 마찰조건을 만족하지 않으면 넘어지는 것으로 간주하여 이를 보상하기 위한 제어를 구성하여 동적 보행을 수행하였다.

본 논문에서는 이족로봇의 구조를 인류와 유사한 다리 구조와 보행을 위하여 14자유도의 다물체 동역학 모델로 구성한다. 모델링된 보행로봇에 도식이론(graph theory)을 적용하여 보행로봇의 형상(topology) 정보를 얻고, 이것과 조인트 정보를 이용하여 속도변환행렬을 구성하여 절대좌표 방식으로 구성된 다물체 동역학 방정식을 조인트좌표 방식으로 운동방정식을 변환한다. 보행 중, 동적 안정을 유지하기 위하여 Takanishi가 제안한 ZMP의 조건뿐만 아니라, 지면의 접촉과 마찰의 조건을 만족하는 균형추의 운동을 FFT방법을 이용하여 반복적으로 최적의 궤적을 결정한다. 발바닥의 지면접촉은 세 개의 점으로 이루어지는 것으로 모델링한 후, 각 점의 반력을 관측하여 지면과의 접촉 및 마찰의 정보를 얻는다. 또한 보행을 세 가지 운동모드로 구분하여 역동역학 해석을 수행하였다. 이 제안을 바탕으로 시스템의 운동방정식을 C 언어를 이용하

여 구현하였으며, 구현한 프로그램의 정확성을 상용 동역학 해석 프로그램인 DADS⁽¹³⁾를 이용하여 역동역학 해석결과인 각 조인트 구동력에 대하여 비교하였다.

2. 다물체 동역학 모델링

Fig. 1의 (a)는 본 모의실험에 사용된 이족로봇이다. 인류와 유사한 다리 구조와 보행을 위하여 각 다리를 6자유도로, 시스템의 균형을 제어하기 위한 균형추를 2자유도로 구성한다. 모두 아홉 개의 물체로 이루어진 14자유도의 다물체 동역학 모델을 나타낸다. 모델링의 편의를 위하여 외부의 힘과 구속에서 자유롭기 위하여 임의의 직교좌표 공간상에 존재하는 것으로 가정을 한다.

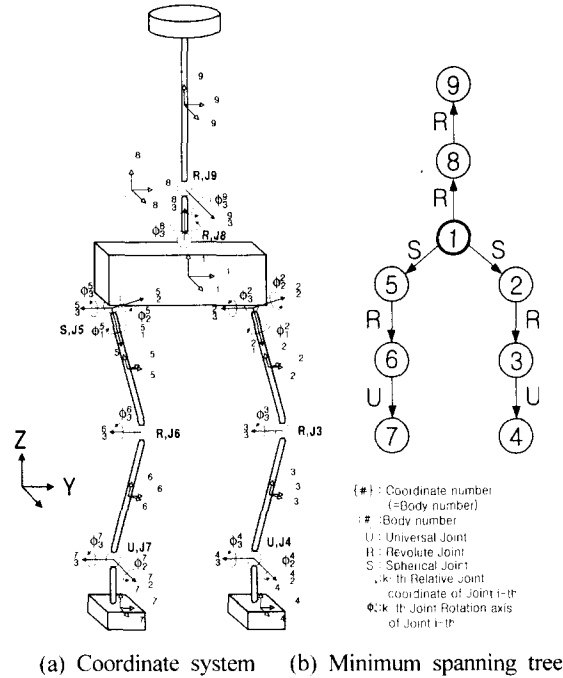


Fig. 1 Biped system configuration

도식이론을 적용하여 시스템의 형상을 나타낼 경우, 본 시스템은 개방형 구조를 이루게 되므로 Fig. 1의 (b)와 같은 분지 구조(tree structure)로 구성된다. 또한 지면에 고정된 물체가 없으므로 주 물체를 분지 구조들의 분기점에 위치한 물체 1로 선정한다. 즉, 전체 시스템이 주 물체를 중심으로 외향경로(outward path)를 가지는 세 개의 개방형 구

조를 이룬다. 그리고 이 구조는 주 물체에 대한 본 시스템의 경간 구조(spanning structure)가 된다.⁽¹²⁾

이 경간 구조의 주 물체에 대한 경로를 구하면 다음과 같은 경로행렬 Π 로 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

경로행렬의 i 번째 행에서 0이 아닌 열의 수는 기준 물체에서 물체 i 까지 외향경로를 따라 물체 i 에 기구학적 영향을 미치는 물체들을 나타낸다.

본 시스템에서는 각 물체의 기준물체에 대한 상대좌표 ϕ 를 일반화좌표로 정의한다. Table 1은 상대조인트좌표와 일반화좌표들을 나타낸다. 여기서, 주 물체인 물체 1의 상대좌표는 관성좌표계에 관한 절대좌표로 정의한다. 이 경로행렬과 각 조인트의 정보를 이용하여 속도변환행렬을 구성한다.

Table 1 Definition of generalized coordinates

body No.	joint type	reference body	relative joint coord.s	joint axes	generalized coord.s
1	Free joint	0	$[r^{1T}, p^{1T}]^T$		q_1, q_2, q_3 q_4, q_5, q_6, q_7
2	S	1	$[\phi_2^1, \phi_2^2, \phi_2^3]^T$	$[u_2^1, u_2^2, u_2^3]^T$	q_8, q_9, q_{10}
3	R	2	ϕ_3^2	u_3^2	q_{11}
4	U	3	$[\phi_4^3, \phi_4^1]^T$	$[u_4^1, u_4^3]^T$	q_{12}, q_{13}
5	S	1	$[\phi_5^1, \phi_5^2, \phi_5^3]^T$	$[u_5^1, u_5^2, u_5^3]^T$	q_{14}, q_{15}, q_{16}
6	R	5	ϕ_6^5	u_6^5	q_{17}
7	U	6	$[\phi_7^6, \phi_7^2]^T$	$[u_7^2, u_7^1]^T$	q_{18}, q_{19}
8	R	1	ϕ_8^1	u_8^1	q_{20}
9	R	8	ϕ_9^8	u_9^8	q_{21}

3. 운동방정식

이족로봇의 운동방정식은 라그랑지 방정식과 가상일(virtual work)의 원리를 이용하여 구성한다. 또한 운동방정식은 대수방정식인 구속조건을 포함하는 미분-대수 방정식으로 구성된다. 이 구속은 보행모드별로 그 종류와 개수가 변한다. 즉, 구속은

받는 시스템에서 구속조건의 추가·감소를 고려한 운동해석이 된다.^{(11),(14)}

3.1 절대좌표계를 이용한 운동방정식

기구 시스템 내의 기구학적 조인트와 시간에 종속된 구속들은 m 개의 독립된 홀로노믹(holonomic) 구속을 가진 것으로 보고, 대수적인 표현으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹⁵⁾

$$\Phi(u, t) = 0 \quad (2)$$

여기서, $u = [x, y, z, e_0, e_1, e_2, e_3]^T$ 는 기구정보를 관성좌표계에 관하여 절대좌표로 나타낸 것으로 $[x, y, z]^T$ 는 물체의 절대좌표 위치벡터이며, $[e_0, e_1, e_2, e_3]^T$ 는 물체의 오일러 파라미터이다. 첨자 T 는 전치(transpose)를 나타낸다. 이 구속식의 시간 변화율을 구하여 속도와 가속도 방정식으로 나타내면 식(3)과 식(4)로 나타낸다.

$$\Phi_u \dot{u} = -\Phi_t \equiv \nu \quad (3)$$

$$\Phi_u \ddot{u} = -(\Phi_{uu} \dot{u} \dot{u} - 2\Phi_{ut} \dot{u} - \Phi_{tt}) \equiv \gamma \quad (4)$$

여기서, $\dot{u} = [\dot{r}^T, \dot{\omega}^T]^T$ 와 $\ddot{u} = [\ddot{r}^T, \ddot{\omega}^T]^T$ 는 절대좌표로 나타낸 물체의 속도와 가속도 벡터이다. $\omega = 2E\dot{p}$ 이고 각속도(angular velocity)를 나타내며, E 는 오일러 파라미터로 이루어진 3×4 행렬이다. Φ_u 는 구속식의 자코비안 행렬을, Φ_{ut} 는 구속식을 u 와 시간 t 에 대한 자코비안을, Φ_{tt} 는 구속식을 t 에 대하여 이차 편미분한 자코비안을 나타낸다. 라그랑지 승수의 형태로 표현된 구속을 받는 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$M\ddot{u} + \Phi_u^T \lambda = g \quad (5)$$

여기서, M 은 링크들의 질량과 관성 텐서를 포함하는 관성행렬이고, λ 는 m 개의 라그랑지 승수벡터이며, $g = g(u, \dot{u})$ 는 코리올리항과 시스템에 작용하는 외력과 모멘트들의 항이다. 또한, $\Phi_u^T \lambda$ 항은 조인트 반력과 모멘트를 나타낸다. 식(4)와 식(5)는 구속된 시스템의 미분-대수 방정식을 구성한다.

3.2 조인트좌표계를 이용한 운동방정식

이족로봇의 구속에는 각 조인트들을 표현하는 조인트구속(joint constraint)과 물체가 임의의 위치와 자세로 공간상에 있기 위한 절대구속(absolute constraint)을 표현하는 기구학적 구속과 조인트나 물체의 요구된 운동을 표현하기 위한 구동구속(driving constraint) 등이 있다.

본 논문에서는 두 발과 지면과의 관계에 따라 Fig. 2와 같이 세 가지의 모드로 세분화하여 운동을 묘사한다. 모드 1은 보행의 시작이나 스윙운동을 하기 위하여 다리를 들어올리는 운동이다. 모드 2는 일반적인 전진운동인 스윙운동으로 한 발은 지면과 접하고 나머지 한 발은 공간운동을 한다. 그리고 모드 3은 스윙운동을 마친 발이 지면에 착지하는 운동을 각각 나타낸다.

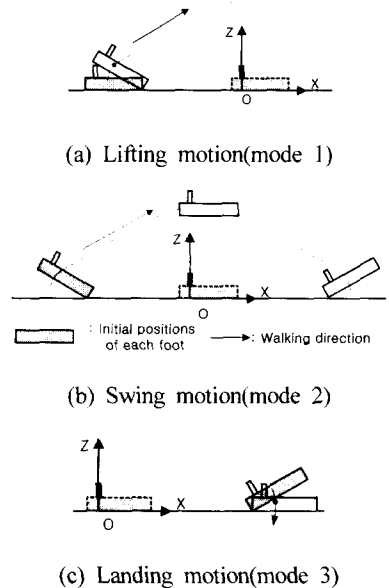


Fig. 2 Feet motion with three modes

기구학적 구속은 식(6)과 식(7)로 세분화하여 표현할 수 있다.

$$\Phi^K(u) = 0 \quad (6)$$

$$\Phi^M(u) = 0 \quad (7)$$

여기서, 첨자 K 는 조인트구속을 나타내며, 첨자 M 은 각 모드별로 달리 구성되는 절대구속을 나타낸다. 식(6)과 식(7)의 시간 변화율을 구하여 속도 방정식을 식(8)과 식(9)로, 가속도 방정식을 식(10)과 식(11)로 각각 나타낼 수 있다.

$$\Phi_u^K \dot{u} = 0 \equiv \nu^K \quad (8)$$

$$\Phi_u^M \dot{u} = 0 \equiv \nu^M \quad (9)$$

그리고

$$\Phi_u^K \ddot{u} = -(\Phi_u^K \dot{u})_u \dot{u} \equiv \gamma^K \quad (10)$$

$$\Phi_u^M \ddot{u} = -(\Phi_u^M \dot{u})_u \dot{u} \equiv \gamma^M \quad (11)$$

이다. 이 가속도 방정식(10)과 식(11)은 식(5)와 함께 미분-대수 방정식을 구성한다. 그러나, 이 식은 절대좌표로 구성되어 있으므로 최대 운동방정식의 수를 생성하는 문제점이 있다. 최소 운동방정식의 수를 가지도록 조인트좌표의 항으로 운동방정식을 변환하여야 한다.

조인트 좌표계로 운동방정식을 변환하기 위하여, Table 1에서와 같이 두 링크의 기준물체에 대한 상대 값이 일반화 좌표가 되도록 벡터 q 로, 조인트 속도벡터는 \dot{q} 로 정의한다. 조인트좌표벡터 \dot{q} 와 절대좌표벡터 \dot{u} 사이의 선형변환은 식(12)과 같은 관계를 가진다.^{(10),(11)}

$$\dot{u} = B\dot{q} \quad (12)$$

여기서, 행렬 B 는 속도변환행렬이다. 식(12)를 식(8)에 대입하면 식(13)과 같은 결과를 얻는다.

$$\Phi_u^K \dot{u} = \Phi_u^K B\dot{q} = 0 \quad (13)$$

여기서, 벡터 \dot{q} 는 독립된 조인트 속도 벡터이므로 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\Phi_u^K B = 0 \quad (14)$$

위의 식(14)에서 속도변환행렬 B 는 자코비안 행렬 Φ_u^K 와 직교함을 알 수 있다. 식(12)의 시간 변화율인 가속도 변환식은 식(15)와 같다.

$$\ddot{u} = B\ddot{q} + \dot{B}\dot{q} \quad (15)$$

식(5)는 세분화하여 나타내면 다음과 같다.

$$M\ddot{u} + \Phi_u^{KT} \lambda^K + \Phi_u^{MT} \lambda^M = g \quad (16)$$

식(16)에 식(15)를 대입한 후 B^T 를 양변에 곱하고 식(14)를 적용하여 정리하면 식(17)과 같이 된다.

$$\bar{M}\ddot{q} + \Phi_q^{MT} \lambda^M = \bar{g} \quad (17)$$

여기서,

$$\bar{M} = B^T M B$$

$$\bar{g} = B^T (g - M\dot{B}\dot{q})$$

$$\Phi_q^M = \Phi_u^M B$$

이다. 이 식은 구속을 받는 기계시스템에 대한 조인트 좌표계로 표현한 운동방정식이다. 가속도 방정식(11)을 조인트좌표로 변환하면 다음과 같다.

$$\Phi_q^M \ddot{q} = \gamma^M - \Phi_q^M \dot{B}\dot{q} = \bar{\gamma}^M \quad (18)$$

이 조인트 가속도 방정식(18)과 미분방정식(17)을 행렬의 형태로 표현하면 식(19)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & \Phi_q^{MT} \\ \Phi_q^M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{\gamma}^M \end{bmatrix} \quad (19)$$

식(19)는 절대구속만을 포함하는 조인트 좌표계로 변환된 미분-대수방정식의 운동방정식이다.

4. 동적 보행 계획

동적으로 안정된 보행을 위하여, 이족로봇은 계획된 ZMP의 궤적을 만족해야 할뿐만 아니라, 지면과의 접촉 및 마찰의 조건도 만족시키는 균형추의 운동궤적을 Fig. 3의 흐름도와 같이 보행 파라미터를 변화시키면서 반복적으로 결정한다. 이 장에서는 ZMP의 조건을 만족하는 균형추의 운동을 결정하는 방법과 접촉 및 마찰의 조건에 대하여 나타낸다.

4.1 ZMP의 조건

임의의 공간에 i 개의 질점이 존재한다. 이때 질량이 각각 m_i 이고, 관성좌표계 $O-XYZ$ 에 관하여 각각 $[x_i, y_i, z_i]^T$ 의 위치에 놓여있다. 이때 평면상의 임의의 위치에 대한 모멘트 평형방정식을 세우면, 그 임의의 평면 위치에서는 모멘트가 영이 되고, 이때의 점을 ZMP이라 정의한다. 이 점의 위치는 평면상에 $[X_{zmp}, Y_{zmp}, 0]^T$ 로 나타낸다.⁽¹⁶⁾ 모멘트평형방정식을 질점계 전체에 대하여 D'Alembert의 원리를 적용한 후 ZMP의 항으로 정리하면 식(20)과 식(21)로 표현된다.⁽⁵⁾

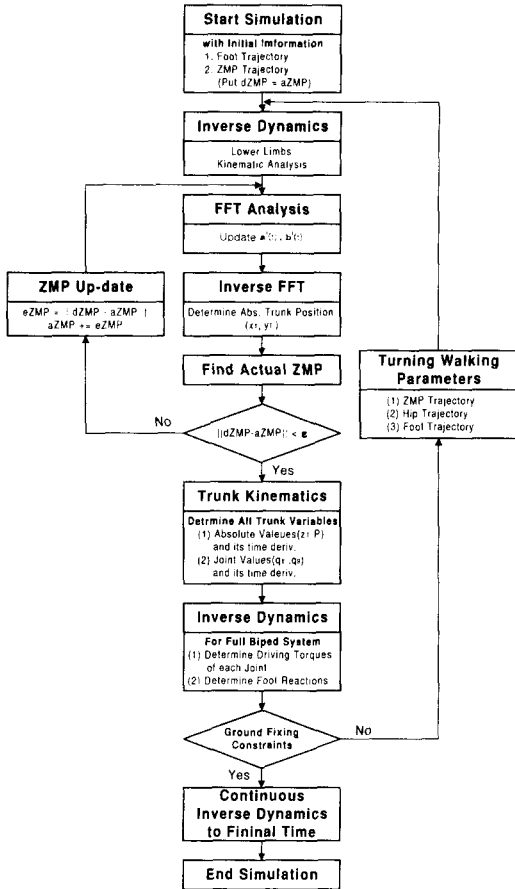


Fig. 3 Flowchart for inverse dynamic analysis with dynamic walking stability criteria

$$X_{zmp} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{z}_i + g_z) x_i - \sum_{i=1}^n (\ddot{x}_i + g_x) z_i}{\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{z}_i + g_z)} \quad (20)$$

$$Y_{zmp} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{z}_i + g_z) y_i - \sum_{i=1}^n (\ddot{y}_i + g_y) z_i}{\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{z}_i + g_z)} \quad (21)$$

여기서, $g = [g_x, g_y, g_z]^T$ 는 중력 가속도를 나타낸다.

해석의 편리를 위하여, 위의 식(20)과 식(21)을 Fig. 4와 같이 상대좌표의 개념을 도입하면 질점계 전체에 관한 위치벡터 $[x, y, z]^T$ 는 $[x_q, y_q, z_q]^T$ 와 $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]^T$ 의 합으로 표현된다. $[x_q, y_q, z_q]^T$ 는 관

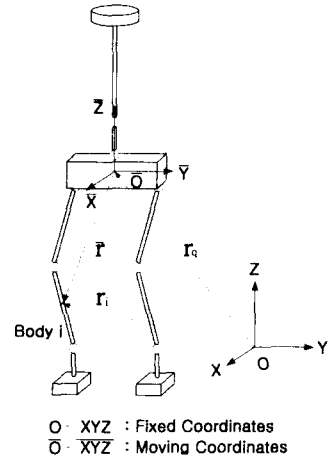


Fig. 4 Moving coordinate frame

성좌표계 $O-XYZ$ 에서 기준물체에 부착된 이동좌표계 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ 까지의 거리벡터를 나타내고, $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]^T$ 는 이동좌표계에서 각 질점들의 위치벡터이며, $[\bar{x}_T, \bar{y}_T, \bar{z}_T]^T$ 는 이동좌표계를 기준 한 균형추의 위치를 나타낸다. 식(20)과 식(21)을 이동좌표계 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ 에 기준 한 균형추의 항들을 식의 좌변에, 나머지 항들을 우변으로 이항한 후 $\alpha(t)$ 와 $\beta(t)$ 로 나타내면 식(22)과 식(23)으로 표현된다.

$$\bar{z}_T \ddot{x}_q + \bar{z}_T g_x + \bar{z}_T \ddot{x}_{zmp} + (\bar{z}_T + z_q) \ddot{x}_T - (\ddot{x}_T + \ddot{z}_q + g_x) \bar{x}_T = \alpha(t) \quad (22)$$

$$\bar{z}_T \ddot{y}_q + \bar{z}_T g_y + \bar{z}_T \ddot{y}_{zmp} + (\bar{z}_T + z_q) \ddot{y}_T - (\ddot{y}_T + \ddot{z}_q + g_y) \bar{y}_T = \beta(t) \quad (23)$$

식(22)와 식(23)는 랭크(rank)가 2인 비선형 미분방정식이다. 또한 \bar{z}_T 의 항들로 결합(coupled)되어 해석적으로 풀이하기 어렵다. 이 방정식을 풀이하기 위하여 Takamishi가 제안한 FFT방법을 이용하여 반복적으로 근사해를 구한다.

식(22)과 식(23)이 독립되고 선형화된 방정식이 되도록 하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

$$\bar{z}_T + z_q = constant, \quad \ddot{z}_T = 0 \quad (24)$$

그러면, 식(25)와 식(26)처럼 독립선형미분방정식을 얻을 수 있다.

$$(\bar{z}_T + z_q) \ddot{x}_T - g_z \bar{x}_T = \alpha'(t) \quad (25)$$

$$(\bar{z}_T + z_q) \ddot{y}_T - g_z \bar{y}_T = \beta'(t) \quad (26)$$

여기서,

$$\alpha'(t) = \alpha(t) - \bar{z}_T \ddot{x}_q - \bar{z}_T g_x$$

$$\beta'(t) = \beta(t) - \bar{z}_T \ddot{y}_q - \bar{z}_T g_y$$

이다. 위의 식(25)와 식(26)은 특성방정식의 근이 양의 실근을 가지므로 초기치 문제로는 해결할 수 없다. 그러나 정상상태 보행에서는 ZMP의 궤적과 두 다리 운동이 주기적으로 이동 좌표계 $\overline{O-XYZ}$ 에 작용하므로, 운동의 시작에서 운동의 끝까지의 전 운동을 하나의 주기운동으로 보고 식(25)와 식(26)의 근사 주기 해를 구한다. 그러나, 이 해는 비선형 방정식(22)와 식(23)을 만족하지 못한다. 식(22)와 식(23)을 만족하는 보다 엄밀한 해를 구하기 위하여 다음과 같은 반복알고리즘을 도입한다.

우선, 선형방정식(25)와 식(26)의 근사 주기 해를 식(20)과 식(21)에 대입하여 ZMP의 위치를 얻는다. 이때 얻어진 ZMP를 현재의 자세에 대한 시스템의 실제 ZMP라 정의한다. 이 실제 ZMP와 계획된 ZMP 사이의 오차를 구하여 선형방정식(25)와 식(26)내에 있는 ZMP의 값에 이 오차의 값을 뺀다. 그리고 다시 근사 주기 해를 구한다. 이 작업을 ZMP의 오차가 허용오차 ϵ 내에 들 때까지 반복한다. 이렇게 하여 비선형 방정식(22)와 식(23)의 엄밀한 주기 해를 구한다.

4.2 지면접촉 및 마찰조건

균형추의 위치를 결정하기 위한 ZMP 방정식을 식(20)과 식(21)로부터 구하였다. 그러나 이 방정식은 시스템을 질점으로 가정하였으므로, 실제의 강체 모델과는 많은 차이를 가지고 있다. 이 문제점으로 인하여 균형추의 운동이 보행로봇의 동적 보행을 보장하지 못할 수 있다. 그래서 본 논문에서는 접촉조건과 마찰조건을 발과 지면사이에 부과하여 균형추의 위치 궤적이 ZMP의 조건뿐만 아니라 접촉과 마찰의 조건이 모두 만족되도록 하였다. 다음은 이 조건들에 대하여 나타낸다.

발과 지면의 구속은 식(19)에서와 같이 절대구속을 이용하여 표현하지만, 실제 보행로봇의 보행은 단일방향구속(unilateral constraints)의 특징을 가진다.⁽⁴⁾⁽¹²⁾ 이 구속의 특징을 나타내기 위하여 지면

반력의 수직력성분 f_z^M 의 값이 음수가 되면 지지하고 있던 발이 지면에서 떨어지고 넘어지는 것으로 간주한다. 보행 중 이런 전복현상을 막기 위하여 지면반력의 수직력은 식(27)의 접촉조건을 만족하여야 한다.

$$f_z^M \geq 0 \quad (27)$$

또한, 지면반력의 수평력 f_x^M 과 f_y^M 의 합력이 정지마찰력보다 크면 역시 보행을 하지 못하고 미끄러져 넘어지는 것으로 간주한다. 보행 중 미끄러짐을 방지하기 위하여 지면반력의 수평력의 합력은 식(28)을 만족하여야 한다.

$$\sqrt{(f_x^M)^2 + (f_y^M)^2} \leq \mu_s f_z^M \quad (28)$$

여기서, μ_s 는 정지마찰계수를 나타내고, $\mu_s f_z^M$ 은 정지마찰력이다.

5. 역동역학 해석

식(19)에서 시스템이 구속을 받지 않는 경우의 자유도가 n 이다. 이때, 각 모드의 변화에 따른 구속 조건 m_m 개의 절대구속 $\Phi^M(q)$ 의 첨가로 시스템의 자유도가 $n - m_m$ 개로 변한다. 이 절에서는 주어진 제약을 추종하기 위하여 식(19)에 $n - m_m$ 개의 구동구속을 첨가하여 시스템의 자유도가 영(zero)이 되게 한다. 식(19)에 구동구속을 첨가한 경우는 식(29)과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & \Phi_q^{MT} & \Phi_q^{DT} \\ \Phi_q^M & 0 & 0 \\ \Phi_q^D & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda^M \\ \lambda^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\gamma^M \\ -\gamma^D \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서, Φ_q^D 는 구동구속의 자코비안 행렬을 나타낸다. 구동구속 $\Phi^D(q, t)$ 는 다음과 같이 정의한다.⁽¹¹⁾⁽¹⁵⁾

$$\Phi^D(q, t) = q_i - q_i(t) = 0 \quad (30)$$

또한, i 는 각 모드별로 구동구속이 가해지는 각 조인트들을 나타낸다. 그리고 $-\gamma^D = \ddot{q}_i(t)$ 이다.

$q_i(t)$ 는 식(6)에서 식(9)의 기구학 해석을 통하여 얻은 상대 조인트 값으로 변환된 조인트 궤적이다. 본 논문의 경우에는 Table 2에 이들에 해당되는 변수들을 나타내었다.

Table 2 Kinematic model for each mode

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
No. of Generalized Coordinates(N_c)	Bodies 9 , $N_c = 9 \times 7 = 63$		
No. of Holonomic Constraints			
-Spherical Joint(J2,J5)	6	6	6
-Universal Joint(J4,J7)	8	8	8
-Revolute Joint(J3,J6,J8,J9)	20	20	20
-Euler Parameter	9	9	9
-Absolute Position(A,B,C)	$(2 \times 3) - 1 = 5$	3	3
-Ground(Feet)	6	6	6
Total No. of Holonomic Constraints(N_h)	54	49	52
DOF (= $N_c - N_h$)	9	14	11
Driving Constraints $q_i(t)$ (=No of DOF)	$q_{10}, q_{11}, q_{13}, q_{14}, q_{16}, q_{17}, q_{19}, q_{20}, q_{21}$	$q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18}, q_{19}, q_{20}, q_{21}$	$q_8, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{19}, q_{20}, q_{21}$

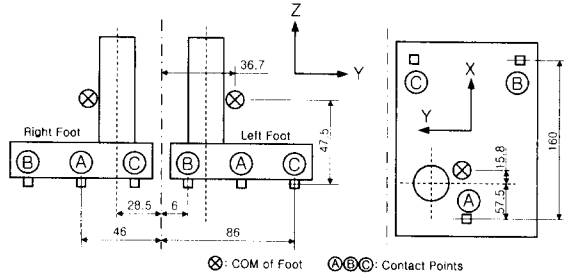
위의 식(29)를 대수적으로 풀이하면, 시스템의 조인트 가속도 \ddot{q} 와 지면반력 λ^M 과 각 조인트의 구동력 λ^D 를 각각 얻을 수 있다.

Table 2에는 보행 중 발의 지면과의 관계를 세 가지 모드로 분류하고 이에 따른 구속조건과 시스템의 자유도를 나타낸다. 각 조인트와 오일러 파라미터구속은 기구학적 구속조건 $\phi^K(q)$ 에 속하고, Fig. 5의 발바닥에 있는 세 개의 점들의 위치를 구속하는 위치구속과 발이 지면에 고정되어 있을 구속인 지면구속은 절대위치구속조건 $\phi^M(q)$ 에 속한다.⁽¹¹⁾

⁽¹⁵⁾ 또한 역동역학 해석을 위한 구동구속이 작용하는 일반화좌표들을 나타내었다. 이 구동구속들의 개수는 시스템의 자유도의 수와 일치한다.

모드 1은 Fig. 3의 (a)와 같이 한 발은 지면에 고정되어있고, 나머지 한발은 Fig. 5의 점B와 점C를 회전중심으로 하여 회전하면서 다리를 들어올리는 운동구간이다. 한쪽발의 점이 동시에 두 개가 접하는 점B와 점C에서, 절대위치구속의 여섯 개 방향 벡터중 한 개가 여유자유도를 가지므로 제거해 주어야 한다. 이때 시스템은 9자유도가 되므로, 역동

역학 해석을 위하여 아홉 개의 구동구속과 절대구속들을 식(29)에 대입하여 구동력과 지면반력을 계산한다.



(a) Frontal view (b) Top view of right foot

Fig. 5 Feet modeling with 3 points on the sole[mm]

모드 2는 Fig. 3의 (b)와 같이 한 발을 지면에 고정하고 스윙운동을 하는 구간이다. 이때의 시스템이 개형 구조를 이루므로 자유도는 조인트의 수와 같은 14자유도가 된다. 열 네 개의 구동구속을 Table 2에 주어진 일반화 좌표에 부과한다. 이 구동구속조건과 지면구속을 식(29)에 대입하여 이 모드에서 발생하는 구동력과 지면반력을 계산한다.

모드 3은 Fig. 3의 (c)와 같이 스윙운동을 마친 발이 지면에 착지하는 운동을 나타낸다. 이때, 지면에 접하는 순간의 발은 Fig. 5의 점 A가 지면과 접하고, 이 점A를 중심으로 회전운동을 하면서 지면에 착지한다. 이때의 절대구속은 한 개의 점에 대한 절대위치구속이 된다. 이때 시스템은 11자유도가 되므로 열 한 개의 구동구속과 절대위치구속을 식(29)에 대입하여 이 모드에서의 구동력과 지면반력을 계산한다.

세 개의 점이 동시에 지면과 접하는 발의 각 점의 지면반력은 지면구속조건을 이용하여 그 발의 CG에 작용하는 반력과 모멘트를 구한 후, 각 점에 대한 반력으로 분산시켜 결정한다.

6. 모의실험

본 논문의 모의실험은 이족로봇이 2sec동안 정지한 상태에서 초기위치를 결정한 후, 12sec동안 네 보를 동적 안정을 유지하면서 진진운동을 수행한다. 그리고 다시 2sec동안 정지하는 운동을 하는 총 16sec 동안 완전보행운동을 한다.⁽⁵⁾ 첫 보행을 하기 전의 구속조건의 상태는 Table 2의 모드 1과 같고, 보행을 마친 후의 정지상태는 모드 3과 같게 한다.

모의실험에 사용된 모델은 Fig. 1과 같으며 물성치는 Table 3과 같다. 그리고 운동에 필요한 물체 1과

Table 3 Material properties of biped system

Body Name {Body No.}	Length [m]	Mass [Kg]	Inertia [Kg · m ²]	Product of Inertia [Kg · m ²]
Pendulum {9}	0.380	15.367	Jxx: 0.10236 Jyy: 0.10466 Jzz: 0.05210	Jxy: 0.0 Jyz: 0.0 Jxz: 0.0001
Pendulum Base {8}	0.076	5.004	0.01908 0.02104 0.02075	0.0 0.0 -0.00563
Hip {1}	0.139	5.367	0.02473 0.02409 0.01832	0.0 0.0 -0.00046
Left Upper Leg {2}	0.150	5.459	1.38603 1.37726 0.01523	-0.00001 -0.00800 0.00005
Right Upper Leg {5}	0.150	5.459	1.38603 1.37726 0.01523	-0.00001 0.00800 -0.00005
Left Lower Leg {3}	0.150	3.714	0.02120 0.01930 0.00772	-0.00001 -0.00314 0.00005
Right Lower Leg {6}	0.150	3.714	0.02120 0.01930 0.00772	0.00001 0.00314 0.00005
Left Foot {4}	0.0885	2.014	0.00422 0.00773 0.00500	-0.00002 -0.00028 -0.00067
Right Foot {7}	0.0885	2.014	0.00422 0.00773 0.00500	0.00002 0.00028 -0.00067
Total	0.9835	46.124		

두 발의 절대 운동궤적을 Fig. 6과 Fig. 7에 각각 나타내었다. 물체 1의 운동은 지지발인 오른발의 발목을 중심으로 진행방향인 x축을 따라 2cm뒤에서 출발하여 56cm전진운동을 한다. 이때 물체 1의 높이는 40cm로 전 보행구간에서 동일하다. 왼발은 오른발의 발목에 대하여 진행방향으로 14cm뒤에서 점B와 점C를 중심으로 회전운동과 스윙운동을 한다. Fig. 7의 (b)처럼 모드 1과 모드 3에서 킥 작용(kick action)을 하는 발의 각도변화는 0.5sec동안 ± 10° 이다. 그리고 한 보폭은 14cm/step이고, 이때의 시간은 3sec/step이 되도록 한다.

이 절대 운동궤적들을 입력으로 식(25)와 식(26)을 풀이하여 균형추의 운동궤적을 얻는다. 이 균형추의 운동궤적을 통한 시스템의 보행이 식(27)과 식(28)을 만족하도록 보완한 균형추의 궤적과 제안된 ZMP의 궤적을 Fig. 8에 나타내었다. 여기서, 제안된 ZMP의 궤적은 Fig.5의 발바닥에서 발목을 중심으로 x축 방향으로 뒤로 5.75cm, 앞으로 10.25cm의 영역내에, y축 방향으로 발목을 중심으로 2.25cm안쪽으로, 5.75cm바깥쪽을 최대 범위로 하는 8×16cm영역을 안정영역으로 하여 ZMP의 궤적이 존

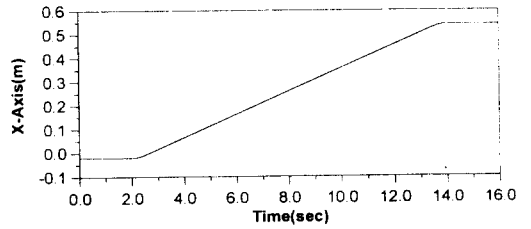
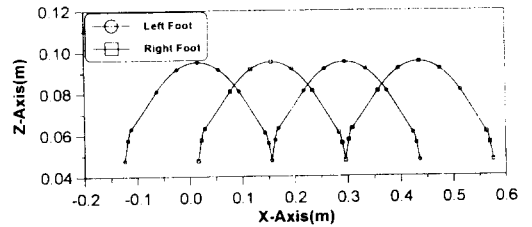
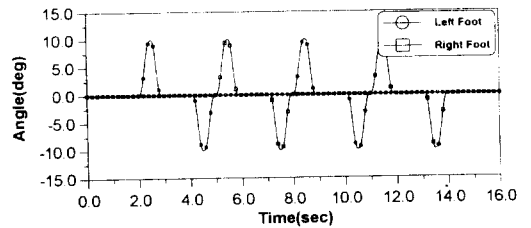


Fig. 6 Cartesian position trajectory of body



(a) Cartesian trajectories



(b) Angle trajectories

Fig. 7 Cartesian position and orientation of feet during four steps

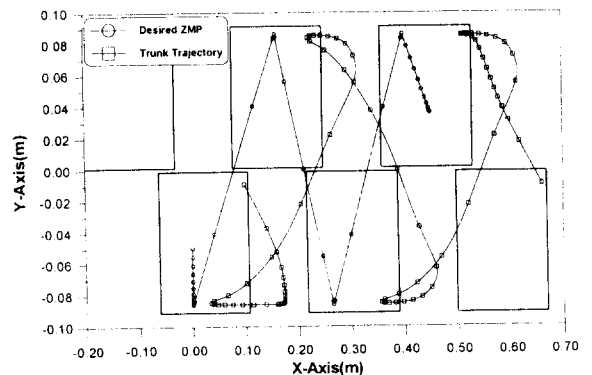


Fig. 8 Desired ZMP and trunk trajectories

재하도록 계획한다. 보행의 시작 전·후인 정지상태의 운동구간에서는 ZMP궤적이 2sec동안 느린 속도로 점진적인 운동을 하고, 연속보행구간에서는 발바닥 안정영역의 한 점에 ZMP가 존재하고 있다가 모드 3에서 모드 1로 변환하는 짧은 순간에 다

음 발의 안정영역으로 ZMP가 이동하는 연속 운동이 된다. 이에 따른 균형추의 운동궤적도 정지구간에서 비교적 속도가 느리며 큰 운동양상을 보이며, 연속보행의 경우에는 정지한 경우에 비하여 좌우대칭을 이루며 규칙적인 주기 운동을 한다.

본 논문에 사용된 FFT방법을 사용하여 독립선형미분방정식(25)와 식(26)을 풀이하기 위하여 입력 $a'(t)$ 와 $\beta'(t)$, 그리고 출력인 $\bar{x}_T(t)$ 와 $\bar{y}_T(t)$ 를 식(25)에 대하여 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{x}_T(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t) \quad (31)$$

$$a'(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (32)$$

여기서,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad A_0 = -\frac{a_0}{g_z}$$

$$A_k = \frac{a_k}{g_z + \bar{z}_T(k\omega)^2}, \quad B_k = \frac{b_k}{g_z + \bar{z}_T(k\omega)^2}$$

으로 나타낸다. 여기서 T는 전 운동구간을 하나의 주기로 16sec가 된다. 그리고 계산 간격(sampling time)이 0.001sec이므로 입력과 출력의 개수는 각각 16,000개이고, 푸리에 급수의 합 N은 DADS와의 엄밀한 결과를 비교하기 위하여 1,000이상을 적용하고, 제안된 ZMP궤적을 고려하기 위한 반복을 Fig. 9에서 나타낸 것처럼 세 번 이상 반복을 하여야 하므로, 실제 실시간 계산에는 문제가 있다.

얻어진 최적의 균형추 궤적과 물체 1과 두 발의 절대궤적을 식(6)에서 식(9)를 이용하여 위치와 속도해석을 수행하여 얻은 운동의 정보들을 다시 식(12)를 이용하여 조인트좌표의 값으로 변환한다. 이 조인트 좌표 값을 구동구속으로 식(29)를 풀면, 이 경우의 운동에 대한 구동력과 지면의 반력정보를 얻을 수 있다. Fig. 10은 각 다리와 균형추의 관절에 작용하는 구동력을 DADS의 결과와 함께 각각 나타내었다. 또한 Fig. 11은 이때 각 발바닥의 점들에 작용하는 최대 정지마찰력과 지면반력의 수평력의 합과의 관계를 각각의 발에 대하여 나타내었다.

Fig. 10에서는 구동력의 변화가 구속조건이 첨가 혹은 제거되는 각 모드의 변환구간인 지면과의 접촉 및 이탈순간에 큰 불연속이 발생한다. 특히 두 발 지지단계에서 스윙운동으로 바뀌는 구간에서 가장 큰 구동력의 불연속이 발생하고, 킥 작용의 변화구간인 모드 1과 모드 3사이에서도 순간적인

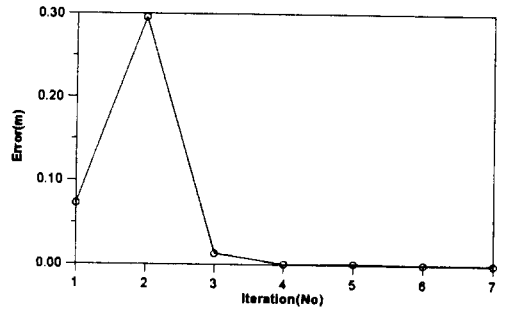
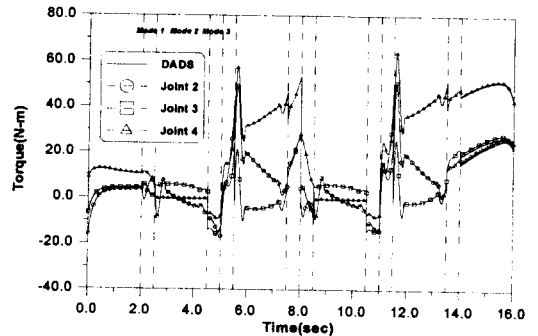
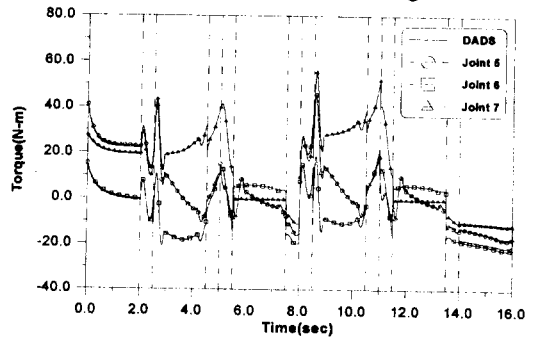


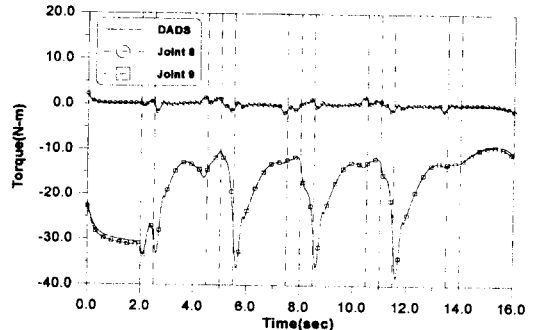
Fig. 9 Convergence of solution



(a) Driving torques for left leg



(b) Driving torques for right leg



(c) Driving torques for trunk

Fig. 10 Driving torques for joints and results of DADS

구동력의 변화가 발생한다. 이것은 균형추의 운동이 전반적으로 몸체의 운동에 비하여 뒤지는 운동을 하도록 보행파라미터가 선정되었음을 알 수 있다. 이 운동에서 킁 작용을 하는 발목관절(조인트 4와 7)에서 가장 큰 구동력이 작용하고 또한 큰 변화가 있으며, 무릎의 관절(조인트 3과 6)에서 가장 작은 구동력이 발생한다. 운동의 시작과 끝부분의 운동에서 DADS와의 결과에서 차이가 존재하고, 연속보행구간에서는 결과들이 서로 일치한다.

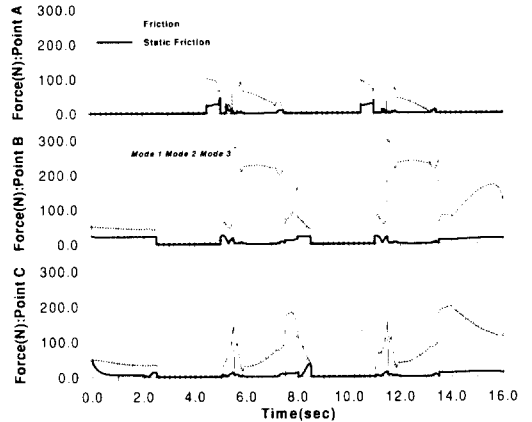
Fig. 11에서는 발바닥의 각 점들의 수평반력의 합이 정지마찰력보다 작게 작용하여 운동의 전 구간에서 미끄러짐의 현상이 없이 보행한다. 각 모드의 변환구간에서 점 A가 간헐적으로 지면에서 이탈현상이 발생하여 보행을 불안정하게 하지만, 나머지 두 점 B와 C, 그리고 다른 발의 지면 접촉점들이 마찰과 접촉의 조건을 만족하고 있으므로 미끄러짐을 방지하여 동적 보행을 보장한다. 이때에도 지면반력의 불연속이 발생하였고, 또한 균형추의 운동이 초기조건이나 관성항 등의 비대칭의 영향으로 지면반력의 값이 양 발바닥에서 서로 일치하지 못함을 알 수 있다.

Fig. 12는 본 논문에서 제안한 방법을 이용하여 모의실험을 수행한 경우, 동적 보행을 수행하는 모습을 막대그림(stick diagram)으로 각 방향에서 나타낸 것이다. 참고문헌 5의 결과와 비교할 때, 본 모의실험의 보행시간이 상대적으로 길어(참고문헌5: step:30cm, time:1.3sec/step) 동적인 보행특성보다 정적보행특성을 많이 가지게 되어 균형추가 큰 운동 형태를 보인다.

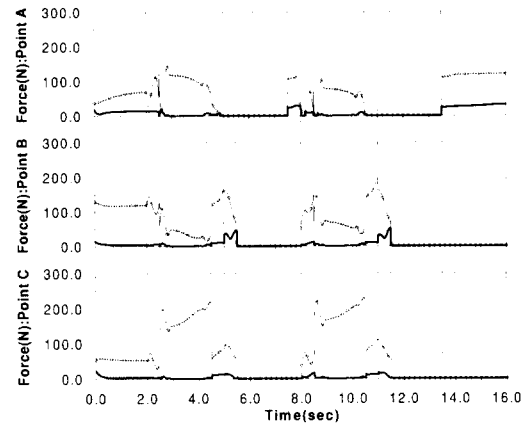
7. 결론

본 논문에서는 이족로봇을 다물체 동역학 방법을 이용하여 모델링하고, 속도변환행렬기법을 이용하여 조인트 좌표계로 운동방정식을 구성하였다. 또한 동적 보행을 위하여 균형추의 운동궤적을 ZMP의 조건뿐만 아니라 지면과의 접촉 및 마찰의 조건을 모두 만족하도록 결정하였다. 그리고 이 운동에 필요한 구동력을 계산하였으며, 이 결과를 DADS와 비교하여 정상보행구간에서는 서로 일치하였다. 본 연구를 통하여 다음을 알 수 있었다.

(1) 다물체 동역학 기법 중, 비교적 운동방정식의 구성과 개념상 쉬운 절대좌표계에서 복잡한 이족로봇의 운동방정식을 구성한 후, 속도변환기법을



(a) Normal reaction forces for left foot



(b) Normal reaction forces for right foot

Fig. 11 Normal reaction forces at point A, B, and C of feet ($\mu_s = 0.7$)

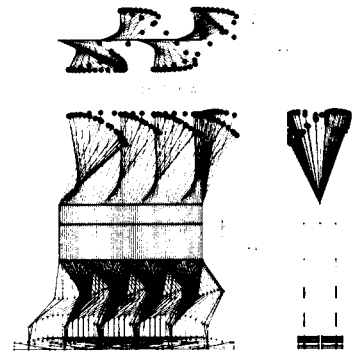


Fig. 12 Simulation for dynamic walking (length:14cm/step, time:3sec/step)

이용하여 최소의 운동방정식을 가지는 조인트좌표 계로의 변환을 체계적으로 수행할 수 있었다.

(2) 구속조건이 한 보폭에서 세 가지 모드로 변화를 하면서 보행을 수행하였다. 계속적인 보행모드의 변화에도 구속조건이 벗어남이나 시스템의 발산 등의 현상 없이 안정적이고 정밀하게 해석을 수행하였다.

(3) ZMP 방정식의 모델이 질점으로 이루어져 동적 보행을 위한 기준으로서는 불완전하였다. 그래서 지면의 접촉과 마찰의 조건을 추가하여 이들의 조건을 모두 만족하는 균형추의 운동을 얻어 동적으로 보다 안정된 보행을 보장할 수 있었다.

(4) 동적 보행으로 중 발바닥에 존재하는 세 개의 점이 스윙운동모드에서는 모두 접촉과 마찰조건을 모두 만족하였지만, 두 발 지지단계인 모드 1과 모드 3에서는 점 A가 간헐적으로 지면에서 이탈하여 불안정함을 보였으나, 나머지 점 B와 C 및 나머지 발의 점들이 접촉 및 마찰의 조건을 모두 만족하여 동적 안정을 유지함을 알 수 있었다.

앞으로, 두 발 지지단계에서 발생하는 점 A의 간헐적인 지면이탈현상과 각 모드의 변화에서 발생하는 구동력 및 지면반력의 불연속을 감소시키기 위한 제어 알고리즘을 개발해야 할 것이다.

후기

본 연구는 1999년도 정보통신부 '정보통신우수 대학원' 지원사업의 일환으로 수행하였음.

참고문헌

1. J. Furusho and A. Sano, "Sensor-Based Control of a Nine-Link Biped," J. of Robotics Research, Vol. 2, No. 2, pp. 83-98, 1990.
2. C. L. Shin, "The Dynamics and Control of a Biped Walking Robot with Seven Degrees of Freedom," J. of Dynamic, Systems, Measurement, and Control, Vol. 118, pp. 683-690, 1996.
3. K. Mitobe, N. Mori and Y. Nasu, "Control of a Biped Walking Robot during the Double Support Phase," Autonomous Robots, Vol. 4, pp. 287-296, 1997.
4. M. Ito and T. Narikiyo, "Analysis and Control of Biped Locomotion Subject to Constraints," Advanced Robotics, Vol. 1, No. 2, pp. 165-176, 1986.
5. A. Takanishi, "Robot Biped Walking Stabilized with Trunk Motion," Robots and Biological Systems, Towards a New Bionics, Springer-Verlag, pp. 271-291, 1989.
6. W. Blajer and W. Schiehlen, "Walking without Impacts as a Motion/Force Control Problem," J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 114, pp. 660-665, 1992.
7. In-Gyu Park and Jin-Geol Kim, "A Study on the Control for Impactless Gait of Biped Robot," Proc. 12th KACC, pp. 536-539, 1997.
8. R. A. Wehage and E. J. Haug, "Generalized Coordinate Partitioning of Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems," J. of Mechanical Design, Vol. 104, pp. 247-255, 1982.
9. P. E. Nikravesh and I. S. Chung, "Application of Euler Parameters to the Dynamic Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems," J. of Mechanical Design, Vol. 104, pp.785-791, 1982.
10. P. E. Nikravesh and G. Gim, "Systematic Construction of the Equations of Motion for Multibody Systems Containing Closed Kinematic Loops," J. of Mechanical Design, Vol. 115, pp.143-149, 1993.
11. S. S. Kim and M. J. Vanderploeg, "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems using Velocity Transformations," J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 108, pp.176-182, 1986.
12. Y. Fujimoto, S. Obata and A. Kawamura, "Robust Biped Walking with Active Interaction Control between Foot and Ground," Conf. on Robotics and Automation, pp. 2030-2035, 1998.
13. DADS User Manual. Ver. 7.5, Computer Aided Design Software Inc., Oakdale, IA, USA.
14. S. C. Wu, S. M. Yang, and E. J. Haug, "Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Stiction, Impact, and Constraint Addition-Deletion," Univ. of Iowa Tech. Report No. 84-19, 1984.
15. E. J. Haug, "Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Vol. I, Basis Methods," Allyn and Bacon, 1989.
16. Higdon, Stiles, Davis, Evces, and Weese, "Engineering Mechanics, Dynamics," Prentice Hall, 1979.