

# 자동차 시트 및 마네킹 시스템의 자유 진동

김 성 곁\*

## Free Vibration of Car Seat and Mannequin System

Seong Keol Kim\*

### ABSTRACT

A simplified modeling approach of free vibration for occupied car seats was demonstrated to be feasible. The model, consisting of interconnected masses, springs and dampers, was initially broken down into subsystems and experiments conducted to determine approximate values for model parameters, which were each stiffness and damping value. Nonlinear equations of motion were derived, and model parameters obtained in experiments were applied to these equations. A mathematical model of free vibration for car seat and mannequin system was built with 7 degrees of freedom. In order to calculate natural frequencies and the corresponding mode shapes, linear equations of motion were obtained through linearization. In order to explore the effects of each model parameter, free vibration analyses were performed.

**Key Words** : Free Vibration Analysis(자유 진동 해석), Linearization(선형화), Viscoelastic Foam(점탄성 폼), Nonlinear Differential Equation(비선형 방정식), Model Parameter(모델 파라미터)

### 1. 서론

오늘날, 자동차 시트 설계는 주로 경험에 의존을 하고 있으며, 정적 안락성에 대한 고려와 안전성에 영향을 받고 있다. 자동차 시트에 앉아 있는 탑승자의 거동 연구가 현재 다양하게 진행이 되고 있으며, 많은 수의 연구가 실험에 근거를 두고 있다<sup>[1-3]</sup>. 특히, 탑승자의 등 부위의 안락성<sup>[4,5]</sup>과 앉는 자세<sup>[6]</sup>에 대한 연구가 각광을 받고 있으며, 탑승자 머리 부위와 시트의 진동을 측정하기 위해 새로운 방법들이 개발되기도 하였다<sup>[2,3]</sup>.

일반적으로, 자동차 탑승자는 다양한 형태의 진동 원으로부터 가진을 받으며, 탑승자와 탑승자의 앉는 자세 및 시트의 배치에 따라 자동차 시트

와 탑승자로 이루어진 시스템의 동적 특성이 변하기 때문에, 모든 조건을 만족시키며, 자동차 시트를 최적화하여 설계하는 것은 거의 불가능하다. 이러한 이유로, 탑승자의 안락성을 최고로 하기 위하여, 자동차 시트의 재료인 점탄성 폼에 대한 연구가 자동차 시트 제작 회사를 중심으로 실시되고 있다<sup>[7,8]</sup>.

자동차 시트와 탑승자 시스템에 대한 모델링 및 연구방법으로 실험에 의존을 하거나<sup>[9,10]</sup>, 이 시스템을 일련의 질량과 스프링 그리고 감쇠로 이루어진 단순 모델로 해석을 하고 있다<sup>[11]</sup>. 그리고 현재에는 제 3의 접근 방법으로 유한 요소 법이 컴퓨터 기술의 발달과 더불어 수행되고 있다. 실험적 모델<sup>[9,10]</sup>들은, 시스템의 응답을 예측하기 위해

\* 국민대학교 자동차 공학 전문대학원

임피이던스나 전달률 등의 방법을 사용하고 있으며, 선형 모델을 채택하고 있다.

자동차 시트에 앉아 있는 탑승자의 진동 거동을 가장 효과적으로 모델링을 한 연구방법은 Nishiyama<sup>[12-14]</sup>가 제시를 하였으며, 시스템 파라미터 그리고 탑승자의 앉는 자세 및 시트의 배치 변화에 대한 시스템의 동적 거동을 연구하기 위해 Nishiyama 는 시뮬레이션 모델을 제시하였다.

본 논문에서는 Nishiyama 가 제시한 모델을 근거로 하여, 미국의 표준 남성에 해당하는 마네킹을 제작하고, 자동차 시트와 마네킹으로 이루어진 시스템에 대하여 새로운 수학적 모델을 제시한다. 그리고 각각의 시스템 파라미터를 실험적으로 도출하고, 시스템 파라미터 값의 변화에 따른 자유진동 해석을 수행하고자 한다.

## 2. 자동차 시트와 마네킹 시스템의 수학적 모델

본 논문에서 제시한 시스템의 모델링 접근으로 Nishiyama<sup>[12-14]</sup>의 방법을 사용하였으나, 운동 방정식을 유도하는 과정에서 Nishiyama 의 운동 방정식에 오류가 있어, 자동차 시트와 마네킹에 대한 새로운 수학적 모델을 Fig. 1 과 같이 구성하였다. 새로운 수학적 모델에서는 시트의 등받이와 시트 베이스를 비틀림 스프링으로 연결하였는데, Nishiyama 논문에서는 강 결합으로 모델링 하였다. 이는 비틀림 스프링을 모델에 채택하여 각각의 시스템 파라미터 변화에 따른 자유진동해석에서 시트 등받이의 운동이 다양한 형태로 나타나고 있어 등받이와 시트 베이스를 비틀림 스프링으로 연결하여 모델링으로 하는 것이 타당함을 알 수 있었다. 그리고 본 모델에서는 마네킹과 시트 쿠션을 두개의 선형 스프링( $k_3$ 와  $k_4$ )과 두개의 댐퍼( $c_3$ 와  $c_4$ )로 연결하였다. 실험을 위해 설치되고 제작된 자동차 시트와 마네킹 시스템에서는 마네킹과 등받이의 아래쪽 부분이 서로 닿지 않아 실험적으로  $k_2$ 와  $c_2$ 를 구하지 않았다. 그러나, 전체 시스템 해석에서 마네킹의 등 부위와 시트의 접촉 부위를 하나의 스프링( $k_1$ )과 댐퍼( $c_1$ )로 모델링을 하는 것은 타당하지 않으며, 이는 ‘자동차 시트 및 마네킹 시스템의 강제 진동’ 논문 중 실험적 해석에서 알 수 있듯이 대부분의 모드에서 마네킹 흉부의 피칭 운동이 발생되어  $k_2$ 에 필요성을 요구했다.

또한 등 허리 조인트와 가까운 곳에서는 시트와 마네킹이 서로 접촉을 하지 않았으나 등 중간 부위에서 서로 접촉을 하고 있다. 실험적으로  $k_2$ 를 도출하지 못했으나, 등 중간 부위에서의 접촉을 나타내는 수학적 모델을 위해 등가적으로 다양하게  $k_2$  값을 변화시키면서 자유 진동 해석을 수행하였다.  $k_1$ 와  $c_1$ 는 마네킹의 흉부 위 부분과 등받이의 위 부분을 연결하는 스프링과 댐퍼이다. Nishiyama 모델에서 목과 둔부 그리고 무릎 조인트에 비틀림 댐퍼( $T_1, T_2, T_3$ )를 사용했으며, 본 논문에서도 동일한 댐퍼를 도입하였으나 자유진동해석에서는 사용하지 않았다.

### 2.1 운동 방정식

본 모델에서의 모든 스프링은 댐퍼는 선형이다. 자유진동을 위한 본 시스템의 비선형성은 마네킹 및 자동차 시트의 기하학적 특성으로 기인된다. 자동차 시트와 마네킹 시스템은 다음과 같이 7 자유도계로 구성된다: 둔부 조인트의 수직 및 수평 운동, 목과 흉부, 허벅지 그리고 무릎 조인트의 각 운동, 마지막으로 등받이 조인트의 각 운동. 본 논문에서 사용된 각각의 자유도에 대한 동적 변수로:  $\xi$ , 둔부 조인트의 절대 수평 변위;  $\zeta$ , 둔부 조인트의 절대 수직 변위;  $\Theta_1$ , 목의 절대 각 변위;  $\Theta_2$ , 흉부의 절대 각 변위;  $\Theta_3$ , 허벅지의 절대 각 변위;  $\Theta_4$ , 무릎의 절대 각 변위;  $\Theta_5$ , 등받이의 절대 각 변위 등이다.

이외의 사용된 파라미터로, 각 부위의 길이, 질량, 질량 관성 모멘트, 스프링과 감쇠 값 등이 있으며, 이들에 대한 자세한 설명은 부록 A 의 Table A 에서 나타내었다. 또한 Nishiyama 와 본 논문에서 사용한 이들 파라미터 값의 비교가 부록 A 의 Table A 에 제시되었다.

시스템의 자유진동을 위한 운동 방정식을 유도하기 위해 운동 에너지,  $T$ , 위치에너지,  $U$  등이 식 (1)과 정의된다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_i \dot{z}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 I_i \dot{\Theta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_i \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} J_s \dot{\Theta}_s^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{z}_s^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{x}_s^2, \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 k_i \delta_i^2 + \frac{1}{2} k_4 \delta_{4k}^2 + \frac{1}{2} k_5 \delta_5^2 + \frac{1}{2} k_s \Theta_s^2,$$

여기서,

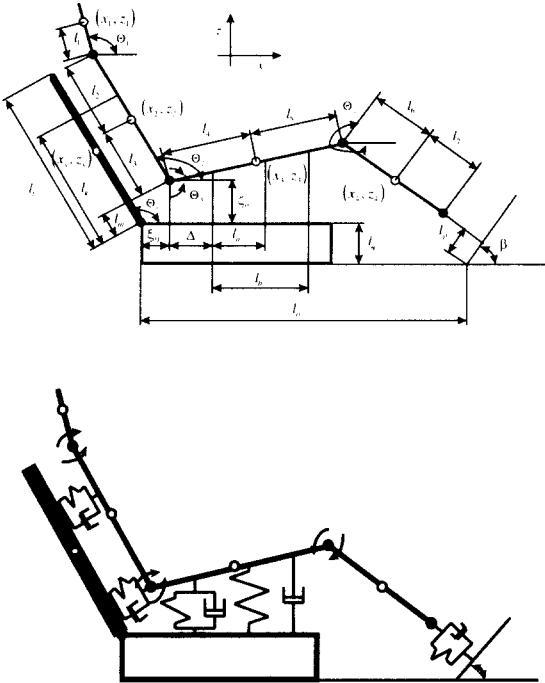


Fig. 1 Schematic of 7 DOF model of the car seat and mannequin system

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \xi + (l_2 + l_1) \cos \Theta_2 + l_1 \cos \Theta_1, & z_1 &= z + \zeta + (l_2 + l_1) \sin \Theta_2 + l_1 \sin \Theta_1, \\
 x_2 &= \xi + l_1 \cos \Theta_2, & z_2 &= z + \zeta + l_1 \sin \Theta_2, \\
 x_3 &= \xi + l_1 \cos \Theta_1, & z_3 &= z + \zeta + l_1 \sin \Theta_1, \\
 x_4 &= \xi + (l_1 + l_4) \cos \Theta_1 + l_6 \cos \Theta_4, & z_4 &= z + \zeta + (l_1 + l_4) \sin \Theta_1 + l_6 \sin \Theta_4, \\
 x_5 &= 0.5l_1 \cos \Theta_1, & z_5 &= z + 0.5l_1 \sin \Theta_1.
 \end{aligned}$$

식 (1)을 Lagrange 방정식에 대입하면:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0, (r=1, \dots, 7) \tag{2}$$

다음의 비선형 미분방정식이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} -M_1 & 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 \\ D_3 & D_3 & -M_{10} & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & E_3 & E_1 & -M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & G_3 & 0 & 0 & -M_{12} & G_1 & 0 & 0 \\ H_2 & H_3 & 0 & 0 & H_1 & -M_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\zeta} \\ \ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{\Theta}_2 \\ \ddot{\Theta}_3 \\ \ddot{\Theta}_4 \\ \ddot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_5 \\ -B_5 \\ -D_2 \\ -E_4 \\ -G_4 \\ -H_4 \\ -S_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= M_2 \sin \Theta_1, & A_2 &= (M_3 + M_6) \sin \Theta_2, \\
 A_3 &= (M_4 + M_7) \sin \Theta_3, & A_4 &= M_5 \sin \Theta_4, \\
 A_5 &= M_2 \cos \Theta_1 \dot{\Theta}_1^2 + (M_3 + M_6) \cos \Theta_2 \dot{\Theta}_2^2 \\
 &+ (M_4 + M_7) \cos \Theta_3 \dot{\Theta}_3^2 + M_5 \cos \Theta_4 \dot{\Theta}_4^2 - \Delta(\xi),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -M_2 \cos \Theta_1, & B_2 &= -(M_3 + M_6) \cos \Theta_2, \\
 B_3 &= -(M_4 + M_7) \cos \Theta_3, & B_4 &= -M_5 \cos \Theta_4, \\
 B_5 &= M_2 \sin \Theta_1 \dot{\Theta}_1^2 + (M_3 + M_6) \sin \Theta_2 \dot{\Theta}_2^2 \\
 &+ (M_4 + M_7) \sin \Theta_3 \dot{\Theta}_3^2 + M_5 \sin \Theta_4 \dot{\Theta}_4^2 - \Delta(\zeta), \\
 D_1 &= -M_8 \cos(\Theta_1 - \Theta_2), & D_2 &= A_1, & D_3 &= B_1, \\
 D_4 &= -M_8 \sin(\Theta_1 - \Theta_2) \dot{\Theta}_2^2 - \Delta(\Theta_1), & E_1 &= D_1, & E &= \dots, \\
 E &= \dots, & E_4 &= M_8 \sin(\Theta_1 - \Theta_2) \dot{\Theta}_2^2 - \Delta(\Theta_2), \\
 G_1 &= -M_9 \cos(\Theta_3 - \Theta_4), & G &= \dots, & G_3 &= \dots, \\
 G_4 &= -M_9 \sin(\Theta_3 - \Theta_4) \dot{\Theta}_4^2 - \Delta(\Theta_3), \\
 H_1 &= -M_9 \cos(\Theta_4 - \Theta_3), & H_2 &= M_5 \sin \Theta_4, \\
 H_3 &= -M_5 \cos \Theta_4, & H_4 &= -M_9 \sin(\Theta_4 - \Theta_3) \dot{\Theta}_3^2 - \Delta(\Theta_4), \\
 S_1 &= J_s + \frac{m_s l_1^2}{4}, & S_2 &= -k_s (\Theta_s - \Theta_{s,0}) - \Delta(\Theta_s)
 \end{aligned}$$

위의 식 중, Δ에 관한 항은 부록 B에서 정의 했 으며, 질량 파라미터, M<sub>i</sub>에 대한 정의는 다음과 같 다.

$$\begin{aligned}
 M_2 &= m_1 l_1, & M_3 &= m_2 l_3, & M_4 &= m_3 l_4, & M_5 &= m_4 l_6, \\
 M_6 &= m_1 (l_2 + l_3), & M_7 &= m_4 (l_4 + l_5), \\
 M_8 &= m_1 l_1 (l_2 + l_3), & M_9 &= m_4 l_6 (l_4 + l_5), \\
 M_{10} &= I_1 + m_1 l_1^2, & M_{11} &= I_2 + m_1 (l_2 + l_3)^2 + m_2 l_3^2, \\
 M_{12} &= I_3 + m_4 (l_4 + l_5)^2 + m_3 l_4^2, & M_{13} &= I_4 + m_4 l_6^2, \\
 M_1 &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4.
 \end{aligned}$$

유도된 방정식은 비선형 항들을 내포하고 있 어, 본 논문의 목적인 자유 진동 해석을 수행하여 시스템의 고유 진동수와 그와 관련된 모드 형상을 구하기 위해서는 유도된 운동 방정식의 선형화 과 정이 필요하다.

## 2.2 운동 방정식의 선형화

자유 진동 해석을 수행하기 위해서, 앞에서 유 도된 비선형 운동 방정식은 선형화 되어야 하며, 감쇠와 관련한 모든 항들은 제거되어야 한다. 기 하학적 비선형은 미소 운동을 가정하고 Taylor 급 수로 전개하여 새로운 선형 운동 방정식을 유도하 였다. 다음 식들은 선형화에 관련된 식이다.

$$\sin \Theta'_i \approx \Theta'_i, \cos \Theta'_i \approx 1, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \Theta_i &= \sin(\Theta_{i,0} + \Theta'_i) \approx \sin \Theta_{i,0} + \cos \Theta_{i,0} \Theta'_i, \\
 \cos \Theta_i &= \cos(\Theta_{i,0} + \Theta'_i) \approx \cos \Theta_{i,0} - \sin \Theta_{i,0} \Theta'_i.
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \quad (6)$$

최종적으로 구해진 시스템의 선형 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 & 0 \\ 0 & M_1 & -B_1 & -B_2 & -B_3 & -B_4 & 0 \\ -D_2 & -D_3 & M_{10} & -D_1 & 0 & 0 & 0 \\ -E_2 & -E_3 & -E_1 & M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -G_2 & -G_3 & 0 & 0 & M_{12} & -G_1 & 0 \\ -H_2 & -H_3 & 0 & 0 & -H_1 & M_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}' \\ \ddot{\zeta}' \\ \ddot{\Theta}'_1 \\ \ddot{\Theta}'_2 \\ \ddot{\Theta}'_3 \\ \ddot{\Theta}'_4 \\ \ddot{\Theta}'_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{411} & K_{412} & K_{413} & K_{414} & K_{415} & K_{416} & K_{417} \\ K_{421} & K_{422} & K_{423} & K_{424} & K_{425} & K_{426} & K_{427} \\ K_{431} & K_{432} & K_{433} & K_{434} & K_{435} & K_{436} & K_{437} \\ K_{441} & K_{442} & K_{443} & K_{444} & K_{445} & K_{446} & K_{447} \\ K_{451} & K_{452} & K_{453} & K_{454} & K_{455} & K_{456} & K_{457} \\ K_{461} & K_{462} & K_{463} & K_{464} & K_{465} & K_{466} & K_{467} \\ K_{471} & K_{472} & K_{473} & K_{474} & K_{475} & K_{476} & K_{477} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi' \\ \zeta' \\ \Theta'_1 \\ \Theta'_2 \\ \Theta'_3 \\ \Theta'_4 \\ \Theta'_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} C_{411} & C_{412} & C_{413} & C_{414} & C_{415} & C_{416} & C_{417} \\ C_{421} & C_{422} & C_{423} & C_{424} & C_{425} & C_{426} & C_{427} \\ C_{431} & C_{432} & C_{433} & C_{434} & C_{435} & C_{436} & C_{437} \\ C_{441} & C_{442} & C_{443} & C_{444} & C_{445} & C_{446} & C_{447} \\ C_{451} & C_{452} & C_{453} & C_{454} & C_{455} & C_{456} & C_{457} \\ C_{461} & C_{462} & C_{463} & C_{464} & C_{465} & C_{466} & C_{467} \\ C_{471} & C_{472} & C_{473} & C_{474} & C_{475} & C_{476} & C_{477} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\xi}' \\ \dot{\zeta}' \\ \dot{\Theta}'_1 \\ \dot{\Theta}'_2 \\ \dot{\Theta}'_3 \\ \dot{\Theta}'_4 \\ \dot{\Theta}'_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

위의 행렬의 각 항들은 앞에서 그리고 부록 C에서 정의하였다.

선형 방정식 (7)은, 첫째, 마네킹의 질량과 질량 관성 모멘트에, 둘째, 사용된 모델의 기하학적 파라미터에, 셋째, 마네킹의 초기 앉는 자세 파라미터에, 넷째, 자동차 시트와 마네킹을 연결하는 등가의 선형 스프링 및 감쇠 값에 각각 의존한다. 부록 A의 표에 제시한 마네킹의 기하학적 파라미터 값들은 마네킹 제작자가 제공 및, 본 연구자들의 실측에 의해 계산되었다. 또한 Fig. 1에서 보여준 것 같이 수학적 모델에서 사용한, 마네킹과 자동차 시트를 연결하는 등가의 스프링 및 감쇠 값들( $k_1, k_3, k_4, k_5, c_1, c_3, c_4, c_5$ )은 다음 장에서 서술된 바와 같이 실험적으로 평가되었다.

### 3. 모델 파라미터의 실험적 평가

Fig. 1에서 보여준 것 같이 수학적 모델에는 많은 파라미터( $k_1, c_1, k_3, c_3, k_4, c_4, k_5, c_5$ )가 있으며, 이 값들은 실험적으로 결정되어야 한다. 실험에 의한 모델 파라미터의 추출에 앞서, 마네킹의 머리 부분이 제거된 마네킹 및 자동차 시트 시스템의 운동 방정식을 유도한다. ‘자동차 시트 및 마네킹 시스템의 강제 진동’ 논문에서 제시된 바와 같이 마네킹의 머리에 있는 목 조인트가 시스템의 주파수 응답을 측정할 때 많은 문제를 발생시켰다. 마네킹의 머리부위가 목 조인트의 부실함으로 인해 가진기 위에서 가진을 받는 동안 전혀 예측을 할 수 없는 운동을 나타내어 본래의 연구 목적인 탑승자와 자동차 시트의 동적해석을 저해하여 제거한 후 시험 및 해석을 수행하였다. 탑승자 파라미터  $k_2$ 와  $c_2$ 는 초기에 자동차 등받이와 마네킹의 아래쪽 부분이 서로 접촉을 하지 않아 실험적으로 계산되지 않았으나, 수학적 모델에서 사용한 각각의 스프링 상수들이 등가의 개념이므로, 다음 장에서 수행한 자유 진동 해석에서는  $k_1$ 의 상수 배로 가정하여 다양하게 값을 변화시키면서 시스템의 고유 진동수 및 모드 형상을 계산하였다.

### 3.1 마네킹 모델의 수정

앞에서 유도한 자동차 시트와 마네킹으로 이루어진 시스템의 비선형 방정식 (3)과 선형 방정식 (7)에서 마네킹의 머리를 제거하기 위해서는 머리 부분과 관련된 항들이 모두 제거 되어야 한다, 즉 마네킹 머리의 질량,  $m_1$ , 머리의 질량 관성 모멘트,  $I_1$ , 목 조인트의 마찰 감쇠력,  $T_1$  등이다. 이 파라미터들에 0을 대입한 후 시스템의 운동 방정식을 행렬식 형태로 다시 기술하면 아래의 식과 같이 6 자유도 계의 모델이 된다.

$$\begin{bmatrix} -M_1 & 0 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & -M_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ E_2 & E_3 & -M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & G_3 & 0 & -M_{12} & G_1 & 0 \\ H_2 & H_3 & 0 & H_1 & -M_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}' \\ \ddot{\zeta}' \\ \ddot{\Theta}'_2 \\ \ddot{\Theta}'_3 \\ \ddot{\Theta}'_4 \\ \ddot{\Theta}'_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -A_5 \\ -B_5 \\ -E_4 \\ -G_4 \\ -H_4 \\ -S_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

머리 부분이 없는 마네킹과 자동차 시트 시스템의 고유 진동수와 모드 형상을 구하기 위하여 위의 행렬식을 선형화 하였다. 여기에서 사용된 모든 가정과 식은 7 자유도 계의 선형화 과정과

동일하며, 식 (9)과 같이 6 자유도 계의 선형 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -M_1 & 0 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & -M_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ E_2 & E_3 & -M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & G_3 & 0 & -M_{12} & G_1 & 0 \\ H_2 & H_3 & 0 & H_1 & -M_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \zeta' \\ \ddot{\theta}'_2 \\ \ddot{\theta}'_3 \\ \ddot{\theta}'_4 \\ \ddot{\theta}'_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{411} & K_{412} & K_{414} & K_{415} & K_{416} & K_{417} \\ K_{421} & K_{422} & K_{424} & K_{425} & K_{426} & K_{427} \\ K_{441} & K_{442} & K_{444} & K_{445} & K_{446} & K_{447} \\ K_{451} & K_{452} & K_{454} & K_{455} & K_{456} & K_{457} \\ K_{461} & K_{462} & K_{464} & K_{465} & K_{466} & K_{467} \\ K_{471} & K_{472} & K_{474} & K_{475} & K_{476} & K_{477} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \zeta' \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \\ \theta'_4 \\ \theta'_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{411} & C_{412} & C_{414} & C_{415} & C_{416} & C_{417} \\ C_{421} & C_{422} & C_{424} & C_{425} & C_{426} & C_{427} \\ C_{441} & C_{442} & C_{444} & C_{445} & C_{446} & C_{447} \\ C_{451} & C_{452} & C_{454} & C_{455} & C_{456} & C_{457} \\ C_{461} & C_{462} & C_{464} & C_{465} & C_{466} & C_{467} \\ C_{471} & C_{472} & C_{474} & C_{475} & C_{476} & C_{477} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}' \\ \dot{\zeta}' \\ \dot{\theta}'_2 \\ \dot{\theta}'_3 \\ \dot{\theta}'_4 \\ \dot{\theta}'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

위의 행렬식의 각 항들은 앞 장과 부록 C에서 나타내었다.

### 3.2 $k_3, c_3$ 와 $k_4, c_4$ 의 측정

수학적 모델에서 마네킹의 둔부 및 허벅지와 자동차의 시트 쿠션 사이를 연결하는  $k_3, k_4$ 와  $c_3, c_4$  값을 추출하기 위하여, 마네킹의 둔부와 허벅지 부분을 마네킹에서 분리하여 자동차 시트에 설치를 하였다. 분리된 마네킹의 둔부와 허벅지에, 전체 마네킹이 자동차 시트에 앉아 있을 때와 동일한 효과를 나타내기 위해 적절한 질량을 부가하였다. 마네킹 각 부위의 질량크기를 알기 위해 마네킹의 유한 요소 모델을 이용하였고, 마네킹이 시트에 앉아 있을 때 발생하는 정적 변위와 동일하게 마네킹의 둔부와 허벅지에 질량을 분포시켰다. 실험에 대한 도식적인 표현은 Fig. 2에서 보여주고 있다.

전체 시스템을 Fig. 2의 (a)와 같이 구성한 후, 정적 평형 상태에 도달하기 위해 약 30분 정도를 기다리고, 그 다음 랜덤 가진을 10분 동안 가하면서 시스템의 주파수 응답을 측정하였다. 그 결과

로, 상하로 움직이는 모드와 피치 모드 등 두개의 진동 모드를 구하였다. 두 개의 진동 모드 중에서 낮은 고유 진동수를 갖는 모드는 마네킹의 피치 운동을, 높은 고유 진동수를 갖는 모드는 마네킹의 상하 운동을 나타낸다. 시간 영역에서의 가속도 응답이 두 가지 초기 조건에 대하여 마네킹의 둔부와 무릎에서 측정되었고, 이 값들을 이용하여 두 쌍의 고유 진동수와 감쇠 비를 계산하였다. 실험에서 구한 값들을, 자동차 시트의 질량,  $M_T$ 와 질량 관성 모멘트,  $J_T$ , 그리고 Fig. 2의 (a)와 같이 구성된 2 자유도 계에 적용하여  $k_3, k_4$ 와  $c_3, c_4$ 를 구한다. 그러나 Fig. 2의 (a)에서 제시한 모델의 배열은 모든 조건에 대하여 풀 수가 없어, Fig. 2의 (b)와 같이  $k_3$ 와  $c_3$ 는 동일한 위치에 있고,  $k_4$ 와  $c_4$ 는 다른 위치에 있는 새로운 모델을 제시하였다.

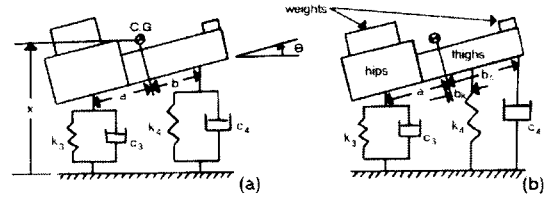


Fig. 2 (a) Schematic of mass-loaded partial mannequin seat cushion system, and (b) simple mass-spring-damper model of the system

제시된 2 자유도 계 모델에 대하여 운동 방정식이 유도 되어 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_T & 0 \\ 0 & J_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 + c_4 & b_c c_4 - a c_3 \\ b_c c_4 - a c_3 & b_c^2 c_4 + a^2 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 + k_4 & b_k k_4 - a k_3 \\ b_k k_4 - a k_3 & b_k^2 k_4 + a^2 k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

위 식에서 알 수 있듯이 이 방정식은 감쇠 및 강성 행렬에서 커플된 형태를 나타내고 있으며, 일반적으로 알려져 있듯이 대각요소에 있는 값보다 상당히 작아, 실험에서 구한 모드 형상과 맞추기 위해 이 항들을 제거하였다.

$$b_c c_4 - a c_3 = 0, b_k k_4 - a k_3 = 0 \quad (11)$$

식 (11)를 식 (10)에 대입하면, 운동 방정식은, 계의 피치 운동과 상하 운동이 서로 독립된 선형 미분 방정식이 되며, 첫번째 방정식은 계의 상하 운동 모드를, 두 번째 방정식은 피치 모드를 나타낸다. 상하 운동 및 피치 모드 각각에 대한 고유 진동수( $\omega_\beta$ 와  $\omega_\rho$ )와 감쇠비( $\zeta_\beta$ 와  $\zeta_\rho$ )는 실험에서 측

정된 값으로부터 계산이 된다.

$$c_3 + c_4 = 2M_T \zeta_b \omega_b, k_3 + k_4 = M_T \omega_b^2, \quad (12)$$

$$b_c^2 c_4 + a^2 c_3 = 2J_T \zeta_p \omega_p, b_k^2 k_4 + a^2 k_3 = J_T \zeta_p \omega_p^2$$

식 (11)와 (12)으로부터 6 개의 방정식을 도출 하였으나, 미지수는 7 개( $a, b_c, b_k, k_3, k_4, c_3, c_4$ )이므로 한 개의 식이 더 필요하다. 그런데,  $a$  값은 실험에서 정해진 값( $a = 0.139$  m)이므로 나머지 6 개의 값들도 계산이 가능하며, 다음과 같은 값을 갖는다,  $b_c = 0.134$  m,  $b_k = 0.035$  m,  $l_a = a + b_k = 0.174$  m,  $l_b = a + b_c = 0.273$  m,  $k_3 = 16,239$  N/m,  $k_4 = 64,548$  N/m,  $c_3 = 151.4$  Ns/m,  $c_4 = 157.2$  Ns/m. Fig. 3 은 실험과 수학적 모델에서 구한 상하 운동 및 피치 모드를 나타내고 있다.

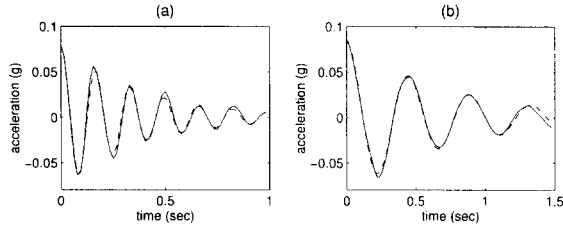


Fig. 3 (a) Bounce model response at the knee, and (b) pitch model at the knee Solid line : measurement, dashed line : model

### 3.3 $k_5$ 의 측정

다음으로 결정되어야 할 파라미터는 마네킹의 발과 바닥 사이를 연결하는 스프링( $k_5$ )과 감쇠( $c_5$ )의 값들이다. 본 논문에서 사용한 마네킹의 정강이 부위는, 속은 금속 바로, 겉은 고무로 둘러 쌓여있어 강체와 같고, 변형이 거의 없으므로, 고무로만 구성된 마네킹의 발 부분에서 변형이 주로 발생된다. 이러한 이유로 전체 정강이 부위가 받는 압력은 마네킹 발바닥이 받는 압력과 거의 동일하다고 할 수 있다.

실험을 위해 마네킹의 정강이 부분이 분리되었고, Fig. 4의 (a)와 같이 압축 시험기에 축 방향으로 고정을 하였다. 마네킹의 발에 대하여 축 방향의 힘과 변위의 상관 관계를 구하기 위하여 다양한 시험이 실시되었고, 압축 변위의 양이  $0.05"$ (1.27 mm)와  $0.25"$ (6.35 mm)사이일 때의 평균 강성 값이 마네킹의 기본 강성으로 결정되었다. 인장 시험의 결과를 Fig. 4의 (b)에 나타내었다. 본 실험을 통해서 마네킹의 발이 폼 형태의 재질로

만들어져 있어, 정강성 측정이 명확하게 동강성을 나타내지는 않으나, 본 논문에서 추구하는 마네킹의 모델링의 시작 단계에서는 그 결과가 충분하다. 계산된 마네킹 발에서의 등가 지지 강성 값은  $k_5=15,279$  N/m 이고 감쇠( $c_5$ ) 값은 Nishiyama 값을 사용하였다.

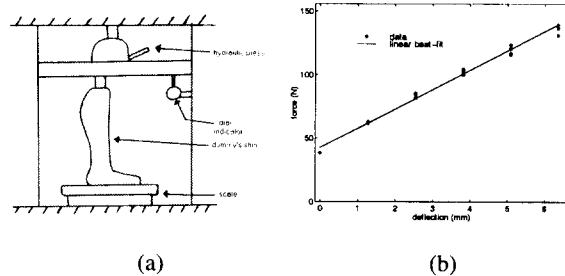


Fig. 4 (a) Schematic of test to identify stiffness of the mannequin's foot, and (b) measured compression plotted versus force, and straight line approximation

### 3.4 $k_1$ 과 $c_1$ 의 측정

마네킹은 본 연구자들이 지정한 표준 자세로 시트에 앉게 된다.  $k_1$ 과  $c_1$ 을 구하기 위한 첫 단계로, 얇은 종이를 마네킹 등(back)의 위쪽과 등받이 표면에 부착을 시키고, 마네킹 등 위쪽에 부친 종이에 페인트 칠을 한 다음, 마네킹을 시트에 자연스럽게 앉히면, 마네킹은 처음에 정한 표준 자세로 앉게 되고, 그 결과로 마네킹 등과 등받이 사이의 접촉 위치 및 면적을 알 수 있다. 마네킹이 표준 자세로 앉아 있을 때 받는 힘을 근사적으로 계산하기 위해, 선형 하중 스프링을 마네킹의 어깨에 부착을 한 다음, 마네킹의 흉부를 마네킹의 등 부위가 등받이에서 떨어질 때까지 잡아 당겼다. 이 때 측정된 힘이 62.3 N이며 Fig. 5는 실험 장치 및 측정된 데이터를 보여준다.

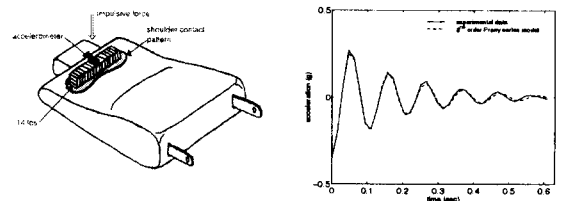


Fig. 5 (a) Schematic of experimental set-up for determination of  $k_1$  and  $c_1$  (b) Measured and modeled free decay of mass loaded seat-back system

측정된 힘을, 이전 시험에서 표시한 등받이의 접촉 부위에 작용을 시키기 위해, 접촉 면적과 동일한 크기와 질량을 갖는 금속판을 제작하였고, 등받이는 자동차 시트 전체 시스템에서 분리를 하여 시험 테이블 위에 설치를 하였다. 가속도 계를 부착한 금속판을 등받이의 표시 위치에 놓은 다음, 폼 재질로 만들어진 등받이를 정적 상태에 도달시키기 위해 약 20 분 동안 방치를 하였다. 등받이에 부착한 금속판에 임펄스 가진을 하였고, 그 응답을 기록하였다. 본 실험에서 사용된 임펄스 가진은 금속판의 각운동을 차단하고 수직 상하 운동만을 발생하도록 주의를 하였다. 전체 시스템을 금속판의 질량과 강성 그리고 감쇠 등 1 자유도 계로 모델링 하였으며, 실험에서 구한 시스템 파라미터 값들을 적용하여 스프링 상수,  $k_1$ 은 23,059 N/m 로, 감쇠 값,  $c_1$ 은 70.48 Ns/m 로 구하였다.

### 3.5 $k_s$ 의 측정

$k_s$ 를 구하기 위해, 우선 등받이를 시트 본체로부터 분리하여 질량을 측정하고, 시트 쿠션과 연결되는 조인트에 대한 질량 관성 모멘트와 무게 중심 위치를 결정하여야 한다. 이들 파라미터를 구하기 위해 Fig. 6의 (a)와 같이 등받이가 단순 지지 되고, 중력장 하에서 자유롭게 움직이도록 설치를 하였다.

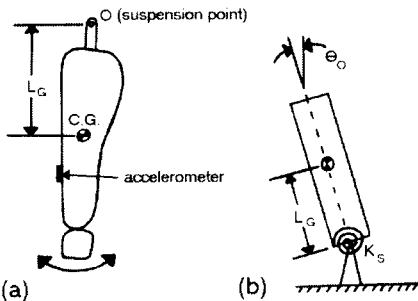


Fig. 6 Experimental configurations to estimate the stiffness and damping parameters at the seat-back contact point

실험에서 구한 값들을 이용하여  $k_s$ 를 도출하기 위해서는 수학적 모델이 구성되어야 한다. 등받이의 각운동이 작다고 가정을 하면 모델에 대한 선형 운동 방정식을 쉽게 유도할 수 있다. 여기서  $m_s$ 는 등받이 전체의 질량이고,  $L_G$ 는 점 O에서 무게 중심까지의 거리이며,  $J_s$ 는 점 O에 대한 질량

관성 모멘트이다. 실험을 통해 구한 각각의 값들은 다음과 같다,  $m_s = 4.77 \text{ kg}$ ,  $L_G = 0.40 \text{ m}$ ,  $J_s = 1.0 \text{ kg m}^2$ . 점 O에서 작용하는 비틀림 스프링의 강성 값 ( $k_s$ )을 구하기 위해, Fig. 6의 (b)와 같은 모델이 사용되었고, 선형화 된 운동 방정식으로부터 등받이의 각 운동과 관련된 고유 진동수를 계산하였다.

$$\omega_n^2 = \frac{1}{J_s} k_s \tag{13}$$

간단한 시트 진동 실험을 통해 등받이의 피치 운동에 해당하는 고유 진동수가 13.5 Hz 임을 알았고, 이 값을 식 (13)에 대입하여 비틀림 스프링의 강성 값, 7,194.94 N/radian 을 도출하였다.

### 3.6 실험적 평가에 의한 모델 파라미터

앞의 실험에 대한 결과를 Table 1에 요약하였으며, 다음 장에서는 실험적으로 결정된 스프링 상수들을 적용하여 자동차 시트와 마네킹 전체 시스템에 대한 자유 진동 해석을 수행하고, 각각의 스프링 상수의 변화에 따른 시스템의 고유 진동수 및 그와 관련된 모드 형상의 변화를 알아 보고자 한다.

Table 1 Spring stiffness and damping coefficient values determined experimentally.  $c_5$  was chosen to be  $80 c_1$  based on the ratios used by Nishiyama

	Spring Stiffness (N/m)		Damping Coefficient (Ns/m)
$k_1$	23,059	$c_1$	70.48
$k_2$	0	$c_2$	0.00
$k_3$	16,239	$c_3$	151.38
$k_4$	64,648	$c_4$	157.16
$k_5$	15,279	$c_5$	5,638.40
$k_s$	7,194		

## 4. 자유 진동 해석

### 4.1 $k_3, c_3$ 와 $k_4, c_4$ 위치 변화 효과

실제 자동차 시트에 앉는 자세는 탑승자에 따라 그리고 앉는 시간에 따라 달라진다. 자동차 시트에 앉는 자세의 변화는 본 논문에서 제시한 수학적 모델에서  $k_3, c_3$ 와  $k_4, c_4$ 의 위치의 변화를 일으킨다. 3.2 절에서 제시한  $k_3, c_3$ 와  $k_4, c_4$ 를 구하는 방법을 이용하여 스프링 및 댐퍼 위치 변화에 따른  $k_3, c_3$ 와  $k_4, c_4$  값의 변화를 식 (14)부터 (16)에 나타내었다. 여기서  $b_k$ 와  $b_c$ 는 Fig. 2의 (b)에서 정의하였다. Fig. 1에서 알 수 있듯이  $k_3$ 와  $c_3$ 는 동일한 위치에 있으며, 만일 이 위치가 최초의 위치에

서  $\Delta$ 만큼 우측으로 이동을 한다면  $a$ 는  $(0.139 - \Delta)$ 로 정의 된다. 본 논문에서 사용된  $k_3$ 와  $c_3$ 의 최초의 위치에서  $\Delta$ 는 0 이다.

$$k_3 = \frac{J_s M_s \omega_b^2 \omega_p^2}{a^2 M_s \omega_b^2 + J_s \omega_p^2}, \quad k_4 = \frac{a^2 M_s \omega_b^2}{a^2 M_s \omega_b^2 + J_s \omega_p^2}, \quad (14)$$

$$c_3 = \frac{2J_s M_s \omega_b \omega_p \zeta_b \zeta_p}{a^2 M_s \omega_b \zeta_b + J_s \omega_p \zeta_p}, \quad c_4 = \frac{2a^2 J_s M_s \omega_b^2 \zeta_b^2}{a^2 M_s \omega_b \zeta_b + J_s \omega_p \zeta_p}, \quad (15)$$

$$l_a = a + \frac{J_s \omega_p^2}{a M_s \omega_b^2}, \quad l_b = a + \frac{J_s \omega_p \zeta_b}{a M_s \omega_b \zeta_b}. \quad (16)$$

$\Delta$ 의 값은  $k_3$ 와  $c_3$ 의 위치 변화에 따라 매우 다양하게 변하지만 본 논문에서는 실제적인 자동차 시트에 앉는 탑승자의 자세를 고려하여 0 과 0.05 그리고 0.1 m의 값으로 정하여 스프링 및 감쇠 값을 계산하였으며, 그 결과를 Table 2에 나타내었다. 앞에서 제시한 선형 모델을 이용하여  $\Delta$  변화에 따른 자유 진동 해석을 수행하여 고유진동수 변화를 계산하여 Table 3에 나타내었고, Fig. 7에는  $\Delta=0.10$  m 일 때의 모드 형상을 보여준다.

Table 2 Stiffness, damping and location parameters as a function of  $\Delta$

$\Delta$ (m)	$k_3$ (N/m)	$k_4$ (N/m)	$c_3$ (Ns/m)	$c_4$ (Ns/m)
0	16,239	64,548	151.38	157.16
0.05	30,722	50,065	216.42	92.11
0.1	61,532	19,254	285.23	23.31

Table 3 Natural frequencies in Hertz as a function of  $\Delta$

Mode	1	2	3	4	5	6
$\Delta=0.00$ m	0.00	1.92	4.46	5.97	8.91	15.44
$\Delta=0.05$ m	0.00	1.97	4.46	5.96	8.93	15.44
$\Delta=0.10$ m	0.00	1.92	4.46	5.97	8.91	15.44

Fig. 7에서 첫번째 고유진동수로 0 Hz의 강체 모드가 발생되었는데, 이는  $k_2$  값이 일 때 계산한 결과이다.

### 4.2 $k_2$ 값 변화의 효과

실험에서는 마네킹과 등받이가 서로 접촉을 하지 않아  $k_2$  값을 측정하지 않았지만, 이 값을 제거하면 마네킹 흉부의 운동 중 특히 각 운동을 제한하게 된다. 그리고 Fig. 1와 같이  $k_2$ 가 있는 곳에서 마네킹과 등받이가 접촉을 안 하지만 이 강성 값은 등가의 강성으로 마네킹과 등받이를 연결

하는 두개의 스프링 중 하나의 역할을 하므로 본 논문에서는  $k_2$  값 변화에 따른 자유 진동 해석을 수행하였다. Table 4와 Fig. 8는 모드해석의 결과를 나타낸다.

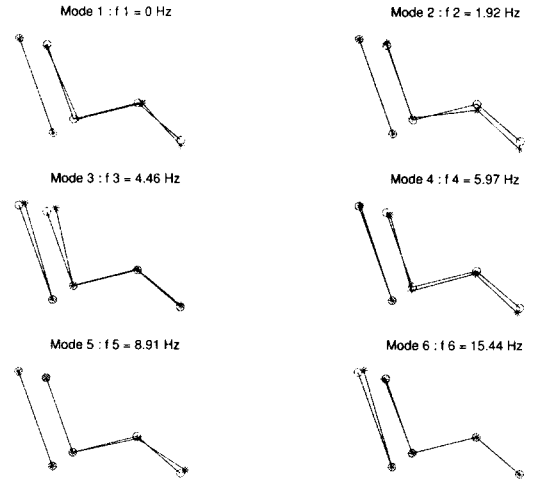


Fig. 7 Mode shapes of the mannequin motion for  $\Delta = 0.10$  m. The first mode shape is a rigid body motion

Table 4 Natural frequencies in Hertz as a function of changing  $k_2$ , ( $k_1 = 23,059$  N/m)

Mode	$k_2 = 0.0$	$k_2 = 1.0 \times k_1$	$k_2 = 5.0 \times k_1$	$k_2 = 12.0 \times k_1$
1	0	-	-	-
2	1.92	1.88	1.89	1.89
3	4.46	4.52	4.37	4.39
4	6.97	6.30	5.23	5.39
5	-	3.44	9.48	13.06
6	8.91	8.91	8.81	8.89
7	15.44	15.48	15.74	16.95

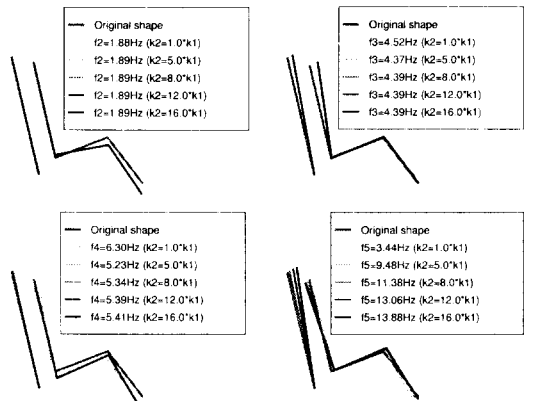


Fig. 8 The effect on the 2<sup>nd</sup>, 3<sup>rd</sup>, 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> mode shapes of changing the stiffness of spring 2 ( $k_2$ )



해석 결과에서 알 수 있듯이,  $k_2$ 의 존재는 새로운 마네킹의 전후 운동 모드(Table 4의 다섯 번째 모드)를 도입한다. 이 모드의 고유 진동수는  $k_2$ 의 값에 크게 영향을 받으며,  $k_2$  값의 증가에 따라 증가한다. 마네킹의 상하 운동 모드의 고유 진동수(Table 4의 네 번째 모드)는  $k_2$  값의 증가에 따라 처음에는 감소를 하나,  $k_2$ 의 값이  $k_1$  값의 5 배보다 크게 되면서부터 점차로 증가한다. 일곱 번째 모드도  $k_2$ 의 변화에 영향을 받는다.

**4.3  $k_1$  값 변화의 효과**

$k_1$  값의 변화에 대한 각 모드의 고유 진동수 변화 결과를 Table 5에서 나타내었으며,  $k_2$  값은  $k_1$ 의 12 배로 정하였다. 시스템의 고유 진동수가 가장 크게 영향을 받는 모드는 마네킹의 전후 운동을 나타내는 다섯 번째와 주로 등받이의 운동을 나타내는 일곱 번째이며, 등받이와 마네킹 흉부의 각 운동을 나타내는 세 번째 모드도 변화를 보여준다. 그러나 주로 마네킹의 상하 운동을 나타내는 두 번째와 네 번째 모드 그리고 무릎의 각 운동이 크게 나타나는 여섯 번째 모드의 고유 진동수들은 거의 영향을 받지 않는다. 모드 형상 비교에서  $k_1$  값의 변화에 따라 단지 각 모드의 크기만 변하고, 전체적인 형상의 변화는 나타내지 않으며, 세 번째와 다섯 번째 모드의 크기가 크게 변했다.

Table 5 Natural frequencies in Hertz as a function of changing  $k_1$ . Baseline value of  $k_1 = 23,059$  N/m.

Mode	$k'_1 = 0.5 \times k_1$	$k'_1 = 1.0 \times k_1$	$k'_1 = 2.0 \times k_1$	$k'_1 = 4.0 \times k_1$
2	1.89	1.89	1.89	1.89
3	3.74	4.39	4.83	5.07
4	5.39	5.39	5.39	5.40
5	11.60	13.06	14.00	14.33
6	8.89	8.89	8.89	8.89
7	15.84	16.95	20.33	26.69

**4.4  $k_3$ 와  $k_4$  변화의 효과**

**4.4.1  $k_3$ 와  $k_4$  값의 동시 변화의 효과**

다음으로  $k_3$ 와  $k_4$  값이 동시에 변할 때의 효과에 대해서 해석을 수행하였으며, 해석 결과는 Table 6과 Fig. 9에 나타내었다. 본 해석에서도 이전 해석과 동일하게  $k_2$  값은  $k_1$ 의 12 배로 사용하였다.  $k_3$ 와  $k_4$  값이 동시에 증가함에 따라 무릎의 상하 운동을 나타내는 두 번째 모드와 흉부의 상하 운동을 나타내는 네 번째 모드의 고유 진동수가 증가하였고, 다섯 번째 및 여섯 번째 그리고 일

곱 번째 모드의 고유 진동수들이 미소하게 증가하였다.

Table 6 Natural frequencies in Hertz as a function of changing  $k_3$  and  $k_4$ . Baseline values:  $k_3 = 61,532.0$  N/m and  $k_4 = 19,254$  N/m.

Mode	$0.1 \times (k_3, k_4)$	$1.0 \times (k_3, k_4)$	$2.0 \times (k_3, k_4)$	$4.0 \times (k_3, k_4)$
2	0.60	1.89	2.64	3.64
3	4.39	4.39	4.40	4.42
4	1.78	5.39	7.03	10.83
5	12.87	13.06	13.38	14.54
6	8.58	8.89	9.47	8.10
7	16.92	16.95	17.00	17.20

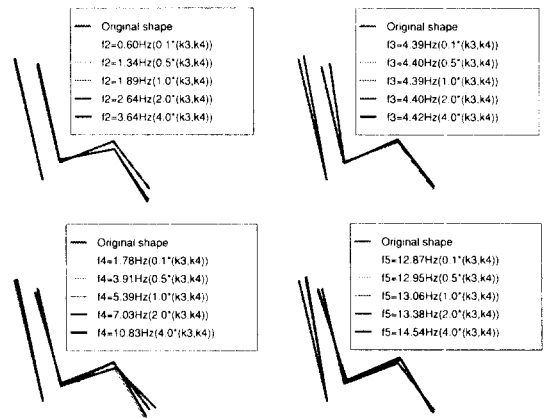


Fig. 9 The effect on the 2<sup>nd</sup>, 3<sup>rd</sup>, 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> mode shapes of changes in the stiffnesses  $k_3$  and  $k_4$

**4.4.2  $k_3$ 와  $k_4$  값의 개별 변화의 효과**

앞에서는  $k_3$ 와  $k_4$ 의 값이 동시에 변할 때의 자유 진동 해석을 수행하였으나, 본 절에서는  $k_3$ 와  $k_4$  값이 개별적으로 변화할 때에 대한 해석을 실시하였다.  $k_3$  값의 변화에 대한 해석 결과는 Table 7에, 그리고  $k_4$  값의 변화에 대한 해석 결과는 Table 8에서 보여준다.

Table 7 Natural frequencies in Hertz as a function of changing  $k_3$ . Baseline values:  $k_3 = 61,532.0$  N/m and  $k_4 = 19,254$  N/m.

Mode	$0.5 \times (k_3)$	$.75 \times (k_3)$	$1.0 \times (k_3)$	$2.0 \times (k_3)$	$4.0 \times (k_3)$
2	1.70	1.82	1.89	2.00	2.05
3	4.40	4.39	4.39	4.39	4.39
4	4.30	4.88	5.39	6.91	10.15
5	12.98	13.02	13.06	13.27	13.95
6	8.82	8.85	8.89	9.12	8.08
7	16.94	16.94	16.95	16.98	17.07

Fig. 10에서 알 수 있듯이 양쪽 해석에서의 모드 형상 차이가 거의 없으며, 가장 크게 영향을 받는 고유 진동수는 마네킹의 상하 운동과 관련된 모드이다. 네 번째 모드의 고유 진동수는  $k_4$  값 보다는  $k_3$  값 변화에 더 민감하나, 두 번째 모드(무릎의 상하 운동)의 고유 진동수는 반대의 현상을 나타내었다. 주로 무릎의 각 운동을 나타내는 여섯 번째 모드의 고유 진동수는 양쪽 해석에서 거의 동일한 양으로 영향을 받았다.

Table 8 Natural frequencies in Hertz as a function of changing  $k_4$ . Base values:  $k_3 = 61,532.0$  N/m and  $k_4 = 19,254$  N/m

Mode	$0.5 \times (k_4)$	$.75 \times (k_4)$	$1.0 \times (k_4)$	$2.0 \times (k_4)$	$4.0 \times (k_4)$
2	1.42	1.69	1.89	2.38	2.79
3	4.39	4.39	4.39	4.40	4.40
4	5.17	5.28	5.39	5.79	6.37
5	13.02	13.04	13.06	13.15	13.39
6	8.75	8.82	8.89	9.19	9.88
7	16.94	16.95	16.95	16.97	17.00

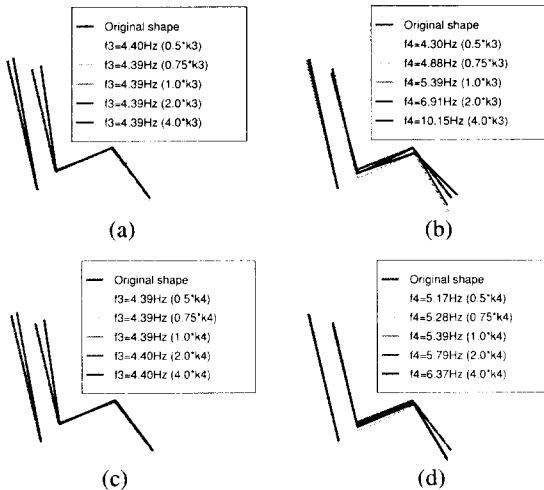


Fig. 10 (a) & (b) are the 3<sup>rd</sup> and 4<sup>th</sup> mode shapes with changing stiffness of spring three,  $k_3$ . (c) & (d) are the 3<sup>rd</sup> and 4<sup>th</sup> mode shapes for changing values of the stiffness of spring 4,  $k_4$

#### 4.5 $k_3$ 값 변화의 효과

등받이와 시트 쿠션을 연결하는 조인트의 등가 비틀림 스프링 상수( $k_3$ ) 값은 앞 장의 실험에서 7,194.94 N/radian 로 계산되었다.  $k_3$  값 변화에 대한 해석 결과는 Table 9에서 제시한다. 모드 형상 비교에서,  $k_3$  값 변화에 따라 마네킹의 흉부와 등받이

의 각 운동이 다소 영향은 받지만 전체의 모드 형상은 거의 변하지 않았다. 등받이와 마네킹의 흉부의 각 운동을 나타내는 세 번째 모드와 등받이의 각 운동을 나타내는 일곱 번째 모드의 고유 진동수가  $k_3$  값이 증가함에 따라 같이 증가를 하였다.

Table 9 Natural frequencies in Hertz as a function of changing  $k_3$ . Base value of  $k_3 = 7,194.94$  N/m

Mode	$0.1 \times (k_3)$	$0.5 \times (k_3)$	$1.0 \times (k_3)$	$2.0 \times (k_3)$	$4.0 \times (k_3)$
2	1.92	1.89	1.89	1.89	1.89
3	1.64	3.42	4.39	5.23	5.98
4	5.38	5.38	5.39	5.45	5.36
5	12.00	12.58	13.06	13.50	13.76
6	8.89	8.89	8.89	8.89	8.89
7	15.41	15.99	16.95	19.24	23.71

#### 5. 결론

본 논문에서는 자동차 시트와 마네킹으로 이루어진 시스템에 대하여 수학적 모델을 제시하였다. 이 수학적 모델은 마네킹의 머리 부분이 있는 7 자유도 계와 머리 부분이 제거된 6 자유도 계이며, 마네킹과 자동차 시트는 질량과 조인트로 모델링 하였고, 마네킹과 시트의 접촉 부분은 등가의 스프링과 댐퍼로 모델링 하였다. 본 해석을 위해서 미국 남자의 표준 신장과 몸 무게 그리고 각 신체 부위와 동일한 모양을 갖는 마네킹을 제작하였고, 스프링과 댐퍼 등 모델 파라미터를 측정 및 계산하기 위해 마네킹을 부 시스템(subsystem)으로 나누어 실험 및 해석을 실시하였다.

본 논문에서 제시한 모델 파라미터의 계산 및 측정 방법은 실제의 사람을 모델링 하거나 다른 형태의 마네킹을 모델링을 할 때 유효한 방법이다. 마네킹의 머리 부분은 목에 있는 조인트로 인해 실험 측정에서 여러 가지 어려움을 발생시켜 머리 부분과 목 조인트를 제거한 6 자유도계 시스템에 대하여 자유 진동 해석을 수행하였다. 자유 진동 해석에서는 각각의 모델 파라미터의 값을 다양하게 변화시키면서 해석을 하여, 어떤 모델 파라미터가 어느 고유 진동수와 모드 형상에 영향을 주는 지에 대해서 알아 보았다.

자동차 시트의 재질로 사용되는 폼(foam)을 모델링 하는 것은, 폼이 점탄성 재료이므로 상당히 어려운 일이다. 본 논문에서는 마네킹의 각 부위와 시트와의 접촉을 나타내는 각각의 등가 스프링과 감쇠를 구하는 다양한 실험을 통해서 폼의 점

탄성 거동의 영향을 관찰하였고, 여기에서 획득된 결과를 이용하여 마네킹과 시트 사이의 거동에 대한 측정 및 계산을 할 때 적용을 하였다.

본 논문에서 제시한 수학적 모델과 측정 및 계산을 통하여 구한 모델 파라미터를 사용하여 강제 진동 해석을 위한 모델에 적용을 하고자 한다. 또한, 이 모델의 강제 진동 해석 결과를 자동차 시트와 마네킹으로 이루어진 시스템의 강제 진동 실험 결과와 비교하고, 각 조인트 및 각 선형 지지 댐퍼에서의 감쇠 값 변화와 대한 강제 진동을 수행하고자 한다.

## 후 기

본 논문은 본 연구자가 1996 년 8 월부터 1998 년 10 월까지 미국의 Purdue 대학교 기계공학과 부설 Herrick 연구소의 박사후 과정으로 재직을 하면서 또한 국내에 돌아와 국민대학교 자동차 공학 대학원 연구교수로 현재 있으면서 연구를 한 것이다. 본 연구를 위해 물심양면으로 도와주신 Purdue 대학교 기계공학과 교수이신 Davies 교수와 Bajaj 교수에게 고개 숙여 감사를 드리며, 실험 부분을 도와준 Seth White 에게도 고마움을 전한다. 또한 국내에 돌아와 지속적인 연구를 할 수 있도록 지원해준 2000 년도 두뇌한국 21 사업단에 감사 를 드린다.

## 참고문헌

1. M. J. Griffin, "Handbook of Human Vibration," Academic Press, 1990.
2. G. S. Paddan and M. J. Griffin, "The transmission of translational seat vibration to the head I. vertical seat vibration," Journal of Biomechanics, Vol. 21, No. 3, pp. 191-197, 1988.
3. K. C. Parsons, E. M. Whitham and M. J. Griffin, "Six axis vehicle vibration and its effects on comfort," Ergonomics, Vol. 22, No. 2, pp. 211-225, 1979.
4. M. Magnusson, M. Pope, M. Rostedt and T. Hansson, "Effect of backrest inclination on the transmission of vertical vibrations through the lumbar spine," Clinical Biomechanics, Vol. 8, No. 1, pp. 5-12, 1993.
5. G. S. Paddan and M. J. Griffin, "Transmission of translational seat vibration to the head: the effect of

- measurement position at the head," Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine, Vol. 206, No. 3, pp. 159-168, 1992.
6. J. H. Varterasian and R. R. Thompson, "The dynamic characteristics of automobile seats with human occupants," SAE Technical Paper Series Published by SAE, Warrendale, PA, 770249, 1978.
7. S. Hatano, N. Yasuda, S. Hayashida, N. Kunii, H. Takeyasu and S. Kozawa, "High molecular weight polyols for automotive HR Foam," Polyurethane World Congress, pp. 124-26, 1991.
8. G. A. Kleiner, T. Pham and R. J. Tenhagen, "Recent advances in high resilience (HR) foam technologies," Journal of Cellular Plastics, pp. 49-57, 1984.
9. T. E. Fairley, "Predicting the transmissibility of a suspension seat," Ergonomics, Vol. 33, No. 2, pp. 121-135, 1990.
10. D. E. Foley and R. J. Allemang, "Vibration considerations concerning vehicular seating systems," Experimental Techniques, pp. 19-21, 1988.
11. T. E. Fairley and M. J. Griffin, "Modelling a seat-person system in the vertical and fore-and-aft axes," Institute of Mechanical Engineers, 1984.
12. S. Nishiyama, "Development of simulation system on vehicle-occupant dynamic interaction (1st Report, Theoretical analysis and system verification)," Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C, Vol. 59, No. 568, pp. 3613-3621, 1993.
13. S. Nishiyama, "Development of simulation system on vehicle-occupant dynamic interaction (2nd Report, Influence of sitting posture on human comfort)," Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C, Vol. 59, No. 568, pp. 3622-3629, 1993.
14. S. Nishiyama, "Development of simulation system on vehicle-occupant dynamic interaction (3rd Report, influence of parameters of occupant-seat system on human comfort)," Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C, Vol. 60, No. 573, pp. 1509-1516, 1994.

**부록 A: Nishiyama 모델과 마네킹 모델의  
파라미터 비교**

Table A Parameter values of the seat and occupant from Nishiyama's paper and from measurements on our mannequin. Units: length-m, angle-degrees, mass-kg, mass moment of inertia-Kg.m<sup>2</sup>

Items	Nishiyama's	
	Model	Mannequin
Mass of head ( $m_1$ )	5.3214	3.988
Mass of torso, neck, pelvis and arms ( $m_2$ )	26.4894	34.138
Mass of femur ( $m_3$ )	18.816	17.844
Mass of shin ( $m_4$ )	10.3292	7.948
Total mass ( $M_1 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ )	60.956	63.918
Mass moment of inertia of head ( $I_1$ )	0.036652	0.02195
Mass moment of inertia of torso, neck, pelvis and arms ( $I_2$ )	0.7938	1.39277
Mass moment of inertia of femur ( $I_3$ )	0.20384	0.33520
Mass moment of inertia of shin ( $I_4$ )	0.1911	0.19732
Length of head ( $l_1$ )	0.304	0.1207
Length of torso and pelvis ( $l_2 + l_3$ )	0.474	0.6223
Length of femur ( $l_4 + l_5$ )	0.427	0.5334
Length of shin ( $l_6 + l_7$ )	0.412	0.4572
Initial angle of head ( $\Theta_{10}$ )	100.0	100.0
Initial angle of torso ( $\Theta_{20}$ )	112.0	110.0
Initial angle of femur ( $\Theta_{30}$ )	12.0	14.0
Initial angle of shin ( $\Theta_{40}$ )	315.0	320.0
Angle of foot ( $\beta$ )	45.0	50.0
Angle of seat ( $\Theta_{s0}$ )	112.0	110.0
Distance from seat corner to base of foot rest ( $l_s$ )	0.779	0.9378
Distance from the base of foot rest to heel ( $l_r$ )	0.05	0.1397
Distance from seat rail to seat cushion ( $l_q$ )	0.163	0.163
Distance from seat back joint to seat back of $k_1$ ( $l_k$ )	0.424	0.578
Distance from seat back joint to seat back of $k_2$ ( $l_m$ )	0.076	0.076
Length of seat-back ( $l_l$ )	-	0.8
Z-dir. Initial position of hip joint ( $\zeta_0$ )	0.11	0.11
X-dir. initial position of hip joint ( $\xi_0$ )	0.07	0.165

**부록 B: 비선형 모델에서의  
각 파라미터의 유도**

다음 방정식은 행렬 형태의 비선형 운동 방정식에서 사용된 식들이다.

$$A_3 : \Delta(\xi) = \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^5 c_i \delta_i \frac{\partial \dot{\delta}_i}{\partial \xi}$$

$$B_3 : \Delta(\zeta) = \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \zeta} + \sum_{i=1}^5 c_i \delta_i \frac{\partial \dot{\delta}_i}{\partial \zeta}$$

$$D_4 : \Delta(\Theta_1) = \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \Theta_1} + \sum_{i=1}^5 c_i \delta_i \frac{\partial \dot{\delta}_i}{\partial \Theta_1}$$

$$E_4 : \Delta(\Theta_2) = \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \Theta_2} + \sum_{i=1}^5 c_i \delta_i \frac{\partial \dot{\delta}_i}{\partial \Theta_2}$$

$$G_4 : \Delta(\Theta_3) = \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \Theta_3} + \sum_{i=1}^5 c_i \delta_i \frac{\partial \dot{\delta}_i}{\partial \Theta_3}$$

$$H_4 : \Delta(\Theta_4) = \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \Theta_4} + \sum_{i=1}^5 c_i \delta_i \frac{\partial \dot{\delta}_i}{\partial \Theta_4}$$

$$S_2 : \Delta(\Theta_s) = \sum_{i=1}^5 k_i \delta_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \Theta_s} + \sum_{i=1}^5 c_i \delta_i \frac{\partial \dot{\delta}_i}{\partial \Theta_s}$$

**부록 C: 선형 모델에서 사용된 강성과 감쇠  
행렬에서의 파라미터**

**C.1 강성 행렬 요소**

강성 행렬은 대칭성을 가지며, 이러한 이유로 행렬의 상부 삼각 부분(upper triangular part)만 아래에서 제시한다.

$$K_{411} = \frac{k_1}{\delta_{10}^2} K_{11}^2 + \frac{k_2}{\delta_{20}^2} (\xi_0 - l_m \cos \Theta_{s0})^2 + \frac{k_4}{\delta_{k40}^2} K_{41}^2 + \frac{k_5}{\delta_{50}^2} (\xi_0 + K_{51})^2$$

$$K_{412} = \frac{k_1}{\delta_{10}^2} K_{11} K_{12} + \frac{k_2}{\delta_{20}^2} (\xi_0 - l_m \cos \Theta_{s0}) (\xi_0 - l_m \sin \Theta_{s0}) + \frac{k_4}{\delta_{k40}^2} K_{41} K_{42} + \frac{k_5}{\delta_{50}^2} (\xi_0 + K_{51}) (\xi_0 + K_{52})$$

$$K_{413} = 0, K_{414} = \frac{k_1}{\delta_{10}^2} K_{11} K_{13} (l_k - l_m)$$

$$K_{415} = \frac{k_4}{\delta_{k40}^2} K_{41} K_{43} + \frac{k_5 K_{54}}{\delta_{50}^2} (\xi_0 + K_{51})$$

$$K_{416} = \frac{k_5 K_{55}}{\delta_{50}^2} (\xi_0 + K_{51})$$

$$K_{417} = \frac{k_1 K_{11} K_{14} + k_2 l_m (\xi_0 - l_m \cos \Theta_{s0}) (\xi_0 \sin \Theta_{s0} - \zeta_0 \cos \Theta_{s0})}{\delta_{10}^2 \delta_{20}^2}$$

$$K_{422} = \frac{k_1}{\delta_{10}^2} K_{12}^2 + \frac{k_2}{\delta_{20}^2} (\zeta_0 - l_m \sin \Theta_{s0})^2 + k_3 + \frac{k_4}{\delta_{k40}^2} K_{42}^2 + \frac{k_5}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{52})^2$$

$$K_{423} = 0, K_{424} = \frac{k_1}{\delta_{10}^2} K_{12} K_{13} (l_k - l_m)$$

$$K_{425} = \frac{k_3 l_m k_1 K_{\theta_3} + k_4}{\delta_{30}^2 + \delta_{440}^2} K_{42} K_{43} + \frac{k_5 K_{54}}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{52})$$

$$K_{426} = \frac{k_5 K_{55}}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{52})$$

$$K_{427} = \frac{k_1 K_{12} K_{14} + k_2 l_m (\zeta_0 - l_m \sin \Theta_{,0}) \{ \xi \sin \Theta_{,0} - \zeta_0 \cos \Theta_{,0} \}}{\delta_{10}^2 + \delta_{20}^2}$$

$$K_{43i} = 0 (i=1, \dots, 7)$$

$$K_{444} = \frac{k_1}{\delta_{10}^2} K_{13}^2 (l_k - l_m)^2, K_{445} = 0, K_{446} = 0,$$

$$K_{447} = \frac{k_1 (l_k - l_m) K_{13} K_{14}}{\delta_{10}^2}$$

$$K_{455} = \frac{k_3 K_{\theta_3}^2}{\delta_{30}^2} + \frac{k_4}{\delta_{440}^2} K_{43}^2 + \frac{k_5}{\delta_{50}^2} K_{54}^2, K_{456} = \frac{k_5}{\delta_{50}^2} K_{54} K_{55},$$

$$K_{457} = 0, K_{466} = \frac{k_5}{\delta_{50}^2} K_{55}^2, K_{467} = 0,$$

$$K_{477} = \frac{k_1 K_{14}^2}{\delta_{10}^2} + k_1 + \frac{k_2 l_m^2 \{ \xi \sin \Theta_{,0} - \zeta_0 \cos \Theta_{,0} \}^2}{\delta_{20}^2}$$

$$C_{424} = \frac{c_1}{\delta_{10}^2} K_{12} K_{13} (l_k - l_m)$$

$$C_{425} = \frac{c_3 l_m k_1 K_{\theta_3} + c_4}{\delta_{30}^2 + \delta_{440}^2} C_{42} C_{43} + \frac{c_5 K_{54}}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{52})$$

$$C_{426} = \frac{c_5 K_{55}}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{52})$$

$$C_{427} = \frac{c_1 K_{12} K_{14} + c_2 l_m (\zeta_0 - l_m \sin \Theta_{,0}) \{ \xi \sin \Theta_{,0} - \zeta_0 \cos \Theta_{,0} \}}{\delta_{10}^2 + \delta_{20}^2}$$

$$C_{433} = T_{1\max} = 22.4642, C_{434} = -T_{1\max} = -22.4642,$$

$$C_{43i} = 0, (i=5, 6, 7)$$

$$C_{444} = \frac{c_1}{\delta_{10}^2} K_{13}^2 (l_k - l_m)^2 + T_{1\max} + T_{2\max}, C_{445} = -T_{2\max}, C_{446} = 0,$$

$$C_{447} = \frac{c_1 (l_k - l_m) K_{13} K_{14}}{\delta_{10}^2}$$

$$C_{455} = \frac{c_3 K_{\theta_3}^2}{\delta_{30}^2} + \frac{c_4}{\delta_{440}^2} C_{43}^2 + \frac{k_5}{\delta_{50}^2} K_{54}^2 + T_{2\max} + T_{3\max},$$

$$C_{456} = \frac{c_5}{\delta_{50}^2} K_{54} K_{55} - T_{3\max}, C_{457} = 0,$$

$$C_{466} = \frac{c_5}{\delta_{50}^2} K_{55}^2 + T_{3\max}, C_{467} = 0,$$

$$C_{477} = \frac{c_1 K_{14}^2}{\delta_{10}^2} + c_2 l_m^2 \{ \xi \sin \Theta_{,0} - \zeta_0 \cos \Theta_{,0} \}^2$$

## C.2 감쇠 행렬 요소

감쇠 행렬 또한 대칭성을 가지므로, 행렬의 상부 삼각 부분(upper triangular part)만 아래에서 제시한다. 여기서 사용된 하첨자 중 0은 각 변수의 초기 값을 나타낸다, 즉,  $Q_i$ 의 초기 값은  $Q_{i0}$ 이다.

$$C_{411} = \frac{c_1}{\delta_{10}^2} K_{11}^2 + \frac{c_2}{\delta_{20}^2} (\zeta_0 - l_m \cos \Theta_{,0})^2 + \frac{c_4}{\delta_{440}^2} C_{41}^2 + \frac{c_5}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{51})^2,$$

$$C_{412} = \frac{c_1}{\delta_{10}^2} K_{11} K_{12} + \frac{c_2}{\delta_{20}^2} (\zeta_0 - l_m \cos \Theta_{,0}) (\zeta_0 - l_m \sin \Theta_{,0}) + \frac{c_4}{\delta_{440}^2} C_{41} C_{42} + \frac{c_5}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{51}) (\zeta_0 + K_{52})$$

$$C_{413} = 0, C_{414} = \frac{c_1}{\delta_{10}^2} K_{11} K_{13} (l_k - l_m)$$

$$C_{415} = \frac{c_4}{\delta_{440}^2} C_{41} C_{43} + \frac{c_5 K_{54}}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{51})$$

$$C_{416} = \frac{c_5 K_{55}}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{51})$$

$$C_{417} = \frac{c_1 K_{11} K_{14} + c_2 l_m (\zeta_0 - l_m \cos \Theta_{,0}) \{ \xi \sin \Theta_{,0} - \zeta_0 \cos \Theta_{,0} \}}{\delta_{10}^2 + \delta_{20}^2}$$

$$C_{422} = \frac{c_1}{\delta_{10}^2} K_{12}^2 + \frac{c_2}{\delta_{20}^2} (\zeta_0 - l_m \sin \Theta_{,0})^2 + c_3 + \frac{c_4}{\delta_{440}^2} C_{42}^2 + \frac{c_5}{\delta_{50}^2} (\zeta_0 + K_{52})^2, C_{423} = 0,$$

## C.3 강성 및 감쇠 요소에서 사용된 파라미터

$$K_{\theta_3} = \Delta \left( \zeta_0 + \frac{\Delta}{\cos \Theta_{30}} \sin \Theta_{30} \right),$$

$$K_{j1} = \zeta_0 + (l_k - l_m) \cos \Theta_{20} - l_k \cos \Theta_{,0},$$

$$K_{j2} = \zeta_0 + (l_k - l_m) \sin \Theta_{20} - l_k \sin \Theta_{,0},$$

$$K_{j3} = \zeta_0 \cos \Theta_{20} - \zeta_0 \sin \Theta_{20} - l_k \sin (\Theta_{,0} - \Theta_{20})$$

$$K_{41} = l_{n1} \cos \Theta_{30} + \zeta_0 - l_{j1}, K_{42} = l_{n1} \sin \Theta_{30} + \zeta_0,$$

$$K_{43} = l_{n1} \{ l_{j1} \sin \Theta_{30} + \zeta_0 \cos \Theta_{30} - \zeta_0 \sin \Theta_{30} \}$$

$$C_{41} = l_{n2} \cos \Theta_{30} + \zeta_0 - l_{j2}, C_{42} = l_{n2} \sin \Theta_{30} + \zeta_0,$$

$$C_{43} = l_{n2} \{ l_{j2} \sin \Theta_{30} + \zeta_0 \cos \Theta_{30} - \zeta_0 \sin \Theta_{30} \}$$

$$K_{51} = (l_4 + l_5) \cos \Theta_{30} + (l_6 + l_7) \cos \Theta_{40} - l_c,$$

$$K_{52} = (l_4 + l_5) \sin \Theta_{30} + (l_6 + l_7) \sin \Theta_{40} + l_d,$$

$$K_{54} = (l_4 + l_5) \{ (\zeta_0 + K_{52}) \cos \Theta_{30} - (\zeta_0 + K_{51}) \sin \Theta_{30} \},$$

$$K_{55} = (l_6 + l_7) \{ (\zeta_0 + K_{52}) \cos \Theta_{40} - (\zeta_0 + K_{51}) \sin \Theta_{40} \}.$$