

일반 구조형 관측기에 관한 연구

이충환*, 김환성**, 김상봉***

A Study on General Structured Observer

Choong-Hwan Lee*, Hwan-Seong Kim**, Sang-Bong Kim***

ABSTRACT

This paper proposes a general structured observer and shows the characteristic of external noise reduction in linear discrete system. First, we propose a simple general structured observer which includes high gain term or PI(proportional integral) term to estimate the states of system, and show that the observer can estimate the states of system even if an external noise is added to the system's output. An existence condition of the observer is derived and checked by system's rank condition. Through a numerical example, we can verify that the proposed observer is effective to estimate the state of system with external noise compared to that of conventional high gain observer.

Key Words : General structured observer (일반 구조형 관측기), Sinusoidal noise (정현파 노이즈), PI (비례·적분)

기호설명

$x(k)$ = state vector of system
 $\hat{x}(k)$ = estimated state vector of system
 $\delta(k)$ = noise vector
 $\epsilon(k)$ = error vector between real states and estimated states
 $\zeta(k)$ = transformed estimated error vector
 $\xi(k)$ = transformed error vector by $P(q^{-1})$
 $x_e(k)$ = augmented error vector
 $e_x(k)$ = estimated error vector
 K, H, M, N = gain matrices of general structured observer

$\lambda_i [A]$ = i th eigenvalue of $[A]$

1. 서론

관측기는 현대제어 이론을 구성하는 중요한 개념의 일부분으로 계통화되어 오늘날에 이르고 있다. 관측기의 필요성은 현대제어 이론의 기본이 되고 있는 상태 공간법에 기초한 선형 다변수 제어계 설계에 기인하며, 실제 대부분의 경우 제어계는 제어대상의 내부특성을 대표하는 상태변수의 피드백에 의해 실현되고 있다. 이것은 모든 상태변수가 제어기에 의해 실현되기 위한 실현성, 즉 센서에 의해 상태가 측정 가능해야 하는 조건을 포함하고 있다.

* 양산대학 매카트로닉스과
** 한국해양대학교 이공대학 물류시스템공학과
*** 부경대학교 공과대학 기계·자동차공학부

그러나, 시스템의 모든 상태변수가 센서에 의해 직접 측정 가능한 경우는 극히 드물며, 이러한 경우는 입력과 출력의 정보를 이용하여 시스템의 상태를 추정하여 제어를 행하고 있다⁽¹⁾.

또한, 시스템의 상태를 직접적으로 측정할 수 없는 경우, 즉 측정할 수 있는 센서가 개발되지 않는 경우 등에 대해서 관측기법이 유용하게 이용되기도 한다. 또한, 최근에는 이와 같은 관측기법이 시스템의 고장 진단에 널리 응용되고 있다⁽²⁾.

그러나, 종래의 관측기 설계법은 외부 노이즈의 영향 또는 시스템의 변동 및 외란의 변동에 대한 영향을 고려하고 있지 않으므로, 실제 관측기를 이용한 추정치를 직접 이용하기는 어렵다. 이러한 문제에 대해 외부의 입력에 대해서 영향을 받지 않는 미지입력 관측기 설계법⁽³⁾ 및 외란에 강인한 PI 관측기^(4,5)와 외란 관측기⁽¹⁾ 등이 이용되어 저주파 영역의 외란 및 노이즈 제거에 효과적임을 보이고 있으나, 특정한 주파수 영역 내에서의 성능을 고려했을 경우, 관측기의 상태 추정 성능을 보증하기는 어렵다.

최근에는 PI 관측기를 이용하여 시스템에 인가 되는 비선형성 입력을 억제하는 연구⁽⁶⁾ 및 Bilinear 시스템의 경우 외란 억제성이 강한 관측기에 관한 연구⁽⁷⁾가 수행되었다. 시스템의 실현 문제에 있어서 시스템의 불확실성을 고려한 관측기 설계법⁽⁸⁾ 및 구속조건을 지닌 기계 시스템의 응용에 관한 연구⁽⁹⁾, H_∞ 제어이론을 이용한 관측기병합계 설계방법⁽¹⁰⁾이 제안되고 있으나, 설계 조건이 극히 제한되어 있고 게인이 지나치게 높아 실제 응용 면에서 효과적이라고 할 수 없다.

또한, 미지입력을 갖는 선형 시스템에 대해 일반 구조형 관측기 설계법⁽¹¹⁾이 제안되었으나 기존의 PI 관측기의 특징만 포함시킨 형태로 구성되어 있어 일반화된 구조의 관측기라고 간주하기는 어렵다.

따라서, 본 연구에서는 보다 일반화된 구조로서 외부의 노이즈 및 외란 모델을 고려하여 특정한 주파수 영역에서 관측 성능을 극대화시킬 수 있는 일반 구조형 관측기 기법을 제안한다. 이 경우 외부 노이즈 및 외란에 대한 모델을 이용하는 방법으로 외부에서 가해지는 노이즈 영향을 소거하여 실제 상태만을 추정하는 기법이다.

먼저, 본 연구에서는 일반 구조형 관측기를 제

안하며, 제안된 관측기의 설계법 및 존재조건을 다룬다. 연구 결과로서 일반 구조형 관측기 설계조건은 시스템의 rank 조건으로 보여지며, 외부 노이즈 저감에 탁월한 효과가 있음을 나타내고 있다. 스텝 및 정현파 노이즈를 고려한 시뮬레이션에서는 종래 high 게인 관측기 및 필터링 처리한 high 게인 관측기와의 비교를 통하여 본 일반 구조형 관측기의 노이즈 저감 유효성을 확인하였다.

2. 일반 구조형 관측기의 구조

다음의 선형 이산 시스템을 고려하자.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (1b)$$

여기서 $x \in R^n$, $y \in R^p$, $u \in R^m$ 이며, (A, C) 는 가관측이다.

다음의 이산 시스템을 고려하자.

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K\zeta(k) + H\epsilon(k) \quad (2a)$$

$$\zeta(k+1) = N\zeta(k) + M\epsilon(k) \quad (2b)$$

$$\epsilon(k) = y(k) - C\hat{x}(k) \quad (2c)$$

단, $\hat{x} \in R^n$, $\zeta \in R^l$, $\epsilon \in R^p$ 은 각각 추정치 벡터, 변환벡터, 추정오차벡터를 나타내며, K, H, M, N 은 일반 구조형 관측기의 게인 행렬이다.

윗 식은 본 연구에서 제안하는 일반 구조형 관측기 모델이며, 식(1)에 대해 식(2)가 일반 구조형 관측기로 되기 위해서는 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{x(k) - \hat{x}(k)\} = 0 \quad (3a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k) = 0 \quad (3b)$$

즉, 식(3)에서는 시간이 충분히 경과한 후에 관측오차가 영으로 수렴되어야 함을 보이고 있다. 위의 식(3)의 조건을 만족하기 위한 식(2)의 조건을 일반구조형 관측기의 충분조건이라 하며 다음 정리

와 같이 주어진다.

[정리1] 식(1)에 대해 식(2)가 일반 구조형 관측기로 성립할 충분조건은 다음 식과 같다.

$$\lambda_i \begin{bmatrix} A - HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} \leq \text{unit circle}, \forall_i \quad (4)$$

[증명] : 식(1)과 식(2)에 대해 다음의 오차함수를 정의하자.

$$e_x(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (5)$$

식(1), (2)와 식(5)를 이용하면

$$\begin{aligned} e_x(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= (A - HC)e_x(k) - K\zeta(k) \end{aligned} \quad (6)$$

로 되며, 식(2b)로부터 확대계를 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} e_x(k+1) \\ \zeta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \zeta(k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

따라서 식(4)가 성립하면 $k \rightarrow \infty$ 일 때, $e_x(k)$, $\zeta(k)$ 는 영이 되어 식(3)이 만족되므로 식(2)는 식(1)에 대한 관측기로 성립됨을 알 수 있다.

[증명끝]

위의 일반 구조형 관측기 식(2)에서 $N = I$, $M = 0$ 로 두어 정리하면

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K\zeta(k) + H\epsilon(k) \quad (8a)$$

$$\zeta(k+1) = \epsilon(k) \quad (8b)$$

$$\epsilon(k) = y(k) - C\hat{x}(k) \quad (8c)$$

로 되어 일반적인 PI 관측기⁽⁴⁾가 됨을 알 수 있다. 또한 $K=0$ 로 설계하면, 종래의 High 게인 관측기로 된다.

그러므로 일반 구조형 관측기인 식(2)의 관측기 계인을 임의로 설계함으로써 종래의 다양한 관측기를 구현할 수 있다.

3. 일반 구조형 관측기 특징

식(1)의 선형 이산 시스템에 대해서 노이즈가 포함된 형태의 시스템을 고려하자.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (9a)$$

$$y(k) = Cx(k) + \delta(k) \quad (9b)$$

여기서 $\delta \in R^p$ 는 출력에 영향을 미치는 노이즈 성분으로 각 출력요소에 대해서는

$$\delta(k) = \begin{bmatrix} \delta_1(k) \\ \vdots \\ \delta_p(k) \end{bmatrix}$$

로 되며, 다음과 같은 차분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$P_i(q^{-1})\delta_i(k) = 0, \quad i=1, \dots, p \quad (10)$$

여기서 q^{-1} 는 $q^{-1}\delta_i(k) = \delta_i(k-1)$ 을 의미하는 shift operator이며 $P_i(q^{-1})$ 는 q^{-1} 의 다항식이다. 위의 차분방정식에 대해 최소공배다항식 (l, c, m) 은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} P(q^{-1}) &= l.c.m\{p_1(q^{-1}), \dots, p_p(q^{-1})\} \\ &= q^r + a_{r-1}q^{r-1} + \dots + a_1q + a_0 \end{aligned} \quad (11)$$

식(2c)와 식(9)로부터 출력오차함수는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\epsilon(k) = Ce_x(k) + \delta(k) \quad (12)$$

윗 식에 $P(q^{-1})$ 를 작용시켜 식(11)의 관계를 이용하면

$$\epsilon(k+r) = -a_{r-1}\epsilon(k+r-1) - \dots - a_1\epsilon(k+1)$$

$$-a_0\varepsilon(k) + CP(q^{-1})e_x(k) \quad (13)$$

같다.

로 되며, 위 식을 상태방정식으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\xi(k+1) = N\xi(k) + MCP(q^{-1})e_x(k) \quad (14)$$

단,

$$\xi(k) = [\varepsilon(k) \ \varepsilon(k+1) \ \cdots \ \varepsilon(k+r-1)]^T,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{r-1} \end{bmatrix},$$

$$M = [0 \ \cdots \ \cdots \ 0 \ I_p]^T$$

식(12)의 출력오차합수를 이용하여 관측오차를 구하면

$$e_x(k+1) = (A - HC)e_x(k) - K\xi(k) - H\delta(k) \quad (15)$$

로 되며, 위 식에 $P(q^{-1})$ 를 작용시켜 식(10)의 관계를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$P(q^{-1})e_x(k+1) = (A - HC)P(q^{-1})e_x(k) - KP(q^{-1})\xi(k) \quad (16)$$

변수 $\xi(k)$ 와 $\zeta(k)$ 사이의 식(2b)와 식(14)에 의해 다음의 관계가 성립한다.

$$\xi(k) = P(q^{-1})\zeta(k) \quad (17)$$

위의 관계를 이용하면 식(16)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$P(q^{-1})e_x(k+1) = (A - HC)P(q^{-1})e_x(k) - K\xi(k) \quad (18)$$

식(14)와 식(18)로 확대계를 구성하면 다음과

$$x_e(k+1) = \begin{bmatrix} A - HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} x_e(k) \quad (19)$$

단,

$$x_e(k) = \begin{bmatrix} P(q^{-1})e_x(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix}$$

따라서, 식(4)가 만족하도록 관측기 게인 K 와 H 를 설계하면 $k \rightarrow \infty$ 일 때, $e_x(k)$, $\xi(k)$ 는 영으로 되어 노이즈 $\delta(k)$ 에 대해서도 영향을 받지 않는 일반 구조형 관측기가 실현된다.

4. 일반 구조형 관측기의 존재조건

본 절에서는 정리1을 만족하는 관측기 게인 K 와 H 의 존재조건에 대해 다루도록 한다. 먼저, 다음의 조건을 만족하는 행렬 P , Q 를 정의하자.

$$K = PQ, \quad Z = QM \quad (20)$$

여기서 $P \in R^{n \times r}$, $Q \in R^{r \times r}$ 이며, $\text{rank } P = \text{rank } Q = r$ 이다.

식(20)을 이용하면 식(4)의 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - HC & -P \\ ZC & QNQ^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & -P \\ 0 & QNQ^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H \\ Z \end{bmatrix} [C \ 0] \quad (21) \end{aligned}$$

위의 식(21)에서 $\left[[C \ 0], \begin{bmatrix} A & -P \\ 0 & QNQ^{-1} \end{bmatrix} \right]$

이 가관측일 경우, 일반 구조형 관측기 계인이 설계될 수 있으므로, 위의 가관측 조건하에서 다음 정리가 구해진다.

[정리 2] 선형 이산 시스템 (1)에 대한 일반 구조형 관측기 식(2)의 관측기 계인이 존재하기 위한 충분조건은

- (i) (A, C) 는 가관측이며,
- (ii) $\text{rank} \begin{bmatrix} A & P \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+r$ 을 만족하는 임의의 행렬 P 가 존재해야 한다.

단, $\text{rank } P = r, r < p$.

[증명] : 일반 구조형 관측기가 임의적으로 설계 가능하기 위해서는 고유치 $\lambda_i \left(\begin{bmatrix} A-HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} \right)$ 가 임의적으로 배치될 수 있어야 하며, 이를 위한 필요충분 조건은 $\left[C \ 0 \right], \begin{bmatrix} A & -P \\ 0 & QNQ^{-1} \end{bmatrix}$ 이 가관측이어야 한다. 즉, 모든 s 에 대해서 다음 식이 만족해야 한다.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI-A & P \\ 0 & sI-QNQ^{-1} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+r$$

위의 조건은 $s = \lambda_i(QNQ^{-1})$ 인 경우는 임의의 행렬 P ($\text{rank } P = r$) 에 대해

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & P \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+r, \text{rank } P = r, r < p \tag{22}$$

이며, $s \neq \lambda_i(QNQ^{-1})$ 인 경우는

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = n \tag{23}$$

과 등가하다. 따라서, 위의 두 가지 조건을 만족함으로써 정리 2에 대한 증명이 이루어진다. [증명끝]

[Remark] 선형 이산시스템 (1)이 정리 2의 조건을 만족하면 일반 구조형 관측기 계인 K, H 가 설계 가능하며, 이때 참고문헌 (4), (5)를 이용하면 유사한 방법에 의해 설계가 가능하다.

5. 시뮬레이션 및 고찰

다음의 이산 시스템을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0100 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9999 & 0.0099 \\ -0.099 & -0.029 & 0.9801 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0]$$

샘플링주기는 0.01sec로 하며, 다음과 같이 스텝 및 정현과 노이즈를 고려하자. 노이즈가 스텝인 경우는,

$$\delta(t) = 0.2, P(q^{-1}) = q - 1 \tag{24}$$

로 하였으며, 이때

$$N = 1, M = 1$$

로 된다. 정현과 노이즈는 노이즈 주파수를 0.5Hz로 다음과 같이 가정하였으며,

$$\delta(t) = 0.2 \sin(2\pi ft), f = 0.5 \tag{25}$$

$$P(q^{-1}) = q^2 - 1.9990q + 1 \tag{26}$$

이때 일반 구조형 관측기 계인은

$$N = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 \\ -1.000 & 1.9990 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

로 주어진다.

스텝 노이즈인 경우의 일반 구조형 관측기 계인은

$$H = \begin{bmatrix} 0.8297 \\ -0.5081 \\ 2.7898 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0.0404 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

으로 설계하였으며, 정현파와 노이즈인 경우는

$$H = \begin{bmatrix} 0.6448 \\ -0.8659 \\ 1.4454 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.1182 \\ 0 & 0.0725 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

로 설계하였다.

시뮬레이션의 비교를 위하여 high 게인 관측기를 설계하였으며, 관측기 게인은 최적 설계법에 의하여

$$K_P = \begin{bmatrix} -1.0124 \\ -0.3791 \\ 2.9337 \end{bmatrix}$$

로 하였다.

또한, 각 시뮬레이션의 결과를 비교하기 위하여 주어진 노이즈에 대해 필터를 설계하고, 필터를 거친 출력값을 이용한 High 게인 관측기의 상태 추정 결과와 비교를 행하였다. 여기서 노이즈 필터링 효과를 극대화하기 위해 차단주파수가 0.25Hz인 이산계 low-pass 필터를 설계하였다.

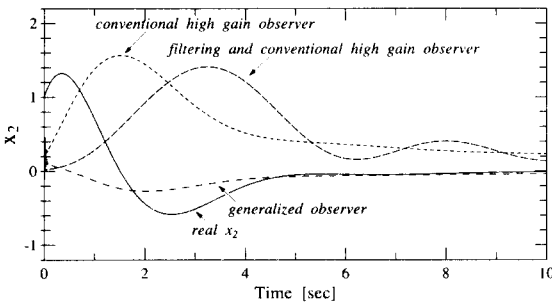


Fig. 1 Response of estimated state 2 with step noise

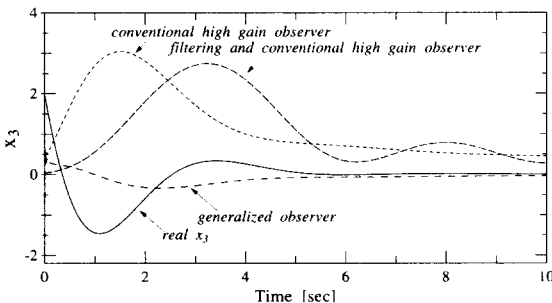


Fig. 2 Response of estimated state 3 with step noise

시뮬레이션 결과는 Fig.1 ~ Fig.4와 같이 나타난다. 스텝 및 정현파와 노이즈가 인가되는 경우 상태 추정치 x_2, x_3 는 Fig.1 ~ Fig.2와 Fig.3 ~ Fig.4에 각각 보여진다.

Fig. 1과 Fig.2에서는 스텝 형태의 노이즈가 인가되는 경우 각 상태변수의 실측치 및 관측기에 의한 추정치를 나타내고 있으나, high 게인 관측기 및 필터링 처리한 데이터를 이용한 high 게인 관측기의 경우는 정상상태에서 추정오차가 발생함을 보이고 있으며, 특히 필터링 처리한 경우는 필터에 의한 시간지연 현상이 두드러짐을 보이고 있다. 반면에, 일반 구조형 관측기의 상태 추정치는 노이즈 억제 효과로 5초 정도에서 실제 측정치와 일치함을 보이고 있다.

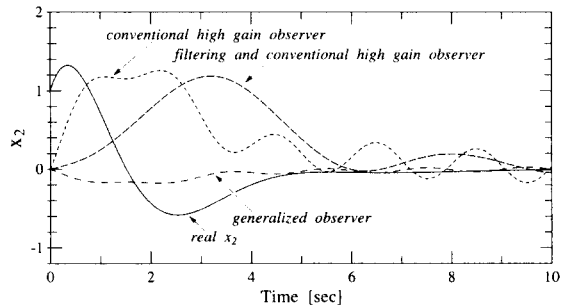


Fig. 3 Response of estimated state 2 with sinusoidal noise

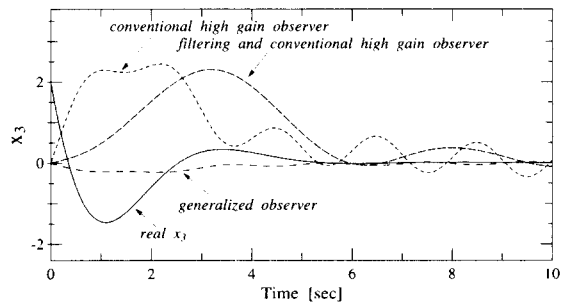


Fig. 4 Response of estimated state 3 with sinusoidal noise

Fig.3과 Fig.4에서는 정현파와 노이즈를 인가한 경우로서 high 게인 관측기의 추정치는 정현파와 노이즈를 그대로 포함하고 있어 상태를 전혀 추정하지 못하며, 필터링 처리한 데이터를 이용한 high 게인

관측기의 경우는 필터링 효과로, 상태는 추정하고 있으나 시간지연으로 추정 속도가 늦음을 알 수 있다. 반면에 일반 구조형 관측기의 경우는 노이즈의 영향이 제거된 양호한 상태추정 결과를 보이고 있다.

따라서, 일반 구조형 관측기는 외부 노이즈에 대해서 종래의 관측기 및 필터링 처리한 관측기 보다 시스템의 상태 추정에 효과적임을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 외란이나 외부 노이즈를 갖는 선형 이산시스템에 대해서 일반 구조형 관측기를 제안하고, 외란의 영향 없이 효과적으로 시스템의 실제 상태를 추정하기 위해 외란 모델을 이용하여 특정 주파수 영역에서 관측성능을 극대화 할 수 있는 일반 구조형 관측기에 대해서 다루었다.

일반 구조형 관측기의 존재조건은 시스템의 가관측성 및 시스템의 rank 조건에 의존하고 있으며, 일반 구조형 관측기가 외부의 노이즈 억제 특성이 있음을 체계적으로 밝혔다. 또한 수치 예제를 이용하여 시뮬레이션을 행하고 여러 결과와의 비교 분석을 통하여 일반 구조형 관측기가 외부의 노이즈를 저감하는 효과가 크다는 사실을 보였다

참고문헌

1. 川路 等, "オブザーバ," コロナ社, 1994.
2. 김환성, 김상봉, 川路茂保, "비례적분 관측기를 이용한 시스템의 고장진단," 한국정밀공학회, 제 14권, 제2호, pp. 41-47, 1997.
3. S. Kawaji and H.S. Kim, "Full Order Observer for Linear Descriptor Systems with Unknown-Inputs," The 34th IEEE Conf. on Decision and Control, Louisiana, USA, pp. 2366-2368, 1995.
4. H.S. Kim, "Design of Robust Control System using Proportional Integral Observer," Ph.D. dissertation, Kumamoto Univ. Japan, 1996.
5. H.S. Kim, S.B. Kim, and S. Kawaji, "Design of PI Observer by using Eigenstructure Assignment," Proc. of the 2nd ASCC, Seoul, Korea, pp. 855-858, 1997.
6. D. Söffker, T.J. Yu, and P.C. Müller, "State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer," Int. J. Systems SCI., Vol. 26, No. 9, pp. 1571-1582, 1995.
7. M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, C. Mechmeche, and M. Darouach, "On Disturbance Decoupled Observers for a Class of Bilinear Systems," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 120, pp. 371-377, 1998.
8. M.S. Mahmoud, Y.C. Soh, and L. Xie, "Observer-based positive real control of uncertain linear systems," Automatica, Vol. 35, pp. 749-754, 1999.
9. M. Hou, A.C. Pugh, T. Raste, and P.C. Müller, "On Luenberg Observer Design for Constrained Mechanical Systems," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 121, pp. 322-326, 1999.
10. J.B. Moore, and T.T. Tay, "Loop Recovery via H_2/H_∞ Sensitivity Recovery," Int. J. Control, Vol. 49, pp. 1249-1271, 1989.
11. S.K. Chang, W.T. You, and P.L. Hsu, "Design of General Structured Observers for Linear System with Unknown Inputs," J. Franklin Inst., Vol. 334B, No. 2, pp. 213-232, 1997.